

## معادلات دیفرانسیل معمولی

۱.۶ معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

۲.۶ معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

## مقدمه

اغلب در رشته های مختلفی مانند مهندسی، پزشکی و اقتصاد و ... برای بیان مسأله معینی نیاز به ساخت مدل ریاضی می گردد. معمولاً این مدل های ریاضی، معادلاتی شامل یک تابع مجهول و مشتقات تابع نسبت به متغیرهای مستقل هستند. چنین معادلاتی را معادلات دیفرانسیل می نامند و هدف این فصل ارائه روش هایی برای حل این نوع معادلات است.

## بخش ۶. ۱ معادله دیفرانسیل مرتبه اول

منظور از یک معادله دیفرانسیل یعنی معادله‌ای که دسته کم شامل یک مشتق

$$y' = f(x), \quad y'' = f''(x), \dots$$

از تابع  $y = f(x)$  و اغلب خود تابع ("مشتق صفرم") باشد. یک معادله دیفرانسیل را از مرتبه  $n$  گویند، در صورتی که  $n$  بالاترین مرتبه مشتقی باشد که در آن آمده است. برای نمونه معادلات دیفرانسیل‌های زیر به ترتیب از مرتبه 1، 2 و 4 می‌باشند.

$$2xy' - 5y = x, \quad 2y'' + x^2y = 0, \quad y^4 = 2x^2$$

## تعریف ۱.۶

## معادله دیفرانسیل

اگر  $F$  یک تابع از  $n+2$  متغیر مستقل باشد، معادله

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه  $n$  نامیده می‌شود که رابطه‌ای است بین متغیر مستقل  $x$  و تابع  $y(x)$  و  $n$  مشتق آن.

## جواب معادله دیفرانسیل

ابتدا بحث را به تعیین جواب معادلاتی مرتبه اول زیر اختصاص می‌دهیم.

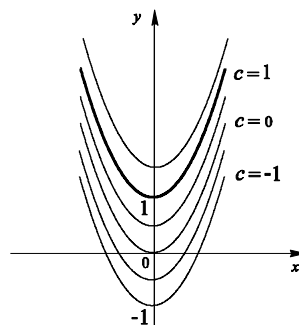
$$F(x, y, y') = 0$$

(۲)

که در این معادله  $y'$  همیشه باید به عنوان شناسه  $F$  موجود باشد، زیرا در غیر این صورت (۲) یک معادله دیفرانسیل نخواهد بود. ساده‌ترین نوع معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت  $y' = f(x)$  می‌باشد، که جواب عمومی آن با تعریف انتگرال نامعین برابر است با:

$$y = \int f(x) dx + C$$

برای نمونه معادله دیفرانسیل  $y' = 2x$  دارای جواب عمومی زیر می‌باشد (شکل ۱).



شکل ۱ - چند جواب عمومی به همراه یک جواب خصوصی از معادله  $y' = 2x$

$$y = \int 2x dx + C = x^2 + C$$

به منظور تعیین یک جواب خاص، (تعیین ثابت  $C$ ) به یک شرط  $y_0 = y(x_0)$  نیاز داریم که به شرط اولیه معروف است، که اگر معادله  $y' = 2x$  همراه با شرط  $y(1) = 2$  باشد، نتیجه می‌شود:

$$2 = 1 + C \Rightarrow C = 1$$

بنابراین  $y = x^2 + 1$  یک جواب خصوصی است. این جواب در شکل (۱) پررنگ تر نمایش داده شده است.

### ■ جواب عمومی و خصوصی

منظور از جواب معادله (۲) تابعی چون  $y = \phi(x)$  است به طوری که در یک بازه مانند  $I$  در معادله (۲) صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0$$

همانند نمونه بالا که  $y = x^2 + 1$ ،  $y = x^2 - 1$  و همه جواب‌های معادله می‌باشند. در حالت کلی همانند  $y = x^2 + C$  در نمونه بالا، رابطه  $y = \phi(x, C)$  که در آن  $C$  یک ثابت اختیاری است جواب عمومی نامیده می‌شود. با توجه به شرط آغازی ثابت  $C$ ، قابل تعیین است، که جواب حاصل جواب خصوصی نامیده می‌شود.

