

بخش ۵. کاربرد انتگرال در محاسبه مساحت سطح و حجم

① تعیین مساحت

مساحت ناحیه $\mathbb{R}$ از محور xy که انتگرال روی آن تعریف شده برابر است با:

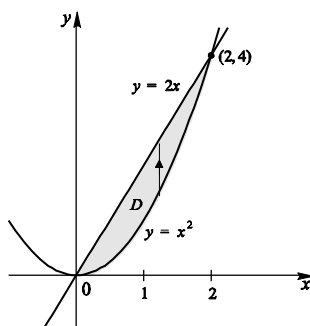
$$S = \iint_R 1 dx dy \quad (1)$$

محاسبه مساحت ناحیه مسطح

مثال ۱

مساحت ناحیه $\mathbb{R}$ که به سهمی $y = x^2$ و خط $y = 2x$ محدود است را می یابیم.

حل: ناحیه $\mathbb{R}$ یک ناحیه مسطح در صفحه xy می باشد. پس ابتدا نقاط تقاطع را می یابیم:



شکل ۱- سطح مسطح بین دو منحنی

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x = 0, 2$$

سپس مساحت ناحیه $\mathbb{R}$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$S = \iint_R 1 dx dy = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} dy dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{4}{3}$$

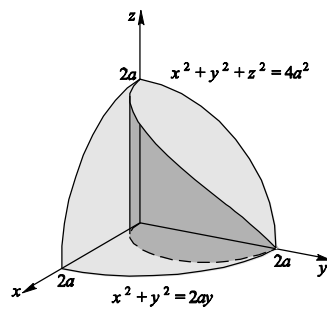
■

محاسبه مساحت ناحیه غیر مسطح

مثال ۲

مساحت قسمتی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ واقع در $1/8$ اول مختصات که توسط استوانه $x^2 + y^2 = 2y$ جدا شده را می یابیم.

حل: سطح مورد نظر در شکل (۲) نشان داده شده است. پس داریم:



شکل ۲- سطح غیر مسطح یک تیکه از کره که با استوانه در ناحیه اول قطع شده است

$$|R| = \int_R d\mathbf{x} = \iint_S d\sigma$$

$$= \iint_D \frac{4}{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dA$$

که به کمک مختصات قطبی داریم :

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\sin\theta} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{4-r^2}}$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} 2 - \sqrt{4-4\sin^2\theta} d\theta = 4 \frac{\pi}{2} - 1 .$$

■

۲ تعیین حجم

انتگرال دوگانه تابع $z = f(x, y)$ در ناحیه D ، حجم استوانه ای است که محور دوران محور z - واقع بین $z = f(x, y)$ و D از صفحه xy - می باشد:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (۲)$$

محاسبه حجم به کمک انتگرال دوگانه

مثال ۳

حجم منشوری که به وسیله محورهای مختصات و صفحه $x + y + z = 1$ تولید می گردد را می یابیم.

حل: با توجه به رابطه (۲) داریم:

$$V = \iint_D z dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y) dy dx$$

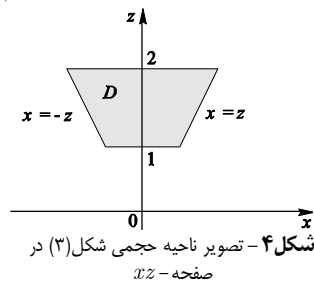
$$= \int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{6}$$

■

محاسبه حجم به کمک انتگرال دو گانه

مثال ۴

حجم حادث بین مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ و صفحات $z = 1$ و $z = 2$ را به کمک انتگرال دو گانه می یابیم.
حل: شکل (۹) را ببینید، با توجه به رابطه (۹) با این تفاوت که محور داخل حجم y باشد، بنابراین داریم:



$$\begin{aligned} V \text{ حجم} &= \iint_D [\sqrt{z^2 - x^2} - (-\sqrt{z^2 - x^2})] dA \\ &= 2 \int_1^2 \int_{-z}^z \sqrt{z^2 - x^2} dx dz \\ &= 4 \int_1^2 \int_0^z \sqrt{z^2 - x^2} dx dz \\ &= 4\pi \int_1^2 z^2 dz = \frac{7\pi}{3} \end{aligned}$$

■

محاسبه حجم قسمتی از رویه

مثال ۵

حجم زیر رویه $x^2 + 2y^2 + z = 16$ محدود به صفحات $x = 2$ و $y = 2$ و محوره‌های مختصات را می یابیم.
حل: با توجه به رابطه (۲) داریم:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D z dy dx = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) dy dx \\ &= \int_0^2 (16y - x^2y - \frac{2}{3}y^3) \Big|_0^2 dx = 48 \end{aligned}$$

■

محاسبه حجم قسمتی از رویه

مثال ۶

حجم زیر رویه $z = \frac{1}{x+y}$ و بالای ناحیه از صفحه xy که محصور بین خطوط $x = 1$ ، $x = 2$ ، $y = 0$ و $y = x$ است را می یابیم.

