

بخش ۵. ۲ تعویض ترتیب انتگرال گیری

اگر در محاسبه یک انتگرال مکرر، انتگرال جزئی اول یک تابع غیر مقدماتی مانند $\int \frac{\sin x}{x} dx$ ، $\int \sin x^2 dx$ ، $\int e^{y^2} dy$ و غیره باشد، شانس خود را با تعویض ترتیب انتگرال گیری امتحان می‌نماییم.

محاسبه انتگرال دوگانه با تعویض اجباری ترتیب

مثال ۱

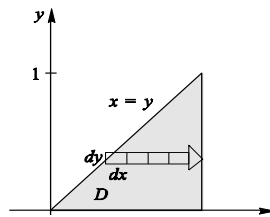
انتگرال مکرر $\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy$ را ارزیابی می‌کنیم.

حل: اگر بخواهیم انتگرال را با همین ترتیب مشخص شده ارزیابی کنیم، محاسبه تابع اولیه $\int e^{x^2} dx$ غیر ممکن است، هرچند انتگرال موجود است. بنابراین سعی می‌کنیم ابتدا ناحیه D را از روی کران انتگرال داده شده بیابیم (شکل ۱). یعنی یک گام به عقب برگردیم:

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2} dx dy = \iint_D e^{x^2} dA,$$

به طوری که:

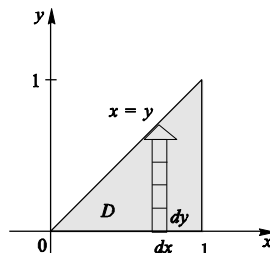
$$D = \{x, y \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\} = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$$



شکل ۱ - انتگرال با ناحیه نوع اول

اکنون برای تعویض ترتیب انتگرال، جهت حرکت را مطابق شکل (۲) تنظیم می‌نماییم:

$$D = \{x, y \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$



شکل ۲ - انتگرال با ناحیه نوع دوم

این ما را قادر می‌سازد که مطابق فرمول (۴) برای ناحیه اول عمل کنیم.

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x^2} dA &= \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} dy dx \\ &= \int_0^1 \left[y e^{x^2} \Big|_0^x \right] dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e - 1 \end{aligned}$$

محاسبه انتگرال دوگانه با تعویض اجباری ترتیب

مثال ۲

انتگرال های زیر را محاسبه می نماییم:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy dx \quad \text{b.}$$

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 \cos x^2 dx dy \quad \text{a.}$$

حل (a):

$$\int_0^1 \int_{2y}^2 \cos x^2 dx dy = \iint_D \cos x^2 dA$$

به طوری که:

$$D = \{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 2y \leq x \leq 2 \} = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \frac{x}{2} \leq 1 \right\}$$

پس با تعویض ترتیب انتگرال گیری داریم:

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{x}{2} \right\} \quad \text{و}$$

$$\begin{aligned} \iint_D \cos x^2 dA &= \int_0^2 \int_0^{\frac{x}{2}} \cos x^2 dy dx = \int_0^1 \left[y \cos x^2 \right]_0^{\frac{x}{2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x \cos x^2 dx = \frac{1}{4} \sin 1 \end{aligned}$$

حل (b):

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy dx = \iint_D e^{y^3} dA$$

که در آن:

$$D = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1 \} = \{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq y^2 \leq 1 \}$$

اکنون با تعویض ترتیب انتگرال گیری داریم:

$$D = \{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2 \} \quad \text{و}$$

$$\begin{aligned} \iint_D e^{y^3} dA &= \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{y^3} dx dy = \int_0^1 \left[x e^{y^3} \right]_0^{y^2} dy \\ &= \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy = \frac{1}{3} (e - 1) \end{aligned}$$

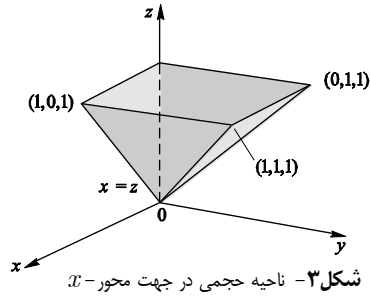
تعویض ترتیب انتگرال سه گانه

مثال ۳

انتگرال $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^z f(x, y, z) dx dz dy$ را با ترتیب $dy dz dx$ می نویسیم.

