

حساب انتگرال توابع چند متغیره

۱.۵ انتگرال های چند گانه

۲.۵ تعویض ترتیب انتگرال گیری

۳.۵ تغییر متغیر در انتگرال های چند گانه

۴.۵ کاربرد انتگرال در محاسبه سطح و حجم

۵.۵ انتگرال خط و سطح میدان های اسکالر

مقدمه

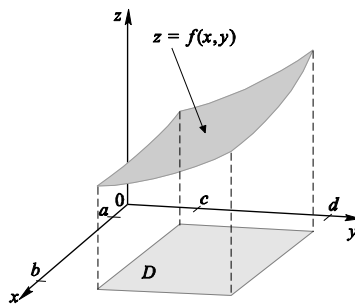
در این فصل با انتگرال توابع چند متغیره بر ناحیه های محصور در دامنه تعریف آن تابع آشنا می شویم. انتگرال چند گانه مشابه انتگرالهای معمولی توابع حقیقی یک متغیره تعریف می شوند. انتگرالهای چند گانه کاربردهای گسترده ای نسبت به انتگرالهای معمولی دارند. در این فصل ضمن تعریف انتگرالهای چند گانه، روش محاسبه آنها را در مختصات قطبی و دکارتی و استوانه ای و کروی مطرح کرده و کاربرد آنها را برای محاسبه مساحت و حجم ناحیه های مختلف بررسی می کنیم.

بخش ۵. ۱ انتگرال های چندگانه

حجم و انتگرال دوگانه

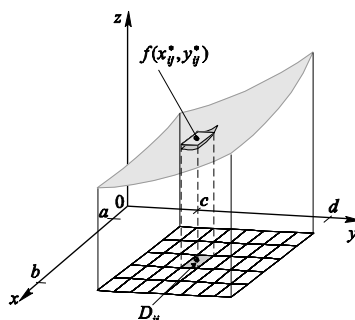
همان طوری که به بهانه محاسبه مساحت، اغلب تعریف انتگرال معین یگانه بنا می شود، در اینجا قصد داریم به بهانه محاسبه حجم یک جسم، به تعریف انتگرال دوگانه پردازیم. فرض کنید V حجم ناحیه محدود به مستطیل D و رویه $z = f(x, y)$ که برای هر (x, y) از D ، $f(x, y) \geq 0$ باشد. (شکل ۱) هدف ما محاسبه حجم V است:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$



شکل ۱- حجم بین رویه $z = f(x, y)$ و مستطیل D

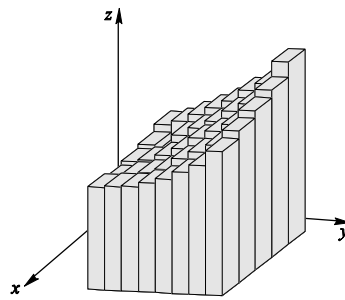
با خطوط موازی محور x و محور y ، مستطیل D را به مستطیل های کوچک تقسیم می کنیم، یعنی بازه a, b را به m زیربازه x_{i-1}, x_i با طول ثابت $\Delta x = (b-a)/m$ و به طور مشابه فاصله c, d را به n زیربازه y_{j-1}, y_j با طول ثابت $\Delta y = (d-c)/n$ تقسیم می کنیم. هر یک از مستطیل های حاصل با مساحت $\Delta A = \Delta x \Delta y$ را با D_{ij} نمایش می دهیم. اکنون با اختیار نقطه نمونه دلخواه (x_i^*, y_j^*) از D_{ij} می توان بخشی از حجم محدود به مستطیل D_{ij} و رویه $z = f(x, y)$ را تقریب زد. همانطور که در شکل (۲) دیده می شود، حجم مکعب مستطیل حاصل از امتداد سطح مستطیل D_{ij} در راستای محور z عبارت است از $f(x_i^*, y_j^*) \Delta A$.