### مثال ۱ جواب معادله دیفرانسیل

جوابهای معادله دیفرانسیل  $y'' - 5y' + 6y = 0$  به صورت  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$  می‌باشد. زیرا اگر قرار دهیم  $y = e^{2x}$  آنگاه داریم:  $y' = 2e^{2x}$  و  $y'' = 4e^{2x}$ . اگر در معادله قرار دهیم می‌بینیم که:

$$4e^{2x} - 10e^{2x} + 6e^{2x} = 0, \forall x$$

به همین صورت  $y = e^{3x}$  نیز جواب معادله است. به طور کلی می‌توان نشان داد که هر یک از توابع  $y = c_1 e^{2x}$  و  $y = c_2 e^{3x}$  که در آنها  $c_1$  و  $c_2$  ثابتهای دلخواه هستند، جواب معادله می‌باشند. علاوه بر این تابع  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$  جواب معادله است که به آن جواب عمومی معادله دیفرانسیل می‌گوییم.

### معادله دیفرانسیل جدایی پذیر

#### تعریف ۲.۶

#### معادله دیفرانسیل جدایی پذیر

معادله دیفرانسیل مرتبه اول  $M(x) + N(y)y' = 0$  که پس از تبدیل  $y'$  به  $\frac{dy}{dx}$  و ضرب آن در  $dx$  به صورت زیر در می‌آید

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (۳)$$

را معادله دیفرانسیل مرتبه اول جدایی پذیر می‌نامیم.

که در آن جمله اول سمت چپ فقط شامل  $x$  و جمله دوم فقط شامل  $y$  است، به این معنی که متغیرها از هم جدا شده‌اند. برای حل معادله فوق کافی است از دو طرف آن انتگرال بگیریم.

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C \quad (۴)$$

### مثال ۲ معادله دیفرانسیل جدایی پذیر

جواب عمومی معادله  $y' = e^{x+y}$  را به دست آورده، سپس یک جواب خصوصی که در شرط  $y(0) = 0$  صدق می‌کند، برای آن تعیین می‌کنیم.

**حل:** ابتدا معادله فوق را به صورت  $\frac{dy}{dx} = e^x e^y$  می نویسیم. ملاحظه می گردد با نوشتن معادله به صورت  $e^x dx = e^{-y} dy$

متغیرهای  $x$  و  $y$  از هم جدا شده و با انتگرال گیری از طرفین داریم:

$$\int e^x dx - \int e^{-y} dy = c$$

بنابر این جواب عمومی معادله عبارت است از:

$$e^x + e^{-y} = c$$

اکنون برای یافتن جواب خصوصی مقدار  $c$  را طوری می یابیم که شرط  $y(0) = 0$  برقرار باشد. با قرار دادن  $x = 0$  و

$y = 0$  ( $y(x_0) = y_0$ ) در جواب عمومی،  $c = 2$  به دست می آید. پس جواب خصوصی معادله فوق برابر است با:

$$e^x + e^{-y} = 2$$

■

### مثال ۳

#### معادله دیفرانسیل جدایی پذیر

جواب عمومی معادلات زیر را می یابیم:

$$(a): y' = 1 + x^2 + y^2 + x^2 y^2$$

$$(b): 3x^2(y+3)dx + (x^3+2)dy = 0$$

**حل (a):** معادله فوق را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + y^2(1 + x^2) = (1 + x^2)(1 + y^2)$$

پس متغیرهای  $x$  و  $y$  را می توان از هم جدا نمود:

$$(1 + x^2)dx = \frac{dy}{1 + y^2}$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطه فوق داریم:

$$\int (1 + x^2)dx + c = \int \frac{dy}{1 + y^2}$$

یا:

$$x + \frac{x^3}{3} + c = \tan^{-1} y$$

پس جواب عمومی عبارت است از:

$$y = \tan\left(x + \frac{x^3}{3} + c\right)$$

**حل (b):** با تقسیم طرفین معادله  $(y+3)(x^3+2)$  متغیرها جدا می شوند و داریم:

$$\frac{3x^2}{x^3+2} dx = -\frac{dy}{y+3}$$

با انتگرال گیری از طرفین معادله فوق داریم:

$$\int \frac{3x^2}{x^3+2} dx = -\int \frac{dy}{y+3} + c$$

یا:

$$\ln|(x^3+2)| = -\ln|(y+3)| + c \Rightarrow \ln|(x^3+2)(y+3)| = c$$

پس نتیجه می شود:

$$\left| (x^3 + 2)(y + 3) \right| = e^c$$

چون  $e^c$  یک ثابت دلخواه است پس قرار می دهیم:  $e^c = c$  لذا جواب عمومی برابر است یا:

$$(x^3 + 2)(y + 3) = c \Rightarrow y = 3 - \frac{c}{x^3 + 2}$$

■

## معادله دیفرانسیل همگن

### تعریف ۳.۶

#### معادله همگن

تابع دو متغیره  $f(x, y)$  را همگن و از درجه  $n$  مینامیم، هر گاه به ازای هر  $\lambda \neq 0$  و به ازای زوج مرتب  $(x, y)$  و  $(\lambda x, \lambda y)$  که در حوزه تعریف تابع باشند، داشته باشیم:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

### معادله همگن

#### مثال ۴

نشان می دهیم که تابع  $f(x, y) = x^3 + 2xy^2$  همگن و از درجه ۳ و تابع  $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$  همگن و از درجه صفر، ولی

تابع  $f(x, y) = x^2 + y$  همگن نیست.

**حل:** برای تابع  $f(x, y) = x^3 + 2xy^2$  داریم:

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 + 2(\lambda x)(\lambda y)^2 = \lambda^3(x^3 + 2xy^2) = \lambda^3 f(x, y)$$

پس این تابع همگن و از درجه ۳ است.

برای تابع  $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$  داریم:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda x + \lambda y} = \frac{1}{\lambda(x+y)} = \lambda^{-1} \frac{1}{x+y} = \lambda^{-1} f(x, y)$$

پس این تابع همگن و از درجه -۱ است.

برای تابع  $f(x, y) = x^2 + y$  داریم:

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + \lambda y = \lambda^2 x^2 + \lambda y$$

این تابع همگن نیست.

■

### تعریف ۴.۶

#### معادله دیفرانسیل همگن

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  را همگن گوئیم هر گاه دو تابع  $M(x, y)$  و  $N(x, y)$  هر دو همگن از یک درجه باشند.

## معادله دیفرانسل همگن

## مثال ۵

جواب عمومی معادله دیفرانسل  $(x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$  را می یابیم.

**حل:** معادله فوق همگن و از درجه ۲ می باشد زیرا توابع  $M(x, y) = x^2 + y^2$  و  $N(x, y) = 2xy$  هر دو همگن از درجه ۲ می باشند. برای حل این معادله دیفرانسل، ابتدا آن را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)$$

حال اگر قرار دهیم  $y = xv$  آنگاه داریم:

$$x \frac{dv}{dx} + v = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v} + v\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{v^2 + 1}{v}\right)$$

لذا داریم:

$$x \frac{dv}{dx} = -\frac{1 + 3v^2}{2v} \Rightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{2v}{1 + 3v^2} dv$$

مشاهده می شود که با این تغییر متغیر ( $\frac{y}{x} = v$ )، متغیرهای  $x$  و  $v$  از هم جدا می شوند. اکنون با انتگرال گیری از طرفین داریم:

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{2v}{1 + 3v^2} dv \Rightarrow \ln|x| + \frac{1}{3} \ln|1 + 3v^2| = c$$

پس:

$$\ln|x^3(1 + 3v^2)| = c' = \ln c'' \Rightarrow x^3(1 + 3v^2) = e^{\ln c''} = c$$

اکنون با قرار دادن  $\frac{y}{x} = v$  جواب عمومی برابر است:

$$x^3 + 3xy^2 = c$$

■

## معادله دیفرانسل همگن

## مثال ۶

جواب عمومی معادله دیفرانسل  $x \cos\left(\frac{y}{x}\right)y' = x \sin\left(\frac{y}{x}\right) + y \cos\left(\frac{y}{x}\right)$  را می یابیم.

**حل:** معادله فوق همگن و از درجه ۱ می باشد زیرا توابع  $M(x, y) = x \cos\left(\frac{y}{x}\right)$  و  $N(x, y) = x \sin\left(\frac{y}{x}\right) + y \cos\left(\frac{y}{x}\right)$

هر دو همگن از درجه ۱ می باشند. برای حل این معادله دیفرانسل، ابتدا آن را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \sin\left(\frac{y}{x}\right) + y \cos\left(\frac{y}{x}\right)}{x \cos\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right)}{\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

حال اگر قرار دهیم  $\frac{y}{x} = v$  آنگاه داریم:

$$x \frac{dv}{dx} + v = \frac{\sin v + v \cos v}{\cos v} \Rightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{\sin v}{\cos v} = \tan v$$

لذا داریم:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{\tan v} = \cot v dv$$

اکنون با انتگرال گیری از طرفین داریم:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \cot v dv + c \Rightarrow \ln|x| = \ln|\sin v| + c$$

پس:

$$\ln \left| \frac{x}{\sin(\frac{y}{x})} \right| = c \Rightarrow \frac{x}{\sin(\frac{y}{x})} = e^c$$

در نتیجه جواب عمومی عبارت است از:

$$\frac{x}{\sin(\frac{y}{x})} = e^c \Rightarrow \frac{y}{x} = \sin^{-1} \frac{x}{e^c} \Rightarrow y = x \sin^{-1} \frac{x}{e^c}$$

■

## معادله دیفرانسیل کامل

### تعریف ۵.۶

#### معادله دیفرانسیل کامل

معادله دیفرانسیل مرتبه اول  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  را کامل گوئیم، هرگاه تابع دو متغیره  $f(x, y)$  وجود داشته باشد به طوری که:

$$df = M(x, y)dx + N(x, y)dy \quad (۵)$$

بنابر این  $df = 0$  پس تابع  $f(x, y)$  ثابت می باشد. یعنی  $f(x, y) = c$ .

### مثال ۷

#### معادله دیفرانسیل کامل

معادله دیفرانسیل  $3x^2 + 2ydy = 0$  کامل است زیرا اگر تعریف کنیم:  $f(x, y) = x^3 + y^2$ ، آنگاه داریم:

$$df = 3x^2 + 2ydy$$

پس جواب عمومی معادله دیفرانسیل فوق عبارت است از:

$$x^3 + y^2 = c$$

■

### نکته ۱

جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل را در حالت کلی نمی توان به صورت مثال فوق یافت. به کمک قضیه زیر شرط کامل بودن یک معادله دیفرانسیل را در می یابیم.

### قضیه ۱۰.۶

#### شرط لازم و کافی برای کامل بودن یک معادله دیفرانسیل

اگر در معادله (۵) توابع  $M(x, y)$  و  $N(x, y)$  در یک ناحیه  $R$  از صفحه- $xy$  پیوسته و در این ناحیه دارای مشتق های جزئی مرتبه اول پیوسته باشند، آنگاه شرط لازم و کافی برای آن که معادله دیفرانسیل کامل باشد آن است که:

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \quad (۶)$$

#### معادله دیفرانسیل کامل

### مثال ۸

نشان می دهیم که معادلات زیر کامل است و جواب عمومی آنها را می یابیم.