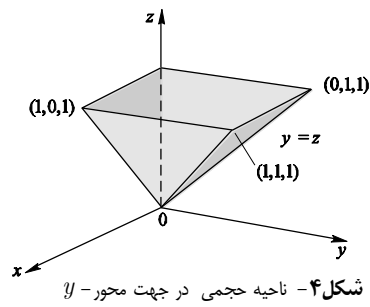
حل: با توجه به شکل (۳)، ناحیه مورد نظر به صورت زیر است:

$$E = \{x, y, z \mid y, z \in D_1, 0 \leq x \leq z\}$$



که D_1 مثلث $0 \leq y \leq 1$ و $y \leq z \leq 1$ است. اکنون برای تعویض ترتیب انتگرال ناحیه را به صورت شکل (۴) نشان می دهیم که:

$$E = \{x, y, z \mid x, z \in D_2, 0 \leq y \leq z\}$$



که D_2 مثلث $0 \leq x \leq 1$ و $x \leq z \leq 1$ است. بنابراین انتگرال با ترتیب مورد نظر به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\int_0^1 \int_x^1 \int_0^z f(x, y, z) dy dz dx$$

■

مجموعه تمرین‌های بخش ۵.۲

۱. (تعویض اجباری ترتیب) انتگرال‌های زیر را به این ترتیب محاسبه کنید که با معکوس کردن ترتیب انتگرال‌گیری انتگرال معادلی بیابید و سپس از آن انتگرال بگیرید.

$$\text{a. } \int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy dx \quad \text{b. } \int_0^1 \int_{2y}^2 \cos(x^2) dx dy$$

$$\text{c. } \int_0^8 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{dy dx}{y^5 + 1} \quad \text{d. } \int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y} dx dy$$

$$\text{e. } \int_0^1 \int_{e^x}^e \frac{1}{\ln y} dy dx \quad \text{f. } \int_0^1 \int_{e^y}^e \frac{x}{\ln x} dx dy$$

$$\text{g. } \int_0^6 \int_{x/3}^2 x \sqrt{1+y^3} dy dx \quad \text{h. } \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy dx$$

۲. (تعویض ترتیب انتگرال سه گانه با الویت y) در هر حالت، ناحیه انتگرال‌گیری R را رسم کرده، تصویرش را بر صفحه xy - نشان دهید. سپس انتگرال سه گانه را به صورت یک یا چند انتگرال مکرر که اولین انتگرال‌گیری نسبت به y باشد بیان دارید.

$$\text{a. } \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[\int_0^{x+y} f(x, y, z) dz \right] dy \right) dx$$

$$\text{b. } \int_0^1 \left(\int_0^1 \left[\int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \right] dy \right) dx$$

۳. (تعویض ترتیب انتگرال سه گانه) دامنه انتگرال‌گیری انتگرال‌های زیر را رسم کنید. سپس این انتگرال‌ها را به صورت یک انتگرال مکرر معادل با ترتیب دیگر بنویسید.

$$\text{a. } \int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 \int_0^{1-y} dz dy dx$$

$$\text{b. } \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) dz dy dx$$

۴. (ارزیابی انتگرال‌ها با هر دو ترتیب) انتگرال‌های زیر را ابتدا با ترتیب مشخص شده محاسبه نمایید سپس با تعویض نیز حل نمایید.

$$\text{a. } \int_1^2 \int_0^\pi y \sin(xy) dx dy \quad \text{b. } \int_1^2 \int_{1/x}^x \frac{x}{y^2} dy dx$$