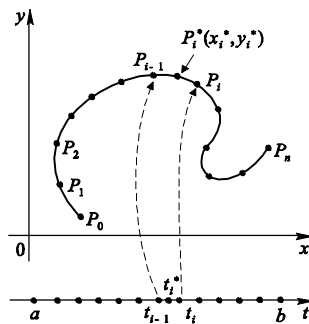


بخش ۵.۵. انتگرال خط و سطح میدان‌های اسکالر

در این بخش انتگرال توابع چند متغیره را در دو جهت دیگر تعمیم می‌دهیم. نخست انتگرال خط که تعمیمی از انتگرال یک گانه می‌باشد را تعریف می‌کنیم، سپس تعریف انتگرال سطح را که تعمیمی از انتگرال دو گانه است ارایه می‌دهیم. این انتگرال‌ها در عمل بسیار مهم هستند و کاربرد وسیعی در محاسبه انتگرال‌های خط و سطح میدان‌های برداری دارند.

انتگرال خط

این انتگرال شبیه به انتگرال یک گانه می‌باشد، با این تفاوت که به جای بازه a, b روی یک منحنی C از تابع چند متغیره f انتگرال می‌گیریم که به انتگرال خط یا به بیانی دقیق‌تر انتگرال خط در امتداد منحنی C نسبت به طول قوس s معروف است. این نوع انتگرال‌ها در هر وضعیت فیزیکی که رفتار یک میدان اسکالر f یا میدان برداری در امتداد یک منحنی مطالعه می‌شود، ظاهر می‌شوند. در این قسمت ابتدا انتگرال خط در صفحه را معرفی می‌نماییم، سپس روند را به فضا گسترش می‌دهیم.



شکل ۱- منحنی انتگرال خط در صفحه

■ انتگرال خط در صفحه

تابع دو متغیره f که دامنه آن شامل منحنی هموار C در صفحه xy ، با معادله پارامتری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b \quad (1)$$

که به صورت برداری $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ نیز نشان داده می‌شود. اگر فاصله a, b را به n زیر فاصله t_{i-1}, t_i تقسیم نماییم، نقاط $P_i(x_i, y_i)$ ، متناظر با $x_i = x(t_i)$ و $y_i = y(t_i)$ منحنی C را به n زیر کمان با طول وترهای $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ تقسیم می‌کنند (شکل ۱). اکنون با انتخاب نقطه‌ای مانند $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$ در زیر کمان i -ام (متناظر با نقطه t_i^* در فاصله t_{i-1}, t_i) مجموع ریمان $\sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$ را تشکیل می‌دهیم، با حدگیری از این مجموع، در صورت وجود حد تعریف انتگرال خط ایجاد می‌شود.

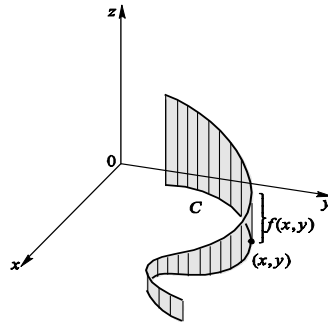
تعریف ۱.۵

انتگرال خط

اگر f یک تابع دو متغیره تعریف شده روی منحنی هموار C با معادله پارامتری (۱) باشد، **انتگرال خط** f در امتداد C در صورت وجود حد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

درست همانند انتگرال یک گانه معمولی، زمانی که تابع مثبت باشد، یعنی $f(x, y) \geq 0$ ، انتگرال خط $\int_C f(x, y) ds$ می تواند مساحت یک طرف دیوار روی منحنی C به ارتفاع $f(x, y)$ در هر نقطه (x, y) باشد (شکل ۲).



شکل ۲- یک تعبیر هندسی از انتگرال خط

■ **محاسبه انتگرال خط** می دانیم طول منحنی C روی بازه $a, t_0 \leq b$ که a, t_0 برابر است با:

$$s_{t_0} = \int_a^{t_0} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

چون $f(x, y)$ روی C عمل می کند، باقرار دادن مختصات پارامتری $x = x(t)$ و $y = y(t)$ در تابع $f(x, y)$ انتگرال خط به صورت یک انتگرال یک گانه زیر درمی آید.

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad (۲)$$

در حالت خاص اگر C پاره خط بین $a, 0$ و $b, 0$ باشد، با انتخاب x به عنوان پارامتر فرمول (۱) به صورت زیر خلاصه می شود.