\_\_\_\_\_

$$(y + \cos x)dx + (x + \sin y)dy = 0 \quad \text{(b)} \quad (3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0 \quad \text{(a)}$$

**حل (a):** در معادله فوق داریم:

$$\begin{cases} M(x, y) = 3x^2 + 4xy \\ N(x, y) = 2x^2 + 2y \end{cases} \Rightarrow M_y = 4x = N_x$$

پس معادله دیفرانسل بالا کامل است. برای حل آن به دنبال تابعی مانند  $f(x, y)$  هستیم که

$$df = (3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

از طرفی می دانیم دیفرانسیل تابع دو متغیره  $f(x, y)$  برابر است با:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

از روابط بالا نتیجه می گردد:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$$

لذا برای یافتن تابع  $f(x, y)$  اگر از  $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$  نسبت به  $x$  انتگرال بگیریم داریم:

$$f(x, y) = \int \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int M(x, y) dx = f(x, y) + g(y)$$

اکنون با توجه به این که  $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$  پس داریم:

$$N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (f(x, y) + g(y)) = f'(x, y) + g'(y)$$

از رابطه بالا مقدار  $g'(y)$  و با انتگرال گیری از آن نسبت به  $y$  مقدار  $g(y)$  به دست آمده، بنابراین تابع به دست می آید.

اکنون با توجه به مطالب بالا داریم:

$$f(x, y) = \int M(x, y) dx = \int (3x^2 + 4xy) dx = x^3 + 2x^2y + g(y)$$

اگر از جواب فوق نسبت به  $y$  مشتق بگیریم داریم و آن را با  $N(x, y) = 2x^2 + 2y$  برابر قرار دهیم داریم:

$$2x^2 + 2y = N(x, y) = 2x^2 + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 2y$$

حال با انتگرال گیری نسبت به  $y$  داریم:  $\int g'(y) dy = \int 2y dy$ . پس  $g(y) = y^2$ . در نتیجه جواب عمومی برابر است با:

$$f(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^2 = c$$

**حل (b):** در معادله فوق داریم:

$$\begin{cases} M(x, y) = y + \cos x \\ N(x, y) = x + \sin y \end{cases} \Rightarrow M_y = 1 = N_x$$

پس معادله دیفرانسل بالا کامل است. برای حل آن به دنبال تابعی مانند  $f(x, y)$  هستیم که

$$f(x, y) = \int M(x, y) dx = \int (y + \cos x) dx = xy + \sin x + g(y)$$

اگر از جواب فوق نسبت به  $y$  مشتق بگیریم داریم و آن را با  $N(x, y) = x + \sin y$  برابر قرار دهیم داریم:

$$x + \sin y = N(x, y) = x + g'(y) \Rightarrow g'(y) = \sin y$$

حال با انتگرال گیری نسبت به  $y$  داریم:  $\int g'(y) dy = \int \sin y dy$ . پس  $g(y) = -\cos y$ . در نتیجه جواب عمومی برابر

است با:

$$f(x, y) = xy + \sin x - \cos y = c$$

■



### ■ عامل انتگرال ساز

اگر معادله دیفرانسیل  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  کامل نباشد، گاهی می توان یک تابع غیر صفر  $\mu$  که به  $x$  یا  $y$  یا هر دو بستگی دارد، یافت به طوری که معادله  $\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$  کامل باشد. یعنی  $(\mu M)_y = (\mu N)_x$ . در این صورت تابع  $\mu$  یک عامل انتگرال ساز معادله نامیده می شود.

