

بخش ۲.۶ معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

شکل کلی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به صورت زیر است.

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (10)$$

شناسه y'' حتماً باید در معادله باشد، تا معادله مرتبه دوم حاصل شود، در غیر این صورت (۸) یک معادله مرتبه دوم نخواهد بود. درست همانند معادله مرتبه اول یک جواب معادله دیفرانسیل (۸) تابعی چون $y = \phi(x)$ است، که در یک بازه متحلاً داشته باشیم:

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x)) = 0$$

برای نمونه می‌دانیم که $y = \sin x$ یک جواب معادله $y + y'' = 0$ است، زیرا

$$\sin x + \frac{d^2}{dx^2} \sin x = 0$$

به علاوه به ازای هر ثابت C_1 و C_2 دلخواه $y = C_1 \sin(x + C_2)$ نیز در معادله صدق می‌کند (امتحان کنید)، که به **جواب عمومی** معروف است. به طور کلی $y = \phi(x, C_1, C_2)$ ، که به ازای هر دو ثابت C_1 و C_2 در معادله (۱۷) صدق کند یک جواب عمومی نامیده می‌شود. برای تعیین ثابت‌های C_1 و C_2 در یک شهودی‌ها بیان می‌کند که احتیاج به دو شرط داریم. این شرایط می‌توانند به صورت زیر باشند که به **شرایط اولیه** معروفند.

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (11)$$

همچنین ممکن است شرایط در دو نقطه، به شکل زیر برقرار باشد، که به **شرایط مرزی** معروف هستند.

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \quad (12)$$

ساده‌ترین معادله مرتبه دوم به صورت $y'' = f(x)$ است، که با دو بار انتگرال‌گیری از طرفین داریم:

$$y' = \int f(x) dx + C_1 = R(x) + C_1$$

که در آن C_1 ثابت انتگرال‌گیری $f(x)$ یا مشتق ثابت برای $f(x)$ است. با انتگرال‌گیری مجدد از این جواب داریم:

$$y = \int f(x) dx + C_1 x + C_2$$

که در آن C_2 نیز ثابت دلخواه دیگر همانند C_1 است.

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت

معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت حالت مهمی از معادلات دیفرانسیل می‌باشند که در کاربردها اغلب با آنها مواجه می‌شویم. به عنوان مثال اغلب در دستگاه‌های مکانیکی و مدارهای الکتریکی به این نوع معادلات برخورد می‌کنیم.

شکل کلی یک معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت عبارت است از:

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (13)$$

که در آن a و b ضرایب ثابت معادله هستند.

قضیه ۲.۶

جواب‌های معادله همگن خطی مرتبه دوم

اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب همگن (۱۳) باشند آنگاه $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ نیز جواب (۱۳) می‌باشند که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه اند.

با توجه به قضیه فوق برای یافتن $y_1(x)$ و $y_2(x)$ جوابهای معادله (۱۳) را به شکل :

$$y = e^{\lambda x} \quad (14)$$

جستجو می کنیم که در آن λ یک ثابت است. با جانشین کردن (۱۴) در (۱۳) خواهیم داشت:

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

چون $e^{\lambda x} \neq 0$ پس :

$$(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \quad (15)$$

در این صورت (۱۴) جواب معادله دیفرانسی همگن خطی مرتبه دوم (۱۳) است اگر و تنها اگر λ ریشه معادله درجه دوم (۱۵)

باشد. این معادله را **معادله مشخصه** معادله دیفرانسیل (۱۳) می نامیم.

جوابهای معادله مشخصه دارای سه حالت زیر می باشد:

حالت اول

معادله مشخصه دارای دو ریشه حقیقی متمایز λ_1 و λ_2 باشد. در این حالت:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

جوابهای معادله (۱۳) هستند. پس جواب عمومی برابر است با:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

حالت دوم

معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ باشد. در این حالت:

$$y_1 = e^{\lambda x}$$

یک جواب معادله (۱۳) است. پس جواب عمومی برابر است با:

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

حالت سوم

معادله مشخصه دارای دو ریشه مختلط مزدوج $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ و $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ باشد. در این حالت توابع مختلط:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}, y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$$

جوابهای معادله (۱۳) هستند برای آن که جوابهای حقیقی برای معادله به دست آوریم، می نویسیم:

$$\begin{cases} e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \\ e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x) \end{cases}$$

در این صورت جواب عمومی معادله (۱۳) برابر است با:

$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 i \sin \beta x)$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

مثال ۱

جواب عمومی معادله زیر را می یابیم:

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

حل: ابتدا معادله مشخصه آن را می یابیم که عبارت است از:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

این معادله دارای دو ریشه متمایز $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$ می باشد. پس جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$$

■

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

مثال ۲

جواب عمومی معادله زیر را می یابیم:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

حل: ابتدا معادله مشخصه آن را می یابیم که عبارت است از:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

این معادله دارای ریشه مضاعف $\lambda = 3$ می باشد. پس جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$$

■

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم

مثال ۳

جواب عمومی معادله زیر را می یابیم:

$$y'' + 4y = 0$$

حل: ابتدا معادله مشخصه آن را می یابیم که عبارت است از:

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

این معادله دارای دو ریشه مختلط $\lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$ می باشد. پس جواب عمومی معادله برابر است با:

$$y = e^{0x}(c_1 \cos 2x + c_2 i \sin 2x)$$

■

مجموعه تمرین‌های بخش ۶.۲

۱. (معادله مرتبه دوم) جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{lll}
 \text{a. } y'' + 9y = 0 & \text{b. } y'' - 2y' + 5y = 0 & \text{c. } y'' - 4y' + 13y = 0 \\
 \text{e. } y'' + 4y' + 4y = 0 & \text{d. } y'' + 4y' + 4y = 0 & \text{f. } 4y'' - 4y' + y = 0 \\
 \text{h. } y'' + 2y' + 5y = 0 & \text{g. } y'' + 2y' + 5y = 0 & \text{i. } y'' - y' - 2y = 0
 \end{array}$$

۲. (معادله مرتبه دوم) جواب خصوصی معادلات دیفرانسیل زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a. } y'' + 4y = 0, y(\frac{\pi}{4}) = 1, y'(\frac{\pi}{4}) = 0 & \text{b. } y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0 \\
 \text{c. } y'' + 2y' + 3y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 2 & \text{d. } y'' + y = 0, y(0) = 1, y'(0) = -2
 \end{array}$$