شکل ۲- حجم یک مکعب مستطیل

همان طور که در شکل (۳) نمایش داده شده است حجم V را می توان با مجموع ریمان دوگانه زیر تقریب نمود.

$$V \simeq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A \quad (1)$$



شکل ۳- مجموع ریمان

با افزایش تعداد تقسیمات، مجموع طرف راست تقریب (۱) به حجم واقعی نزدیک‌تر می‌شود. اکنون تعریف انتگرال دوگانه روی مستطیل را بر اساس مطالب ذکر شده بیان می‌نماییم.

تعریف ۱.۵

انتگرال دوگانه

انتگرال دوگانه f روی ناحیه مستطیلی D در صورت وجود حد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A \quad (2)$$

اگر نقطه دلخواه (x_i^*, y_j^*) در D_{ij} را گوشه طرف راست بالای D_{ij} ، یعنی x_i, y_j در نظر بگیریم آنگاه انتگرال دوگانه f روی ناحیه مستطیلی D به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(x_i, y_j) \Delta A \quad (3)$$

در صورت پیوستگی f روی ناحیه D حد مذکور همواره موجود است.

انتگرال دوگانه روی ناحیه‌ها

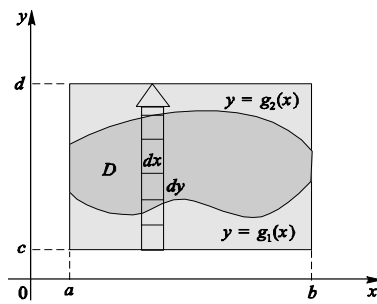
① ناحیه نوع اول

ناحیه D از $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر نوع اول نامیده می‌شود، که x و g_1 و x و g_2 در بازه a, b پیوسته هستند. (شکل ۴)

$$D = \{x, y \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

لذا داریم:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx \quad (4)$$



شکل ۴- ناحیه نوع اول

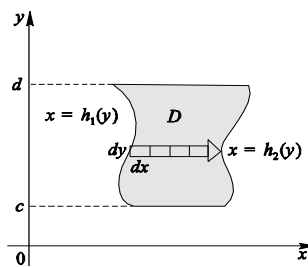
② ناحیه نوع دوم

ناحیه D از نوع دوم به صورت زیر تعریف می شود، که در آن $y = h_1(y)$ و $y = h_2(y)$ توابع پیوسته روی بازه c, d می باشند. (شکل ۵)

$$D = \{x, y \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

پس:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy \quad (5)$$



شکل ۵- ناحیه نوع دوم

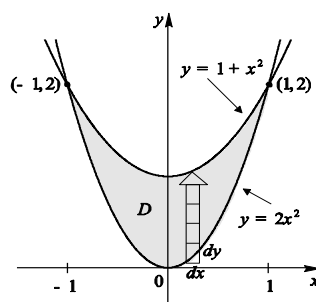
برای سادگی زمانی که انتگرال دوگانه را روی ناحیه نوع اول یا دوم محاسبه می نمایم به ترتیب یک المان یا پیکان در جهت محور y یا محور x برای مشخص شدن منحنی ورودی و منحنی خروجی در نظر می گیریم. همچنین محدوده حرکت این المان یا پیکان با کران های انتگرال دوم مشخص می شود.

محاسبه انتگرال دوگانه روی ناحیه نوع اول

مثال ۱

مقدار $\iint_D x + 2y dA$ که D ناحیه محدود بین منحنی $y = 1 + x^2$ و $y = 2x^2$ می باشد را محاسبه میکنیم.

حل: با توجه به شکل (۶) واضح است که D ناحیه نوع اول است.



شکل ۶- ناحیه نوع اول

دو منحنی که ناحیه D را تشکیل می‌دهند در نقاط $1, 2$ و $-1, 2$ متقاطع هستند، زیرا:

$$\begin{cases} y = 1 + x^2 \\ y = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow 1 + x^2 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

بنابراین از رابطه (۴) داریم:

$$\begin{aligned} \iint_D x + 2y \, dA &= \int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} x + 2y \, dy dx \\ &= \int_{-1}^1 xy + y^2 \Big|_{2x^2}^{1+x^2} dx = \frac{32}{15} \end{aligned}$$

■

انتگرال‌های مکرر

با استفاده از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و روش‌های انتگرال‌گیری، محاسبه انتگرال یگانه ساده می‌گردد، انتگرال دوگانه را می‌توان به دو انتگرال یگانه جزیی با انتگرال مکرر محاسبه نمود.