حل: با توجه به رابطه (۲) داریم:

$$V = \iint_D z dy dx = \int_1^2 \int_0^x \frac{1}{x+y} dy dx = \int_1^2 \ln(x+y) \Big|_0^x dx$$

$$= \int_1^2 (\ln 2x - \ln x) dx = \int_1^2 \ln 2 dx = \ln 2$$

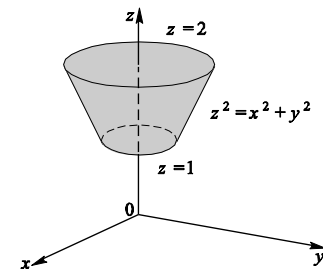
■

محاسبه حجم با انتگرال سه گانه

مثال ۲

حجم محدود بین استوانه های $x^2 + y^2 = a^2$ و $x^2 + z^2 = a^2$ را در $1/8$ اول در فضا می یابیم.

حل: اندازه ناحیه با توجه به اینکه یک ناحیه حجمی می باشد برابر است با:



شکل ۳- ناحیه حجمی قسمتی از مخروط که توسط دو صفحه محدود شده است

$$\begin{aligned} V \text{ حجم} \iiint_E dV &= \iint_D \left(\int_a^{\sqrt{a^2-x^2}} dz \right) dA \\ &= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (\sqrt{a^2-x^2} - 0) dy dx \\ &= \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{16a^3}{3} \end{aligned}$$

■

مجموعه تمرین‌های بخش ۵.۴

۱. (محاسبه سطح مسطح با انتگرال دوگانه) با انتگرال دوگانه مساحت ناحیه مشخص شده را به دست آورید.

a. ناحیه بین هذلولی $xy = 1$ و صفحات $y = x$ و $x = e$.

b. ناحیه بین دایره $x^2 + y^2 = 1$ و بیضی $x^2 + 2y^2 = 1$.

c. ناحیه بین خط $x + y = \frac{5}{2}$ و هذلولی $xy = 1$.

۲. (محاسبه مساحت در مختصات قطبی) مساحت محدود به منحنی‌های زیر را به دست آورید.

a. ناحیه بین دایره $r = 1$ و حلزونی $r = 2 + \cos \theta$.

b. ناحیه بین دایره $r = a \cos \theta$ و دلواری $r = a(1 + \cos \theta)$.

c. $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - 3xy^2)$.

۳. (محاسبه حجم با انتگرال دوگانه) با انتگرال دوگانه حجم ناحیه محدود به منحنی‌های زیر را به دست آورید.

a. ناحیه بین مخروط $z^2 = xy$ و صفحه $x + y = 4$.

b. ناحیه بین مخروط $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = (z - 2)^2$ و صفحه $z = 0$.

c. ناحیه زیر سطح $z = x^2y$ بالای مثلثی با رؤس $(1, 0)$ ؛ $(2, 1)$ و $(4, 1)$ واقع در صفحه xy .

۴. (محاسبه حجم در مختصات قطبی) حجم محدود به منحنی‌های زیر را به دست آورید.

a. ناحیه بین استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ و صفحه $y = z$ در $\frac{1}{8}$ اول.

b. ناحیه بین کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ و استوانه $x^2 + y^2 = 2ay$.

۵. (محاسبه حجم با انتگرال سه گانه) با انتگرال سه گانه حجم محدود به منحنی‌های زیر را به دست آورید.

a. ناحیه بین سهمی گون دوار $z = 1 + x^2 + y^2$ و سهمی گون بیضوی $z = 4 - 2x^2 - 11y^2$.

b. ناحیه بین استوانه سهموی $z = \frac{1}{2}y^2$ و صفحات $z = 0$ و $x + z = 2$.

c. ناحیه بین مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ و استوانه $z = x^2 + y^2$.

۶. (حجم در مختصات استوانه ای یا کروی) حجم محدود به سطوح زیر را با استفاده از مختصات استوانه ای یا کروی به دست آورید.

a. $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$, $x^2 + y^2 \leq z^2$

b. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (x^2 + y^2 - z^2)$

c. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$