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x, 0) dx$$

ملاحظه می کنید، که یک انتگرال یک گانه معمولی می باشد. در انتگرال خط میدان برداری انتگرال های خطی که زیاد استفاده می شوند، عبارتند از:

$$\int_C f(x, y) dx, \quad \int_C f(x, y) dy$$

■ **انتگرال خط میدان اسکالر مستقل از جهت منحنی** در حالت کلی صورت پارامتری (۱) یک جهت برای

منحنی C مشخص می کند، که جهت مثبت آن متناظر با افزایش پارامتر t است، به این صورت که به ازای $t = a$ ابتدای منحنی C و به ازای $t = b$ انتهای آن مشخص می شود. به این ترتیب $-C$ منحنی می باشد که، نقاطش همان نقاط C ولی با جهت مخالف آن است. با این جهت گذاری داریم:

$$\int_{-C} f(x, y) dx = -\int_C f(x, y) dx, \quad \int_{-C} f(x, y) dy = -\int_C f(x, y) dy$$

اما اگر انتگرال نسبت به طول کمان باشد، علامت انتگرال خط با عوض شدن جهت منحنی C عوض نمی شود:

$$\int_{-C} f(x, y) ds = \int_C f(x, y) ds$$

چون Δs_i همیشه مثبت است، هر چند که Δx_i و Δy_i با عوض شدن جهت تغییر علامت می دهند.

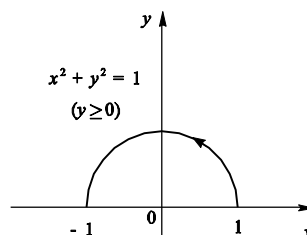
مثال ۱

محاسبه انتگرال خط در صفحه

انتگرال $\int_C 2 + x^2 y \, ds$ را ارزیابی می‌کنیم که C نیمه بالایی دایره $x^2 + y^2 = 1$ می‌باشد.

حل: ابتدا معادله پارامتری نیم دایره بالایی C را می‌نویسیم (شکل ۳).

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$



شکل ۳- انتگرال خط روی نیم دایره بالایی

اکنون با استفاده از فرمول (۲) داریم:

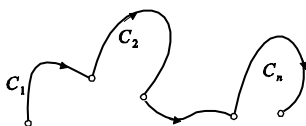
$$\begin{aligned} \int_C 2 + x^2 y \, ds &= \int_0^\pi 2 + \cos^2 t \sin t \sqrt{x'^2 + y'^2} \, dt \\ &= \int_0^\pi 2 + \cos^2 t \sin t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} \, dt \\ &= \int_0^\pi 2 + \cos^2 t \sin t \, dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi \\ &= 2\pi + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

■

■ **انتگرال خط روی منحنی تکه‌ای هموار** اگر مانند شکل (۴)، C یک منحنی تکه‌ای هموار باشد به طوری که

اجتماع منحنی‌های هموار $C_1, C_2, \dots, C_n$ باشد، انتگرال f روی C به صورت مجموع انتگرال‌های f در طول هر تکه منحنی هموار C تعریف می‌شود.

$$\int_C f(x, y) \, ds = \int_{C_1} f(x, y) \, ds + \dots + \int_{C_n} f(x, y) \, ds \quad (3)$$



شکل ۴- منحنی تکه تکه هموار

■ **حالت خاص محاسبه انتگرال خط** اگر منحنی C روی بازه $a \leq x \leq b$ به صورت $y = g(x)$ باشد، انتگرال

(۲) را می‌توان برحسب x پارامتری نمود، که در این صورت داریم:

$$\int_C f(x, y) \, ds = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + g'(x)^2} \, dx \quad (4)$$

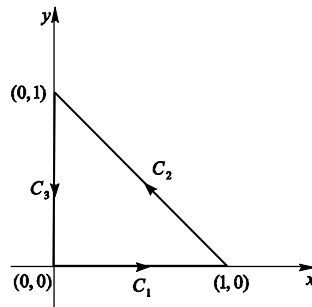
و اگر منحنی با $x = g(y)$ که $c \leq y \leq d$ برحسب y پارامتری شود، داریم:

$$\int_C f(x, y) \, ds = \int_c^d f(g(y), y) \sqrt{g'(y)^2 + 1} \, dy \quad (5)$$

مثال ۲

محاسبه انتگرال خط روی مسیر بسته

انتگرال $\oint_C x + y \, ds$ را که C مثلث شکل (۵) است، محاسبه می‌نماییم.



