



سری های فوریه

۱۸ سری فوریه

- همگرایی سری های فوریه
- مشتق گیری و انتگرال گیری از سری فوریه

مقدمه

در علوم و مهندسی گاهی نیاز است یک تابع را روی یک بازه به صورت یک سری از دسته توابع خاص دیگر به جز سری توانی تقریب نماییم. برای نمونه اگر بخواهیم یک تابع را که بر حسب زمان متناوب است تقریب نماییم. از آنجایی که چند جمله ای ها، متناوب نمی باشند، بنابراین سری های توانی نمی توانند ابزار مناسبی برای نمایش این نوع توابع باشند. برای تقریب توابع متناوب معمولاً سری های مثلثاتی که به سری فوریه معروف هستند ترجیح داده می شوند.

سری های فوریه

صرفاً برای ایجاد یک دورنما از سری فوریه (مثلاًتی)، آن را به طور مقدماتی برای توابع متناوب یا با فرض متناوب بودن ارایه می دهیم. بحث مفصل تر را در دروس پیشرفته تر خواهید دید. بحث را با تعریف سری فوریه برای یک تابع متناوب شروع می کنیم.

تعریف ۱۸ تابع متناوب

تابع حقیقی f را متناوب گوئیم، هر گاه عددی حقیقی و مثبت مانند T موجود باشد به طوری که $f(x) = f(x + T)$. کوچکترین مقدار T را دوره تناوب می نامیم.

می دانید که برای هر عدد صحیح n ، توابع $f_n(t) = \cos n\omega t$ و $g_n(t) = \sin n\omega t$ متناوب با دوره تناوب $T = 2\pi/\omega$ هستند، که دوره تناوب اصلی آنها T/n می باشد.

تعریف ۲۸ سری فوریه

فرض کنید f یک تابع متناوب با دوره متناوب T باشد. اگر روی خط حقیقی توابع f و f' به صورت تکه تکه پیوسته باشند، در این صورت همه جا $f(t)$ با یک سری به صورت

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \quad (1)$$

قابل نمایش است که سری فوریه تابع f نامیده می شود، جایی که $\omega = 2\pi/T$. دنباله های a_n و b_n به ضرایب فوریه سری معروف هستند.

برای تعیین ضرایب فوریه a_n و b_n می توان از اتحادهای زیر استفاده نمود که به ازای اعداد صحیح غیر منفی m و n معتبر هستند.

$$\int_0^T \cos n\omega t \, dt = \begin{cases} 0 & , n \neq 0 \\ T & , n = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\int_0^T \sin n\omega t \, dt = 0 \quad , \quad \int_0^T \cos n\omega t \sin m\omega t \, dt = 0 \quad (3)$$

$$\int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t \, dt = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ T/2 & , m = n \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_0^T \sin n\omega t \sin m\omega t \, dt = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ T/2 & , m = n \end{cases} \quad (5)$$

اکنون با ضرب طرفین (۱) به ترتیب در $\cos m\omega t$ و $\sin m\omega t$ سپس انتگرال گیری از طرفین، با توجه به اتحادهای فوق به سادگی نتایج زیر حاصل می شوند:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin n\omega t \, dt \quad \text{و} \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega t \, dt \quad (6)$$

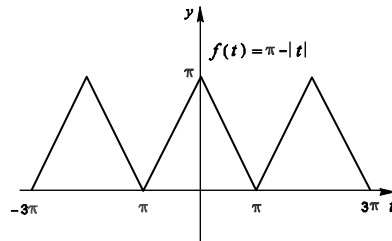
چون سری (۱) به a_0 نیز نیاز دارد، گاهی اوقات فرمول اول (۶) باید به ازای $n = 0$ جداگانه محاسبه شود.

مثال ۱ سری فوریه موج دندان اره‌ای

سری فوریه تابع زیر را با دوره تناوب $T = 2\pi$ می‌یابیم.

$$f(t) = \pi - |t|, \quad -\pi \leq t \leq \pi$$

حل: نمودار این موج در شکل (۱) آمده است. چون $T = 2\pi$ است، پس $\omega = 2\pi/2\pi = 1$.