#### عامل انتگرال ساز

#### مثال ۹

معادله دیفرانسیل  $2ydx + xdy = 0$  کامل نیست، ولی با ضرب  $\mu(x) = x$  معادله کامل می شود. یعنی معادله  $2xydx + x^2dy = 0$  کامل است.

### ■ تعیین عامل انتگرال ساز

اگر در معادله دیفرانسیل  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$  داشته باشیم  $M_y \neq N_x$ ، آنگاه عامل انتگرال ساز را به دو صورت زیر می توان یافت:

$$1- \text{ اگر } g(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \text{ تابعی از } x \text{ باشد آنگاه عامل انتگرال ساز برابر است با: } \mu = e^{\int g(x)dx}$$

$$2- \text{ اگر } h(y) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} \text{ تابعی از } y \text{ باشد آنگاه عامل انتگرال ساز برابر است با: } \mu = e^{\int h(y)dy}$$

#### عامل انتگرال ساز

#### مثال ۱۰

یک عامل انتگرال ساز برای معادلات دیفرانسیل زیر یافته و آنها را به معادلات دیفرانسیل کامل تبدیل می نمایم.

$$(a) : (x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0 \quad (b) : (\sin y + \cos y)dx + 2x \cos ydy = 0$$

**حل (a):** در مثال فوق داریم:  $M(x, y) = x^4 + y^4$  و  $N(x, y) = -xy^3$  که  $N_x = -y^3 \neq N_y = 4y^3$ . همچنین داریم:

$$g(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{4y^3 + y^3}{-xy^3} = -\frac{5}{x}$$

پس عامل انتگرال ساز عبارت است از:

$$\mu(x) = e^{\int g(x)dx} = e^{\int -\frac{5}{x}dx} = e^{-5 \ln|x|} = e^{\ln x^{-5}} = x^{-5}$$

**حل (b):** در مثال فوق داریم:  $M(x, y) = \sin y + \cos y$  و  $N(x, y) = 2x \cos y$  که  $N_x = 2 \cos y \neq N_y = \cos y - \sin y$ . همچنین داریم:

$$h(y) = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{2 \cos y - (\cos y - \sin y)}{\sin y + \cos y} = 1$$

پس عامل انتگرال ساز عبارت است از:

$$\mu(y) = e^{\int h(y)dy} = e^{\int dy} = e^y$$

## معادله دیفرانسل خطی

## تعریف ۶.۶

## معادله دیفرانسل خطی

این معادله در حالت کلی به صورت (۷)  $y' + p(x)y = q(x)$  می باشد که در آن  $p(x)$  و  $q(x)$  توابعی پیوسته از  $x$  می باشند.

در معادله (۷) اگر  $q(x) = 0$  آنگاه معادله دیفرانسل مرتبه اول خطی همگن و در غیر این صورت آن را غیر همگن می نامیم. اگر معادله دیفرانسل مرتبه اول خطی، همگن باشد، یعنی  $y' + p(x)y = 0$  آنگاه این یک معادله جدایی پذیر است لذا جواب عمومی آن به دست می آید. اما اگر غیر همگن باشد آنگاه داریم:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \Rightarrow (p(x)y - q(x))dx + dy = 0$$

و لذا  $g(x) = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{p(x) - 0}{1} = p(x)$  یک عبارت بر حسب  $x$  است. پس عامل انتگرال ساز برابر است با:  $\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int p(x)dx}$ . با ضرب عامل انتگرال ساز در معادله دیفرانسل، یک معادله دیفرانسل کامل حاصل می شود:

$$\mu y' + \mu p(x)y = \mu q(x) \Rightarrow (ye^{\int p(x)dx})' = \mu q(x)$$

پس جواب عمومی برابر است با:

$$(y\mu)' = q(x)\mu \Rightarrow y\mu = \int q(x)\mu dx \Rightarrow y = \frac{1}{\mu} \left( \int q(x)\mu dx + c \right)$$