شکل ۵- مثلث به عنوان یک منحنی بسته

حل: چون مثلث C تکه‌ای هموار بسته از سه تکه خط هموار C_1, C_2, C_3 تشکیل می‌شود، پس از رابطه (۲) داریم:

$$\oint_C x + y \, ds = \int_{C_1} x + y \, ds + \int_{C_2} x + y \, ds + \int_{C_3} x + y \, ds$$

چون روی C_1 ، $y = 0$ با توجه به رابطه (۴)، انتگرال f به انتگرال یک گانه کاهش می‌یابد، یعنی:

$$\int_{C_1} x + y \, ds = \int_0^1 x + 0 \, \sqrt{1+0} \, dx = \frac{1}{2}$$

به همین ترتیب انتگرال f روی C_3 ، چون $x = 0$ به انتگرال یک گانه روی محور $-y$ ، ولی از $y = 1$ به $y = 0$ کاهش می‌یابد.

$$\int_{C_3} x + y \, ds = \int_1^0 0 + y \, \sqrt{0+1} \, dy = -\frac{1}{2}$$

ولی انتگرال روی مرز C_2 را می‌توان بر حسب x ، بر حسب y یا بر حسب یک پارامتر سوم t ، پارامتری نمود:

$$y = t, \quad x = -t + 1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

که با این عمل داریم:

$$\int_{C_2} x + y \, ds = \int_0^1 t - t + 1 \, \sqrt{-1^2 + 1^2} \, dt = 1$$

پس جواب نهایی به صورت زیر است.

$$\oint_C x + y \, ds = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1$$

■

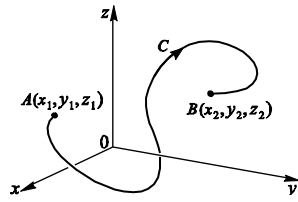
■ انتگرال خط در فضای $\mathbb{R}^3$

فرض کنید که C یک منحنی هموار در فضای $\mathbb{R}^3$ با معادله پارامتری:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad a \leq t \leq b$$

یا با معادله برداری، معادل $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ باشد (شکل ۶). اگر f یک تابع پیوسته سه متغیره در ناحیه‌ای

شامل C باشد. **انتگرال خط f در امتداد C** به طریق مشابه منحنی مسطح تعریف می‌شود:

شکل ۶- یک منحنی در فضای $\mathbb{R}^3$

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta s_i$$

با فرمول مشابه با فرمول (۲) آن را ارزیابی می‌کنیم:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \quad (۶)$$

در حالت کلی و فرمول‌های انتگرال‌های (۲) و (۶) را می‌توان به صورت برداری فشرده‌تر زیر نوشت:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) |\mathbf{r}'(t)| dt \quad (۷)$$

که برای حالت خاص $f = 1$ ، از فصل (۱) به یاد آورید، طول منحنی C به دست می‌آید:

$$L = \int_C ds = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt$$

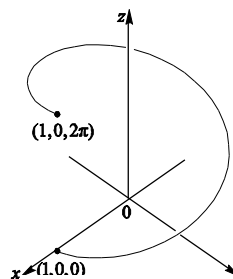
اگر همانند شکل (۴) در فضا، C یک منحنی تکه‌ای هموار باشد به طوری که اجتماع منحنی‌های هموار $C_1, C_2, \dots, C_n$ باشد، انتگرال f روی C به صورت مجموع انتگرال‌های f در طول هر تکه منحنی هموار C مشابه (۳) تعریف می‌شود.

محاسبه انتگرال خط روی منحنی در فضا

مثال ۳

انتگرال $\int_C y \sin z ds$ را که C یک مارپیچ فنی با معادله پارامتری زیر است ارزیابی می‌کنیم.

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



شکل ۷- یک دور از منحنی مارپیچ

در فضای $\mathbb{R}^3$

حل: شکل (۷) منحنی را نشان می‌دهد با توجه به فرمول (۶) داریم:

$$\begin{aligned} \int_C y \sin z ds &= \int_0^{2\pi} \sin t \cdot \sin t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} 2\pi \sin^2 t dt \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt = \sqrt{2}\pi
 \end{aligned}$$

■

انتگرال سطح

در این بخش به بحث انتگرال سطح می‌پردازیم. انتگرال سطح را می‌توان مشابه دوبعدی انتگرال خط دانست، که در آن ناحیه انتگرال‌گیری به جای منحنی C سطح هموار S در فضا است. سطح یا رویه‌های فضایی در فصل اول به صورت دکارتی معرفی شده‌اند.