شکل ۱ - نمایش موج دندان اره‌ای

چون f زوج است، لذا $f(t) \sin nt$ فرد می‌باشد، لذا از فرمول دوم (۶) داریم:

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |t|) \sin nt \, dt = 0$$

همچنین $f(t) \cos nt$ زوج است، در نتیجه از فرمول اول (۶) خواهیم داشت:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - t) \cos nt \, dt = \begin{cases} \pi, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0; n = 2k \\ 4/\pi n^2, & n \neq 0; n = 2k - 1 \end{cases}$$

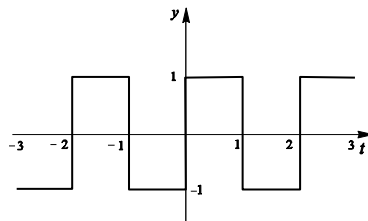
بنابراین به ازای k ‌های صحیح سری فوریه موج دندان اره‌ای متناوب برابر است با:

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi (2k-1)^2} \cos((2k-1)t)$$

مثال ۲ سری فوریه موج مربعی

سری فوریه تابع موج مربعی f با دوره تناوب $T = 2$ مشخص شده زیر در یک دوره را می‌یابیم (شکل ۳).

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0 \\ 1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$



شکل ۳ - نمایش موج مربعی

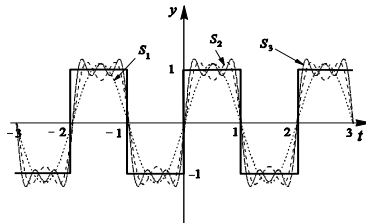
حل: چون $T = 2$ پس $\omega = 2\pi/2 = \pi$. تابع f یک تابع فرد است، لذا $a_n = 0$ و

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^1 f(t) \sin n\pi t \, dt \\ &= 2 \int_0^1 \sin n\pi t \, dt = -\frac{2 \cos n\pi t}{n\pi} \Big|_0^1 \end{aligned}$$

$$= -\frac{2}{n\pi} (-1)^n - 1 = \begin{cases} 4/n\pi, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

بنابراین سری فوریه موج مربعی با دوره تناوب $T = 2$ به صورت زیر است (شکل ۴).

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin((2k-1)\pi t)$$



شکل ۴ - نمایش موج مربعی به همراه جمله اول، دوم و سوم سری فوریه متناظر

نکته ۱

ضرایب سری فوریه $f(x) + g(x)$ برابر با مجموع ضرایب سری فوریه هر یک از توابع $f(x)$ و $g(x)$ است.

سری فوریه مجموع

مثال ۳

سری فوریه تابع زیر را می یابیم:

$$f(x) = x + |x|, \quad -1 < x < 1$$

حل: فرض می کنیم $f_1(x) = x$, $f_2(x) = |x|$. با توجه به نکته بالا، سری فوریه تابع فوق برابر است با مجموع سری فوریه

توابع $f_1(x)$ و $f_2(x)$:

تابع $f_1(x) = x$ یک تابع فرد است، بنابراین داریم: $a_n = 0$

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 x \sin n\pi x dx = 2 \left[-\frac{1}{n\pi} x \cos n\pi x + \frac{1}{n^2 \pi^2} \sin n\pi x \right]_0^1 \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \Rightarrow f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin n\pi x, \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

تابع $f_2(x) = |x|$ یک تابع زوج است، بنابراین داریم: $b_n = 0$ و

$$a_0 = 2 \int_0^1 x dx = 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 x \cos n\pi x dx = 2 \left[\frac{1}{n\pi} x \sin n\pi x + \frac{1}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] \Rightarrow f_2(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] \cos n\pi x, \quad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

بنابراین این:

$$x + |x| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin n\pi x + \frac{2}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] \cos n\pi x \right), \quad -1 < x < 1$$

■ سری های فوریه سینوسی و کسینوسی

همان طور که در مثال های (۱) و (۲) ملاحظه نمودید، اگر f یک تابع فرد باشد، $a_0 = a_n = 0$ ، بنابراین یک سری فوریه سینوسی حاصل می شود که به صورت زیر حاصل می شود.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{T/2} f(t) \sin n\omega t \, dt, \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \quad (۷)$$