فرض کنید تابع دو متغیره f روی مستطیل $D = a, b \times c, d$ پیوسته باشد. در انتگرال‌گیری جزیی نسبت به متغیر y با فرض ثابت بودن x ، حاصل انتگرال تابعی از x است، یعنی:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy \quad (۶)$$

با انتگرال‌گیری مجدد نسبت به x ، انتگرال مکرر حاصل می‌شود، یعنی:

$$\int_a^b A(x) \, dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy dx \quad (۷)$$

انتگرال مکرر دیگر یعنی $\int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy$ را می‌توان به طور مشابه به دست آورد.

مثال ۲ محاسبه انتگرال‌های مکرر

انتگرال‌های مکرر زیر را محاسبه می‌کنیم.

$$\int_1^2 \int_0^3 x^2 y \, dx dy \quad (a) \qquad \int_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy dx \quad (b)$$

حل: (a): انتگرال جزیی، ابتدا نسبت به x سپس نسبت به y می‌باشد، یعنی:

$$\int_1^2 \left[\int_0^3 x^2 y \, dx \right] dy = \int_1^2 \left. \frac{1}{3} x^3 y \right|_{x=0}^{x=3} dy = \int_1^2 9y \, dy = \frac{27}{2}$$

(b): در این قسمت ترتیب عکس قسمت (a) می‌باشد.

$$\int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y \, dy \right] dx = \int_0^3 \left. \frac{1}{2} x^2 y^2 \right|_{y=1}^2 dx = \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 \, dx = \frac{27}{2}$$

■

با توجه به مثال اخیر به نظر می‌رسد که ترتیب انتگرال‌گیری جزیی تأثیری روی جواب ندارد، ولی این نیز همانند مشتق‌های جزیی همواره برقرار نمی‌باشد. قضیه زیر یک شرط برقراری آن را بیان می‌نماید.

قضیه ۱.۵ قضیه فوبینی

اگر f روی مستطیل $D = a, b \times c, d$ پیوسته باشد آنگاه :

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \quad (۸)$$

محاسبه انتگرال دو گانه با ترتیب مناسب تر

مثال ۳

اگر $D = 1, 2 \times 0, \pi$ ، انتگرال زیر را محاسبه می نماییم:

$$\iint_D y \sin xy dA$$

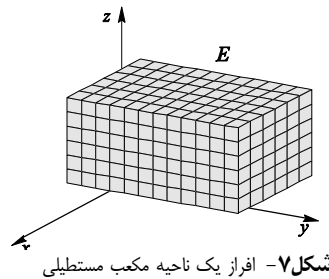
حل : اگر نخست نسبت به y انتگرال بگیریم، نیاز به روش جزء به جزء است، بنابراین برای سادگی و با استفاده از قضیه فوبینی (۹) ابتدا نسبت به x انتگرال می گیریم، یعنی :

$$\begin{aligned} \iint_D y \sin xy dx dy &= \int_0^\pi \int_1^2 y \sin xy dx dy \\ &= \int_0^\pi -\cos xy \Big|_1^2 dy \\ &= \int_0^\pi -\cos 2y + \cos y dy = 0 \end{aligned}$$

انتگرال سه گانه و بالاتر

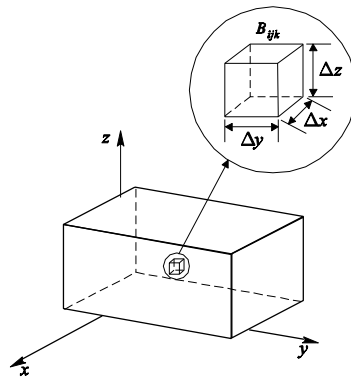
همانند تعریف انتگرال یک گانه برای توابع یک متغیره روی یک بازه، انتگرال دو گانه برای توابع دو متغیره روی یک ناحیه در صفحه مختصات، تعریف انتگرال سه گانه برای توابع سه متغیره روی یک ناحیه حجمی در فضا می باشد. ابتدا ساده ترین حالت که f روی یک ناحیه مکعبی E تعریف شده است را در نظر می گیریم.