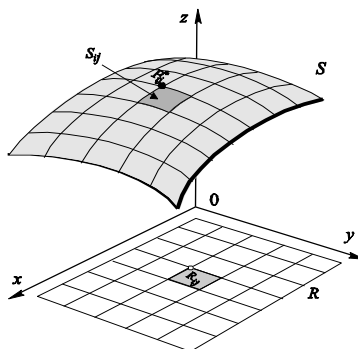
اکنون فرض کنید $w = f(x, y, z)$ یک تابع تعریف شده پیوسته روی ناحیه‌ای از فضا شامل سطح همواری با معادله صریح $z = g(x, y)$ ، ضمنی $G(x, y, z) = 0$ یا پارامتری زیر باشد:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}, \quad u, v \in R \quad (۸)$$

در ساده‌ترین حالت فرض می‌نماییم که R یک ناحیه مستطیلی باشد که به زیر مستطیل‌های R_{ij} با مساحت ΔA_{ij} افراز شده باشد. متناظر با این افراز، سطح S نیز به سطوح S_{ij} با مساحت $\Delta \sigma_{ij}$ افراز می‌شوند (شکل ۸). اکنون مجموع ریمان زیر را تشکیل می‌دهیم،

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_{ij}^*, y_{ij}^*, z_{ij}^*) \Delta \sigma_{ij}$$

که در آن $(x_{ij}^*, y_{ij}^*, z_{ij}^*)$ یک نقطه از المان سطح S_{ij} می‌باشد. اکنون می‌توان همانند صورت حدی برای تعریف انتگرال دوگانه، انتگرال سطح تعریف می‌شود.



شکل ۸- افراز سطح با المان‌های سطحی

تعریف ۲.۵

انتگرال سطح

فرض کنید f یک تابع سه متغیره تعریف شده روی سطح هموار S با معادله پارامتری (۱) باشد، انتگرال سطح f روی S در صورت وجود حد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*, z_{ij}^*) \Delta \sigma_{ij} \quad (۹)$$

زمانی که سطح بسته باشد، برای تاکید بر بسته بودن سطح، می‌توان از علامت دایره روی علامت انتگرال سطح به صورت $\oiint_S f(x,y,z) d\sigma$ استفاده نمود.

■ محاسبه انتگرال سطح

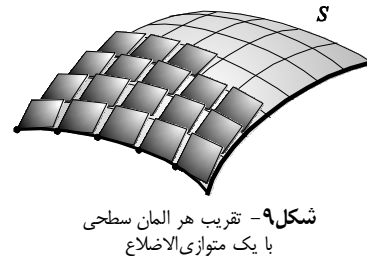
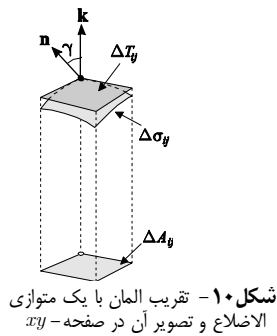
همانطور که انتگرال خط به یک انتگرال یک گانه معمولی کاهش می‌یابد، اکنون می‌خواهیم انتگرال سطح را به یک انتگرال دو گانه کاهش دهیم. مطابق شکل (۹) بدیهی است که با تقسیم بندی ظریف تر رویه S ، هر زیر سطح S_{ij} با یک متوازی الاضلاع T_{ij} تقریب زده می‌شود. با توجه به شکل (۱۰)، اگر γ زاویه بین بردار متعارف $\mathbf{k}$ و بردار $\mathbf{n}$ عمود بر سطح متوازی الاضلاع T_{ij} رویه S باشد، با توجه به ضرب داخلی داریم:

$$\cos \gamma = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{k}|} \quad (10)$$

از این رابطه نتیجه می‌شود:

$$\Delta A_{ij} = \Delta T_{ij} |\cos \gamma| \quad (11)$$

رابطه (۱۱) را گاهی اصل کسینوسی مساحت می‌نامند.



