

تبدیلات لاپلاس

۱.۷ تبدیلات لاپلاس

- تبدیل لاپلاس مشتق
- تبدیل معکوس لاپلاس
- کاربرد تبدیلات لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل

مقدمه

- روش دیگری برای حل معادلات دیفرانسیل، استفاده از تبدیلات لاپلاس می باشد که در بسیاری از شاخه های
- ریاضیات کاربردی از اهمیت ویژه ای برخوردار است. با استفاده از این روش، یک مسئله مقدار اولیه به یک معادله
- جبری یا یک دستگاه از معادلات جبری تبدیل می شود که با حل این معادلات و استفاده از جدول تبدیلات لاپلاس، می
- توان به جواب مسئله مقدار اولیه دست یافت. در علوم و مهندسی گاهی نیاز است یک تابع را روی یک بازه به صورت
- یک سری از دسته توابع خاص دیگر به جز سری توانی تقریب نماییم. برای نمونه اگر بخواهیم یک تابع را که بر حسب
- زمان متناوب است تقریب نماییم. از آنجایی که چند جمله ای ها، متناوب نمی باشند، بنابراین سری های توانی نمی توانند
- ابزار مناسبی برای نمایش این نوع توابع باشند. برای تقریب توابع متناوب معمولاً سری های مثلثاتی که به سری فوریه
- معروف هستند ترجیح داده می شوند.

تعریف ۱.۷ تبدیل لاپلاس

اگر تابع f برای $0 \leq t < \infty$ تعریف شده باشد و s یک متغیر حقیقی باشد، تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ نامیده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1)$$

مثال ۱

تبدیل لاپلاس $f(t) = 1$

تبدیل لاپلاس $f(t) = 1$ را می یابیم.

حل : با استفاده از تعریف بالا داریم:

$$L\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-e^{-st}}{s} \right]_0^b = \frac{1}{s} \quad s > 0$$

■

مثال ۲

تبدیل لاپلاس $f(t) = t$

تبدیل لاپلاس $f(t) = t$ را می یابیم.

حل : با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس و روش انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$L\{t\} = \int_0^{\infty} e^{-st} t dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} t dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{-e^{-st}(st+1)}{s^2} \right]_0^b = \frac{1}{s^2} \quad s > 0$$

■

مثال ۳

تبدیل لاپلاس $f(t) = e^{at}$

تبدیل لاپلاس $f(t) = e^{at}$ را می یابیم.

حل : با استفاده از تعریف داریم:

$$L\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{(a-s)t} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \right]_0^b = \frac{1}{s-a} \quad s > a$$

■

مثال ۴

تبدیل لاپلاس $f(t) = \sin at$

تبدیل لاپلاس $f(t) = \sin at$ و $f(t) = \cos at$ را می یابیم.

حل : با استفاده از تعریف داریم:

$$L\{\sin at\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin at dt$$

با انتگرال گیری به روش بازگشتی انتگرال فوق برابر $\frac{a}{s^2 + a^2}$ است. بنابراین:

$$L\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$$

به همین ترتیب می توان نشان داد که:

$$L\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$$

تبدیل لاپلاس $f(t) = t^n$

مثال ۵

تبدیل لاپلاس $f(t) = t$ که در آن n یک عدد صحیح مثبت است را می یابیم.

حل : با توجه به مثال ۱ و استفاده از روش استقراء ریاضی داریم:

$$L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad s > 0$$

قضیه ۱.۷

خاصیت خطی بودن

فرض کنید $f_1(t)$ و $f_2(t)$ دو تابع باشند که تبدیل لاپلاس آنها موجود است. اگر c_1 و c_2 دو ثابت دلخواه باشند، آنگاه:

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 L\{f_1(t)\} + c_2 L\{f_2(t)\}$$

خاصیت خطی

مثال ۶

تبدیل لاپلاس زیر را می یابیم.

$$L\{2t^2 + 4 \cos 3t + 3e^{-2t}\}$$

حل : با توجه به قضیه بالا داریم:

$$\begin{aligned} L\{2t^2 + 4 \cos 3t + 3e^{-2t}\} &= 2L\{t^2\} + 4L\{\cos 3t\} + 3L\{e^{-2t}\} \\ &= \frac{4}{s^3} + \frac{4s}{s^2 + 9} + \frac{3}{s + 2} \quad s > 0 \end{aligned}$$