## معادله دیفرانسل خطی

## مثال ۱۱

جواب عمومی معادله خطی زیر را می یابیم:

$$(a): y' = y + 3x^2 e^x$$

حل (a): با مقایسه این معادله دیفرانسل با (۷) داریم:

$$p(x) = -1$$

$$q(x) = 3x^2 e^x$$

پس عامل انتگرال ساز برابر است با  $\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -dx} = e^{-x}$ . در نتیجه جواب عمومی عبارت است از:

$$y = \frac{1}{\mu} \left( \int q(x)\mu dx + c \right) = \frac{1}{e^{-x}} \left( \int 3x^2 e^x e^{-x} dx + c \right) = \frac{1}{e^{-x}} (x^3 + c)$$

حل (b): ابتدا با تقسیم طرفین معادله فوق بر  $x$  داریم:

$$y' + \frac{y}{x} = 3x$$

اکنون با مقایسه این معادله دیفرانسل با (۷) داریم:

$$p(x) = \frac{1}{x}$$

$$q(x) = 3x$$

پس عامل انتگرال ساز برابر است با  $\mu = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = x$ . در نتیجه جواب عمومی عبارت است از:

$$y = \frac{1}{\mu} \left( \int q(x) \mu dx + c \right) = \frac{1}{x} \left( \int 3x^2 dx + c \right) = x^2 + \frac{c}{x}, x \neq 0$$

### معادله دیفرانسیل برنولی

#### تعریف ۷۶

#### معادله دیفرانسیل برنولی

این معادله در حالت کلی به صورت (۸)  $y' + p(x)y = q(x)y^n$  می باشد که در آن  $p(x)$  و  $q(x)$  توابعی پیوسته از  $x$  می باشند و  $n \in \mathbb{R}$ .

در معادله (۸) اگر  $n = 0$  یا  $n = 1$  آنگاه معادله دیفرانسیل خطی و در غیر این صورت طرفین را بر  $y^n$  تقسیم می کنیم:

$$y' y^{-n} + p(x) y^{1-n} = q(x) \quad (9)$$

اکنون با تغییر متغیر  $y^{1-n} = u$  داریم:

$$(1-n)y' y^{-n} = u' \Rightarrow y' y^{-n} = \frac{u'}{1-n}$$

با جایگذاری در معادله (۹) داریم:

$$u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$$

که یک معادله دیفرانسیل خطی است و آن را حل می کنیم.

#### معادله دیفرانسیل برنولی

#### مثال ۱۲

جواب عمومی معادله  $xy' - \frac{y}{2 \ln x} = y^2$  را می یابیم.

**حل:** با مقایسه معادله فوق با (۸) و تقسیم طرفین معادله بر  $y^2 x$  داریم:

$$y^{-2} y' - \frac{1}{2x \ln x} y^{-1} = \frac{1}{x}$$

اکنون اگر قرار دهیم  $u = y^{-1}$  آنگاه  $u' = -y' y^{-2}$ . لذا معادله با تغییر متغیر گفته شده به صورت خطی زیر در می آید:

$$u' + \frac{1}{2x \ln x} u = -\frac{1}{x}$$

که عامل انتگرال ساز آن برابر است با:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{2x \ln x} dx} = e^{\frac{1}{2} \ln(\ln x)} = (\ln x)^{\frac{1}{2}}$$

پس:

$$\begin{aligned} u &= (\ln x)^{-\frac{1}{2}} \left( \int -\frac{1}{x} (\ln x)^{\frac{1}{2}} dx + c \right) \\ &= -\frac{2}{3} \ln x + c (\ln x)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