این اصل بیان می‌کند، اگر ناحیه S در یک صفحه روی ناحیه R که با صفحه اول زاویه γ می‌سازد تصویر شود، مساحت R ، $|\cos \gamma|$ برابر مساحت S است. به این ترتیب با قرار دادن $\Delta \sigma_{ij} \simeq \Delta T_{ij} = \frac{\Delta A_{ij}}{|\cos \gamma|}$ در رابطه (۹) انتگرال به صورت زیر در می‌آید:

$$\iint_S f(x,y,z) d\sigma = \iint_R F(x,y) \frac{dA}{|\cos \gamma|} \quad (12)$$

که در آن $F(x,y)$ با جایگزینی z از معادله سطح در $f(x,y,z)$ ایجاد شده است. ناحیه R نیز تصویر سطح S در صفحه xy است. در حالت کلی تر همانند روند انتگرال دو گانه برای ناحیه غیر مستطیلی D نیز رابطه (۱۲) برقرار است. با توجه به نوع معادله رویه (ضمنی، صریح یا پارامتری)، ارزیابی انتگرال (۱۲) در حالت کلی را می‌توان به سه طریق زیر انجام داد.

۱ روش ضمنی اگر رویه S به صورت ضمنی $G(x,y,z) = 0$ معرفی شود:

$$\mathbf{n} = \nabla G = G_x \mathbf{i} + G_y \mathbf{j} + G_z \mathbf{k}$$

از (۱۰) داریم:

$$\frac{1}{|\cos \gamma|} = \frac{|\nabla G|}{|G_z|}$$

پس انتگرال (۱۲)، به صورت زیر در می‌آید:

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y) \frac{\sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}}{|G_z|} dA \quad (13)$$

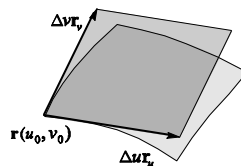
② **روش صریح** اگر S به صورت صریح ارایه شده باشد، یعنی $z - g(x, y) = 0$ داریم:

$$\mathbf{n} = \nabla G = -g_x \mathbf{i} - g_y \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

بنابراین از رابطه (۱۲) نتیجه می شود:

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y) \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1} dA \quad (14)$$

③ **روش پارامتری** در این حالت می توان ضلع های زیر سطح S_{ij} را با بردارهای تقریبی $\Delta u \mathbf{r}_u^*$ و $\Delta v \mathbf{r}_v^*$ تقریب زد (شکل ۱۱).



شکل ۱۱- تقریب المان با یک متوازی الاضلاع

بنابراین مساحت متوازی الاضلاع حاصل شده یک تقریب برای مساحت زیر سطح S_{ij} می باشد، یعنی:

$$|(\Delta u \mathbf{r}_u^*) \times (\Delta v \mathbf{r}_v^*)| = |\mathbf{r}_u^* \times \mathbf{r}_v^*| \Delta u \Delta v$$

با این تعبیر محاسبه انتگرال (۹) به صورت زیر در می آید:

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dA \quad (15)$$

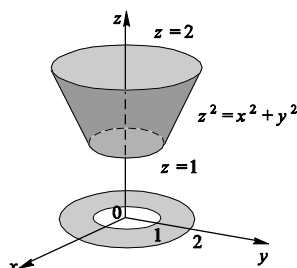
که در آن D یک ناحیه در صفحه uv است. اگر معادله ضمنی $g(x, y, z) = c$ و معادله صریح $y = f(x, y)$ پارامتری شوند، معادله (۱۳) و (۱۴) به صورت حالت خاص از (۱۵) در می آیند.

محاسبه انتگرال سطح

مثال ۴

انتگرال $\iint_S x^2 + y^2 + z^2 d\sigma$ را ارزیابی می کنیم، که S قسمتی از مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ که توسط صفحات $z = 1$ و $z = 2$ جدا شده است.

حل: رویه S و تصویر آن D در شکل (۱۲) آمده است.



شکل ۱۲ - سطح مخروط محدود به دو صفحه $z = 2$ و $z = 1$

اگر از صورت صریح استفاده کنیم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

که با توجه به فرمول (۱۴) داریم:

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 + y^2 + z^2 \, d\sigma &= \\ &= \iint_D x^2 + y^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} \, dA \\ &= 2\sqrt{2} \iint_D x^2 + y^2 \, dA, \end{aligned}$$

که با توجه به مختصات قطبی نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^3 \, dr = 2\pi \left(4 - \frac{1}{4} \right) = 15\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

نکته ۱

اگر در انتگرال سطح (۱۲)، $f = 1$ باشد، حاصل ارزیابی مساحت سطح رویه S می‌باشد.