به همین ترتیب اگر f یک تابع زوج باشد، سری فوریه حاصل به سری فوریه کسینوسی معروف است، که $b_n = 0$ و خواهیم داشت :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{T/2} f(t) \cos n\omega t \, dt, \quad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t \quad (۸)$$

بنابراین اگر f یک تابع تعریف شده نامتناوب روی بازه $0, T/2$ باشد، با گسترش اختیاری این تابع روی فاصله $-T/2, 0$ بی نهایت سری فوریه حاصل می شود. با گسترش زوج f فقط یک سری فوریه کسینوسی و با گسترش فرد f فقط یک سری فوریه سینوسی حاصل می شود.

گسترش زوج و فرد

مثال ۴

سری فوریه زیر را می یابیم :

a. کسینوسی $f(t) = \pi - t$ روی بازه $0, \pi$ **b.** سینوسی تابع $f(t) = 1$ روی فاصله $0, 1$.

حل a. با توجه به مثال (۱) و فرمول (۸) با گسترش زوج تابع فوق روی فاصله $-\pi, \pi$ داریم :

$$\pi - t = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{4k-1} \cos(2k-1)t$$

b. همچنین با توجه به مثال (۲) و فرمول (۷) با گسترش فرد f روی $-1, 1$ خواهیم داشت :

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)\pi t$$

همگرایی سری های فوریه

دنباله مجموع جزیی (چند جمله ای های فوریه) f_n به تابع متناوب $f(t)$ همگرایی نقطه ای می باشد، که در قضیه زیر به آن می پردازیم.

قضیه ۱.۸

همگرایی دیریکله

اگر f یک تابع متناوب تکه ای پیوسته و f' تکه ای پیوسته باشد، آنگاه در هر نقطه $t = c$ داریم :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega c + b_n \sin n\omega c = \frac{f(c^-) + f(c^+)}{2} \quad (۹)$$

■ سری های تابعی

تاکنون دو سری توانی و فوریه را به عنوان حالت های خاص از سری های تابعی کلی ملاحظه نمودید. اکنون به منظور آشنایی خواننده بحث کوتاهی درباره سری های تابعی انجام می دهیم. هر سری که جمله عمومی آن علاوه بر n ، تابعی بر حسب متغیر مانند x نیز باشد، به یک سری تابعی معروف است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n x = u_1 x + u_2 x + u_3 x + \dots \quad (10)$$

سری توانی و سری فوریه که تاکنون بررسی نمودیم یک حالت خاص از آن می باشد، مانند :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^n &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} &= \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots \end{aligned}$$

می دانید که سری اول به ازای هر x که $|x| < 1$ باشد همگرا است. سری دوم یا در حالت کلی سری (۱۰) نیز می تواند به ازای برخی از مقادیر x همگرا و به ازای برخی مقادیر دیگر واگرا شود. سری تابعی (۱۰) را در فاصله $[a, b]$ همگرا گویند اگر دنباله مجموع جزئی تابعی

$$\{S_n x\} ; n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

همگرا باشد که در آن $S_n x = u_1 x + u_2 x + \dots + u_n x$ در این حالت می نویسیم :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n x = S x$$

و $S x$ را مجموع سری می نامند. با توجه به تعریف حد دنباله به یاد آورید که $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ همگرا به $S x$ در فاصله $[a, b]$ می گویند، اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ و هر x متعلق به فاصله $[a, b]$ بتوان عددی مانند $N > 0$ را یافت به طوری که به ازای هر $n > N$ داشته باشیم :

$$|S_n x - S x| < \varepsilon$$

اگر N فقط به ε وابستگی داشته باشد نه به x ، سری را در فاصله $[a, b]$ همگرای یکنواخت گویند. در حالت های ساده برای بررسی همگرایی سری های تابعی (۱۰) با فرض ثابت بودن x از آزمون های نسبت یا ریشه می توان استفاده نمود.

قضیه ۲.۸

همگرایی یکنواخت

اگر $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ همگرا باشد آنگاه سری فوریه

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$$

در سراسر اعداد حقیقی همگرای یکنواخت است.