قضیه ۲.۷

قضیه انتقال

اگر $L\{f(t)\} = F(s)$ آنگاه:

$$L\{e^{at} f(t)\} = F(s - a)$$

انتقال

مثال ۷

تبدیلات لاپلاس زیر را می یابیم.

$$L\{t^3 e^{-2t}\} : (b)$$

$$L\{e^{2t} \sin 3t\} : (a)$$

حل (a): با توجه به قضیه بالا داریم:

$$L\{e^{2t} \sin 3t\} = \frac{3}{(s-2)^2 + 9}$$

حل (b): با توجه به قضیه بالا داریم:

$$L\{t^3 e^{-2t}\} = \frac{6}{(s+2)^4}$$

■

قضیه ۳.۲ تبدیل لاپلاس مشتق

اگر $f(t)$ و $f'(t)$ برای $t \geq 0$ پیوسته و تبدیل لاپلاس هر دو تابع موجود باشند. در این صورت داریم:

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0)$$

لاپلاس مشتق

مثال ۸

اگر $f(t) = \sin^2 t$ آنگاه $L\{f(t)\}$ را می یابیم.

حل: می دانیم:

$$f'(t) = 2 \sin t \cos t = \sin 2t \quad f(0) = 0$$

پس با توجه به قضیه قبل داریم:

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) = sL\{f(t)\}$$

از طرفی:

$$L\{f'(t)\} = L\{\sin 2t\} = \frac{2}{s^2 + 4} \quad s > 0$$

در نتیجه:

$$L\{f(t)\} = \frac{2}{s(s^2 + 4)} \quad s > 0$$

■

تبدیل معکوس لاپلاس

تبدیل معکوس لاپلاس

تعریف ۲.۲

اگر تبدیل لاپلاس f موجود و برابر F باشد ($L\{f(t)\} = F(s)$)، آنگاه:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} \quad (۲)$$

تبدیل معکوس لاپلاس

مثال ۹

با توجه به مثالهای ۱ تا ۴ داریم:



$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1, \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t, \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}, \quad L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \sin 2t$$

قضیه ۴.۷

خاصیت خطی بودن

فرض کنید $f_1(t)$ و $f_2(t)$ به ترتیب تبدیل معکوس F_1 و F_2 باشند، آنگاه:

$$L^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} = c_1 L^{-1}\{F_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{F_2(s)\}$$

مثال ۱۰

تبدیل معکوس لاپلاس

تبدیل معکوس توابع زیر را می یابیم.

$$F(s) = \frac{3s^2 - 3s + 20}{(s-2)(s^2+9)} \quad \text{:(a)}$$

حل (a): ابتدا کسر فوق را تجزیه می کنیم:

$$\frac{3s^2 - 22}{(s+2)(s^2-9)} = \frac{2}{s+2} + \frac{s}{s^2-9} - \frac{2}{s^2-9}$$

پس داریم:

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{3s^2 - 3s + 20}{(s-2)(s^2+9)}\right\} &= 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} - \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+9}\right\} \\ &= 2e^{2t} + \cos 2t - \frac{1}{3}\sin 3t \end{aligned}$$

حل (b): داریم:

$$\begin{aligned} L^{-1}\left\{\frac{s+2}{s^2-2s+4}\right\} &= L^{-1}\left\{\frac{(s-1)+3}{(s-1)^2+3}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{(s-1)}{(s-1)^2+3}\right\} + \sqrt{3}L^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}}{(s-1)^2+3}\right\} \\ &= e^t \cos \sqrt{3}t + \sqrt{3}e^t \sin \sqrt{3}t \end{aligned}$$

کاربرد تبدیلات لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل

تبدیلات لاپلاس ابزار مفیدی برای حل انواع معادلات دیفرانسیل هستند. با ذکر چند مثال، کاربرد این تبدیلات را می بینیم.

مثال ۱۱

کاربرد تبدیل لاپلاس

جواب مسأله اولیه زیر را می یابیم.

$$y'(t) + 2y(t) = 4t, \quad y(0) = 0$$

حل: از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می گیریم:

$$L\{y'(t)\} + 2L\{y(t)\} = 4L\{t\}$$

پس با استفاده از قضیه ۳.۷ داریم:

$$sL\{y(t)\} - y(0) + 2L\{y(t)\} = \frac{4}{s^2}$$

فرض کنیم $L\{y(t)\} = Y(s)$ ، در این صورت داریم:

$$(s+2)Y(s) = \frac{4}{s^2} \Rightarrow Y(s) = \frac{4}{s^2(s+2)}$$

با تجزیه این کسر داریم:

$$Y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+2}$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}\{Y(s)\} = -L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} \\ &= -1 + 2t + e^{-2t} \end{aligned}$$