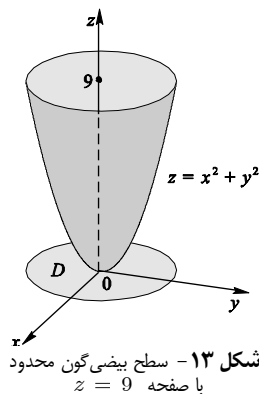
$$\text{مساحت } S = \iint_S d\sigma \quad (۱۶)$$

محاسبه سطح رویه

مثال ۵

مساحت قسمتی از سهمی گون $z = x^2 + y^2$ که توسط صفحه $z = 9$ بریده می‌شود را محاسبه می‌کنیم.

حل: مطابق شکل (۱۳) ناحیه ایجاد شده بالای دیسک D با معادله $x^2 + y^2 \leq 9$ قرار دارد.



شکل ۱۳ - سطح بیضی گون محدود با صفحه $z = 9$

لذا با توجه به (۱۳) داریم:

$$\begin{aligned} S &= \iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dA \\ &= \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dA \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \sqrt{1+4r^2} \, r dr = \frac{\pi}{6} 37\sqrt{37} + 1$$

■

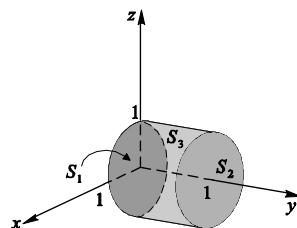
ارزیابی انتگرال روی سطح بسته

مثال ۶

انتگرال $\iint_S x^2 + z^2 \, d\sigma$ که S سطح بسته توسط استوانه $x^2 + z^2 = 1$ و صفحات $y = 0$ و $y = 1$ باشد، را محاسبه

می‌نماییم.

حل: با توجه به شکل (۱۴) سطح، یک سطح بسته است که اجتماع سه سطح S_1 ، S_2 و S_3 می‌باشد.



شکل ۱۴ - سطح استوانه محدود
با صفحه $y = 0$ و $y = 1$

پس:

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 + z^2 \, d\sigma &= \\ \iint_{S_1} x^2 + z^2 \, d\sigma + \iint_{S_2} x^2 + z^2 \, d\sigma + \iint_{S_3} x^2 + z^2 \, d\sigma \end{aligned}$$

چون سطح‌های S_1 و S_2 هر دو دایره مسطح می‌باشند، پس انتگرال سطح همان انتگرال دوگانه است.

$$\iint_{S_1} x^2 + z^2 \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r dr d\theta = \frac{2}{3} \pi$$

$$\iint_{S_2} x^2 + z^2 \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r dr d\theta = \frac{2}{3} \pi$$

سطح S_3 را نمی‌توان، در صفحه xz تصویر نمود. چون نتیجه دایره $x^2 + z^2 = 1$ می‌باشد به عبارت دیگر سطح با منحنی تپاه می‌شود. تصویر در صفحات xy و yz نیز یک به یک نمی‌باشد، که در این حالت یا باید به دو سطح تقسیم شود، یا این که از معادله پارامتری استفاده شود. در اینجا با انتخاب مختصات استوانه‌ای داریم:

$$x = r \cos \theta, \quad z = r \sin \theta, \quad y = y, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < \theta \leq 2\pi$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ -r \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{vmatrix} = |r \mathbf{j}| = r$$

پس:

$$\iint_{S_3} x^2 + z^2 \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r dr d\theta = \frac{2}{3} \pi$$

در نتیجه داریم:

$$\oiint_S x^2 + z^2 \, d\sigma = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi$$

■

انتگرال‌های چندگانه با CAS

برای محاسبه انتگرال چندگانه می‌توان از دستور انتگرال یک گانه به طور متوالی استفاده نمود.

(در *Maple*)

> int int x^2 + y^2, x, y ;

$$\frac{1}{3}x^3y + \frac{1}{3}y^3x$$

برای انتگرال سه گانه از دستور int سه بار استفاده می‌شود. در بسته student دستورات مستقیم برای محاسبه انتگرال دو و سه گانه موجود است.