مثال ۵

سری فوریه همگرا

فرض کنیم $f(x) = |x|$ ، $-\pi < x < \pi$ ضرایب فوریه در مثال ۳ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} a_0 &= \pi \\ a_n &= \frac{2}{n^2 \pi^2} [(-1)^n - 1] \\ b_n &= 0 \end{aligned}$$

چون $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست و $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ بنابراین $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$ همگراست. در نتیجه سری فوریه در بازه $-\pi < x < \pi$ همگرایی یکنواخت به $|x|$ است.

■

فاصله همگرایی سری های تابعی

مثال ۶

مقادیری از x که سری های زیر همگرا هستند، را مشخص می نمایم.

$$\text{a. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^n \quad \text{b. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$$

حل a: چون $u_n = \frac{1}{2n-1} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^n$ پس با توجه به آزمون نسبت داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} \left| \frac{x+2}{x-1} \right| = \left| \frac{x+2}{x-1} \right|$$

بنابراین اگر $\left| \frac{x+2}{x-1} \right| < 1$ سری همگرا است و اگر $\left| \frac{x+2}{x-1} \right| > 1$ سری واگرا است.

همچنین وقتی $\left| \frac{x+2}{x-1} \right| = 1$ به عبارت معادل وقتی $x = -\frac{1}{2}$ نوع سری با این روش معلوم نمی شود، و با جایگزینی $x = -\frac{1}{2}$

در سری تابعی سری همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$ حاصل می شود. سری به ازای $x = 1$ واگرا و به ازای $x = -2$ همگرا است.

لذا سری به ازای $x \leq -\frac{1}{2}$ همگرا است.

b. در این سری $a_n = \frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$ و چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$ پس نمی توان آزمون نسبت را به کار برد. ولی با

توجه به تجزیه

$$\frac{1}{(x+n)(x+n-1)} = \frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}$$

ملاحظه می شود که اگر $x \neq 0, -1, -2, \dots, -n$ باشد داریم:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \dots \\ &+ \frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n} \end{aligned}$$

لذا با شرط اینکه $x \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ خواهیم داشت:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{x}$$

بنابراین سری به ازای هر x به جزء $x = 0, -1, -2, -3, \dots$ همگرا و مجموع آن $\frac{1}{x}$ است.

■

یکی از مهمترین مسایل در حساب دیفرانسیل و انتگرال سری‌ها، مشتق و انتگرال از سری توانی می‌باشد. تشخیص این که تحت چه شرایطی می‌توان در سری‌ها جای نماد سیگما را با نماد مشتق یا انتگرال عوض نمود، موضوع مهم و مفیدی می‌باشد.

تعریف ۳۸

سری تابعی مغلوب

سری تابعی $\sum_{n=1}^{\infty} u_n x$ را مغلوب در حوزه تعریف $u_n x$ می‌نامند، هرگاه یک سری عددی همگرا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با جملات نامنفی موجود باشد، به طوری که به ازای هر x داشته باشیم:

$$|u_n x| \leq a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

برای نمونه سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ مغلوب سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ است، چون داریم:

$$\frac{|\cos nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall x \in D_{u_n x}$$

اگر سری تابعی $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ مغلوب یک سری عددی همگرا باشد، آنگاه سری تابعی به طور مطلق همگرا به $u x$ می‌باشد. اگر جملات سری $u_n x$ پیوسته باشند آنگاه $u x$ نیز پیوسته است.

قضیه ۳.۸

مشتق و انتگرال از سری تابعی مغلوب

فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} u_n x$ یک سری عددی مغلوب همگرا به $u x$ باشد.

i. هرگاه $u_n x$ بر بازه $[a, b]$ به طور پیوسته مشتق پذیر باشند و سری $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n x$ نیز یک سری مغلوب باشد، آنگاه

$$u' x = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n x \quad (11)$$

ii. هرگاه $u_n x$ بر بازه $[a, b]$ پیوسته باشند، آنگاه برای α و x متعلق به فاصله $[a, b]$ داریم:

$$\int_{\alpha}^x u x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^x u_n x dx \quad (12)$$

در قسمت (i) مغلوب بودن سری مشتق یعنی، $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n x$ ، امری ضروری است. برای نمونه بدیهی است که

سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$ مغلوب سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ است. بنابراین خود سری به ازای هر x همگرا به یک تابع پیوسته $u x$ است. ولی مشتق آن یعنی

$$\cos x + 2^2 \cos 2^2 x + \dots + n^2 \cos n^2 x + \dots$$

همواره همگرا نمی‌باشد. برای نمونه به ازای $x = 0$ سری عددی $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ حاصل می‌شود که واگرا است. زیرا سری حاصل از مشتق غیر مغلوب است.