■

کاربرد تبدیل لاپلاس

مثال ۱۲

جواب مسأله اولیه زیر را می یابیم.

$$y'' + 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

حل: از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می گیریم:

$$L\{y''\} + 3L\{y'\} + 2L\{y\} = L\{0\} = 0$$

با فرض $L\{y(t)\} = Y(s)$ داریم:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3Y(s) - 3y(0) + 2Y(s) = 0$$

با جایگزینی مقادیر اولیه، خواهیم داشت:

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = 1$$

پس:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

بنابراین جواب مسأله عبارت است از:

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-t} - e^{-2t}$$

■

کاربرد تبدیل لاپلاس

مثال ۱۲

جواب مسأله اولیه زیر را می یابیم.

$$y'' - y = \sin 2t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

حل: از دو طرف معادله تبدیل لاپلاس می گیریم:

$$L\{y''\} - L\{y\} = L\{\sin 2t\}$$

با فرض $L\{y(t)\} = Y(s)$ داریم:

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - Y(0) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

با جایگزینی مقادیر اولیه، خواهیم داشت:

$$s^2 Y(s) - s + 1 - Y(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

پس:

$$Y(s) = \frac{2 + (s-1)(s^2 + 4)}{s^2 + 4} = \frac{\frac{1}{5}}{s-1} + \frac{\frac{4}{5}}{s+1} + \frac{-\frac{2}{5}}{s^2 + 4}$$

بنابراین جواب مسئله عبارت است از:

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{5}}{s-1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{\frac{4}{5}}{s+1}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{-\frac{2}{5}}{s^2 + 4}\right\} = \frac{1}{5}e^t + \frac{4}{5}e^{-t} - \frac{1}{5}\sin 2t$$

■

مجموعه تمرین‌های فصل ۷

۱. (تبدیل لاپلاس) در تمرین‌های زیر تبدیل لاپلاس توابع داده شده را به دست آورید.

$$f(t) = \cos^2 at \quad \mathbf{a} \quad f(t) = \sin^2 at \quad \mathbf{b}$$

$$f(t) = t^3 e^{2t} \quad \mathbf{c} \quad f(t) = e^{-t} \cos t \quad \mathbf{d}$$

$$f(t) = t \sin t \quad \mathbf{e} \quad f(t) = (2t - 2) + e^{2t} \sin 2t \quad \mathbf{f}$$

۲. نشان دهید $L\{t^{-\frac{1}{2}}\} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$ و با استفاده از آن $L\{\sqrt{t}\}$ را پیدا کنید.

۳. حاصل $L\{\sin \sqrt{t}\}$ را به دست آورید.

۴. (معکوس تبدیل لاپلاس) در تمرین‌های زیر معکوس تبدیل لاپلاس توابع داده شده را به دست آورید.

$$F(s) = \frac{s+3}{s^3-s} \quad \mathbf{a} \quad F(s) = \frac{2s+1}{s^3+3s^2+2s} \quad \mathbf{b}$$

$$F(s) = \frac{s}{s^2-2s+26} \quad \mathbf{c} \quad F(s) = \frac{2s+4}{(s-2)(s^2+9)} \quad \mathbf{d}$$

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2+s-2} \quad \mathbf{e} \quad F(s) = \ln\left(\frac{s+1}{s-1}\right) \quad \mathbf{f}$$

$$F(s) = \frac{2a^2}{(s^2+a^2)^2} \quad \mathbf{g} \quad F(s) = \tan^{-1} s \quad \mathbf{h}$$

۵. (مقدار اولیه) معادلات دیفرانسیل زیر را به کمک تبدیل لاپلاس حل کنید.

$$y(3) = 1 \quad \mathbf{a} \quad y' + 3y = 0,$$

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = -3 \quad \mathbf{b} \quad y'' + 2y' + y = 2e^{-t},$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad \mathbf{c} \quad y'' + 4y = 0$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad \mathbf{d} \quad y'' + 2y' + 2y = 0,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \quad \mathbf{e} \quad y'' + 16y = 5 \cos 4t,$$

$$y(0) = -1, \quad y'(0) = -1 \quad \mathbf{f} \quad y'' + 4y' + 5y = 39e^t \sin t,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1 \quad \mathbf{g} \quad y'' - y = \sin 2t,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \quad \mathbf{h} \quad y'' + 2y' + y = te^{-t},$$