(در *Maple*)

> with student

> Doubleint x^2 + y^2, x = -1..2, y = 0..3 ;

$$\int_{-1}^2 \int_0^3 x^2 + y^2 dx dy$$

> value %

$$36$$

> Tripleint(x * y * z, z = x * y..x + y, y = x..3 * x, x = 0..2);

$$\int_0^2 \int_x^{3x} \int_{xy}^{x+y} xyz dz dy dx$$

> value %

$$-\frac{896}{9}$$

(در *Mathematica*)

Integrate x^2 + y^2, x, -1, 2 , y, 0, 3

$$36$$

Integrate[x * y * z, x, 0, 2 , y, x, 3x , z, x * y, x + y]

$$-\frac{896}{9}$$

مجموعه تمرین‌های بخش ۵.۵

۱. (انتگرال خط در صفحه) انتگرال خط $\int_C f(x,y)ds$ را برای تابع و منحنی متناظر داده شده در هر یک از حالت‌های زیر محاسبه کنید.

a. $f(x,y) = ye^{-x}$ و C منحنی با معادله پارامتری زیر است:

$$x = \ln(t^2 + 1), \quad y = 2 \arctan t - t, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{3}$$

b. $f(x,y) = x + y^2$ و C پاره خط واصل بین نقطه $(0,0)$ و $(1,1)$.

c. $f(x,y) = \frac{1}{(2y^2+1)^{3/2}}$ و C سهمی حاصل از تقاطع دو رویه $z^2 = x^2 + y^2$ و $x + z = 1$ باشد.

راهنمایی: $y = t$ را پارامتر در نظر بگیرید.

d. $f(x,y) = xy$ و C قوسی است از هذلولی با بردار وضعیت زیر:

$$\mathbf{r} = a \cosh t \mathbf{i} + a \sinh t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq t_0$$

e. $f(x,y) = x^2 + y^2$ و منحنی C با معادله پارامتری زیر.

$$\begin{aligned} x &= a \cos t + t \sin t \\ y &= a \sin t - t \cos t \end{aligned}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

f. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ و C دایره $x^2 + y^2 = ax$ می‌باشد.

۲. (انتگرال خط در فضا) انتگرال‌های خط نوع اول زیر را در طول منحنی‌های فضایی داده شده حساب کنید.

a. $\int_C \frac{z^2}{x^2 + y^2} ds$ که در آن C بخشی از مارپیچ زیر است.

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

b. $\int_C x^2 + y^2 + z^2 ds$ که در آن C بخشی از مارپیچ با تابع برداری زیر است.

$$\mathbf{r} = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + bt \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

c. $\int_C x^2 ds$ که در آن C دایره روبرو است: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x + y + z = 0$

۳. (انتگرال سطح) هر یک از انتگرال‌های زیر را روی سطح داده شده محاسبه کنید.

a. $\iint_S x + y + z d\sigma$ که S بر بخشی از $2x + 2y + z = 2$ در یک هشتم اول واقع است.

b. $\iint_S \ln z d\sigma$ که S بخشی از سطح مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ است که $1 \leq z \leq 2$ است.

c. $\iint_S xz d\sigma$ که S بخشی از سطح $z = x^2$ واقع در یک هشتم اول و داخل سهمی گون $z = 1 - 3x^2 - y^2$ است.

d. $\iint_S x d\sigma$ که S بخشی از استوانه $z = x^2/2$ واقع در درون استوانه $x^2 + y^2 = 1$ است.

e. $\iiint_S x + y + z d\sigma$ که در آن S سطح مکعب $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$ است.

۴. (مساحت سطوح) در هر یک از تمرین‌های زیر مساحت رویه مشخص شده را بیابید.

a. ناحیه حاصل از قطع صفحه $x + y + z = 1$ به وسیله استوانه $x^2 + y^2 = 1$.

b. رویه‌ای که صفحه $y = 0$ از سهمی گون $x^2 + y + z^2 = 1$ جدا می‌کند (راهنمایی: رویه را بر صفحه xz تصویر کنید).

c. آن قسمت از سطح مخروطی $z^2 = x^2 + y^2$ که بین دو صفحه $z = 0$ و $x + 2z = 3$ قرار دارند.

d. بخشی از رویه $z = xy$ که داخل استوانه $x^2 + y^2 = 1$ واقع است.