سری فوریه مثلثاتی

مثال ۷

سری فوریه تابع $f(x) = \sin^2 x$, $-\pi < x < \pi$ را می‌یابیم.

حل: $f(x)$ زوج است پس $b_n = 0$ و داریم:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{\pi} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^\pi = 1 \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} \cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos nx dx - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos 2x \cos nx dx \\
&= \frac{1}{n\pi} \sin nx \Big|_0^\pi - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (\cos(2+n)x + \cos(2-n)x) dx \\
&= -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{n+2} \sin(n+2)x + \frac{1}{2-n} \sin(2-n)x \right]_0^\pi = 0, \quad n \neq 2 \\
a_2 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 x \cos 2x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} \cos 2x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos 2x - \cos^2 2x) dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^\pi - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = -\frac{1}{2\pi} \left[x + \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^\pi = -\frac{1}{2\pi} \pi = -\frac{1}{2} \\
f(x) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \dots \\
&\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x
\end{aligned}$$

■

سری فوریه

مثال ۸

سری فوریه تابع $f(x) = |x| + \cos^2 x$, $-\pi < x < \pi$ را می یابیم.

حل: کافی است سری فوریه $f_1(x) = |x|$ را محاسبه کنیم. این تابع زوج است لذا $b_n = 0$ و داریم:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \frac{2}{\pi} \times \frac{\pi^2}{2} = \pi \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n} x \sin nx + \frac{1}{n^2} \cos nx \right]_0^\pi = \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi} \\
&\Rightarrow |x| + \cos^2 x = \frac{\pi}{2} + \sum \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x, \quad -\pi < x < \pi
\end{aligned}$$

■

مجموعه تمرین‌های فصل ۸

۱. (سری فوریه) در تمرین‌های سری فوریه توابع داده شده را به دست آورید.

$$f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2\pi, \quad T = 2\pi \quad \mathbf{b} \quad f(x) = x, \quad 0 < x < 1, \quad T = 1 \quad \mathbf{a}$$

$$f(x) = |x| + \sin x, \quad -\pi < x < \pi, \quad T = 2\pi \quad \mathbf{d} \quad f(x) = \sin^2 x, \quad -\pi < x < \pi, \quad T = 2\pi \quad \mathbf{c}$$

$$f(x) = |x| + \cos^2 x, \quad -\pi < x < \pi, \quad T = 2\pi \quad \mathbf{e}$$

۲. (سری‌های فوریه سینوسی و کسینوسی) سری فوریه سینوسی و کسینوسی توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 3 - x & 1 < x \leq 3 \end{cases} \quad \mathbf{b} \quad f(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1 \\ 1 & 1 \leq x < 2 \end{cases} \quad \mathbf{a}$$

$$f(x) = x^3, \quad 0 < x < \pi \quad \mathbf{d} \quad f(x) = \sin x, \quad 0 < x < \pi \quad \mathbf{c}$$

۳. با استفاده از سری فوریه $f(x) = |x|$, $-\pi < x < \pi$ حاصل سری عددی $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ را محاسبه کنید.

۴. اگر $f(x) = (-1)^{[x]}$ آنگاه نمودار تابع را رسم کنید و سری فوریه آن را بیابید.

۵. سری فوریه $f(x) = 4 \sin x \cos^2 x$ را بیابید.

۶. مقدار ثابت سری فوریه تابع $f(x) = |\sin x|$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ را بیابید.

۷. سری فوریه تابع $f(x) = x + \sin n\pi x$, $-1 < x < 1$ را بیابید.