در نتیجه جواب عمومی برابر است با:

$$y = \frac{1}{-\frac{2}{3} \ln x + c (\ln x)^{-\frac{1}{2}}}$$

## مجموعه تمرین‌های بخش ۶.۱

۱. (معادله جدایی پذیر) جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{lll} \text{a.} & y' = \frac{1+y^2}{1+x^2} & \text{b.} & yy' = y^2x^3 + y^2x \\ \text{c.} & xy' - \frac{y}{\ln x} = xy^2 & \text{d.} & (1 + \ln x)dx + (1 + \ln y)dy = 0 \\ \text{e.} & xy' = (1-x^2)\cot y & \text{f.} & (x^2+1)yy' = (y^2+1)x \\ \text{g.} & \sqrt{1+x^2}y' = xe^{-y}, y(0)=0 & \text{h.} & y' = xe^{y-x^2}, y(0)=0 \end{array}$$

۲. (معادله همگن) جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{lll} \text{a.} & (x^2+y^2)dy + 2x(x+y)dx = 0 & \text{b.} & xy' = y + \sqrt{x^2+y^2} \\ \text{c.} & (x^3+y^3)dx + 3xy^2dy = 0 & \text{d.} & (\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y})dx + (\sqrt{x-y} - \sqrt{x+y})dy = 0 \\ \text{e.} & (x \tan(\frac{y}{x}) + y)dx - xdy = 0 & \text{f.} & x(x+y)y' = x^2+y^2, y(1)=0 \\ \text{g.} & (x^2+y^2)dx - 2xydy = 0, y(1)=1 \end{array}$$

۳. (معادله کامل) جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{a.} & ye^{xy}dx + (xe^{xy} + 1)dy = 0 \\ \text{b.} & (2x \cos y + 3x^2y)dx + (x^3 - x^2 \sin y - y)dy = 0, y(0) = 2 \\ \text{c.} & (2xy - \tan y)dx + (x^2 - x \sec^2 y)dy = 0 \\ \text{d.} & (3x^2 + y \cos x)dx + (\sin x - 4y^2)dy = 0 \\ \text{e.} & (ye^{xy} - 2y^3)dy + (xe^{xy} - 6xy^2 - 2y)dy = 0, y(4) = 1 \\ \text{f.} & (3x^2 + 4xy)dx + (2x^2 + 2y)dy = 0 \end{array}$$

۴. (عامل انتگرال ساز) هر یک از معادلات زیر، عامل انتگرال سازی دارند که تابعی از  $x$  یا  $y$  می باشد. ابتدا عامل انتگرال ساز را بیابید، سپس جواب عمومی را تعیین کنید.

$$\begin{array}{lll} \text{a.} & 2x(y - e^{-x^2})dx + dy = 0 & \text{b.} & (x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0 \\ \text{c.} & y(x+y)dx + (x+2y-1)dy = 0 & \text{d.} & (3y - 2xe^{-3x})dx + dy = 0 \\ \text{e.} & (y-2x)dx - xdy = 0 & \text{f.} & (y^2 + x^2 + y)dy + xydy = 0 \end{array}$$

۵. (معادله خطی) جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{lll} \text{a.} & xy' + y = \ln x + 1 & \text{b.} & y' + 2xy = xe^{-x^2} \\ \text{c.} & xy' + 2y = 8x^2 & \text{d.} & y' + y \cot x = \frac{1}{\sin x} \\ \text{e.} & (y^2 + x^2)dx - 2xydy = 0 & \text{f.} & y' = y + 3x^2e^x \\ \text{g.} & (1-x^2)y' = xy = x, y(0) = 2 & \text{h.} & (1+x^2)y' = 2xy = -2x, y(0) = -1 \end{array}$$

۶. (معادله برنولی) جواب عمومی معادلات دیفرانسیل زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{a.} & x(1-x^2)y' + (2x^2-1)y = x^3y^2 \\ \text{b.} & xy' - \frac{y}{2\ln x} = y^2 \\ \text{c.} & dy + (4y - 8y^{-3})xdx = 0 \\ \text{d.} & y' + \frac{1}{x}y = -2xy^2 \\ \text{e.} & x(x^2-1)y' - y = x^3y^2, y(2) = -\frac{1}{2} \end{array}$$