$$E = \{x, y, z \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$



شکل ۷- افراز یک ناحیه مکعب مستطیلی

مکعب را به $N = l \times m \times n$ زیر مکعب تقسیم می نماییم، که این عمل با تقسیم بازه a, b به l زیر بازه x_{i-1}, x_i با طول Δx ، بازه c, d به m زیر بازه y_{j-1}, y_j با طول Δy و بازه r, s به n زیر بازه z_{k-1}, z_k با طول Δz انجام می شود، که هر زیر مکعب دارای حجم $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ است (شکل ۷). اگر (x_i^*, y_j^*, z_k^*) یک نقطه نمونه از زیر مکعب E_{ijk} باشد (شکل ۸)، انتگرال سه گانه را به صورت حد مجموع ریمان سه گانه به صورت زیر تعریف می نماییم.



شکل ۸- یک المان از ناحیه مکعب مستطیلی

تعریف ۲.۵

انتگرال سه گانه روی یک مستطیل

انتگرال سه گانه f روی مکعب E در صورت وجود حد به صورت زیر تعریف می شود:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \Delta V \quad (9)$$

مجدد تأکید می کنیم که اگر $f(x, y, z)$ یک تابع پیوسته باشد، حد فوق وجود دارد. همچنین برای بعضی از توابع ناپیوسته نیز انتگرال موجود است.

نقطه نمونه می تواند هر نقطه از زیرمکعب باشد. اگر این نقاط سمت راست، بالا و روبه جلو یعنی x_i, y_j, z_k انتخاب شود، فرمول (۹) ساده تر می شود.

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \lim_{l, m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n f(x_i, y_j, z_k) \Delta V$$

در اینجا نیز قضیه فوینی یک روش عملی برای محاسبه انتگرال، با صورت زیر می باشد.

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz \quad (10)$$

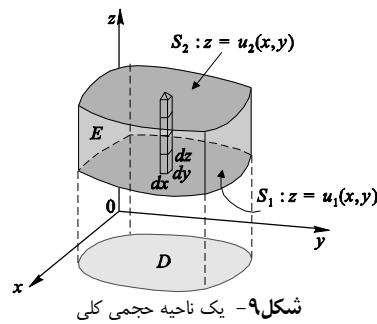
با این فرض که $f(x, y, z)$ روی ناحیه مکعبی E پیوسته باشد. پنج حالت دیگر از انتگرال های مکرر برای ارزیابی انتگرال سه گانه همانند (۱۰) با عوض نمودن ترتیب انتگرال گیری وجود دارد، که همگی با هم معادل می شوند.

محاسبه انتگرال سه گانه مکرر روی مکعب مستطیل

مثال ۴

انتگرال $\iiint_B xyz^2 dV$ را روی مکعب $B = 0,1 \times -1,2 \times 0,3$ ارزیابی می کنیم.

حل : به شش طریق می توان انتگرال را محاسبه نمود. ما ابتدا نسبت به x ، در بازه $0,1$ سپس نسبت به y در بازه $-1,2$ و در نهایت نسبت به z در بازه $0,3$ به ارزیابی انتگرال های جزیی فوق می پردازیم:



$$\begin{aligned}
 \iiint_B xyz^2 dV &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \int_0^1 xyz^2 dx dz \\
 &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \left[\frac{x^2 y z^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} dy dz \\
 &= \int_0^3 \int_{-1}^2 \frac{y z^2}{2} dy dz = \int_0^3 \left[\frac{y^2 z^2}{4} \right]_{y=-1}^{y=2} dz \\
 &= \int_0^3 \frac{3z^2}{4} dz = \left[\frac{z^3}{4} \right]_0^3 = \frac{27}{4}
 \end{aligned}$$

■

■ **انتگرال سه گانه روی ناحیه کلی** اکنون انتگرال سه گانه را روی ناحیه کلی کراندار E در فضا را معرفی می نماییم. همانند انتگرال دوگانه ناحیه E را در یک مکعب B محاط می کنیم که F یک تابع تعریف شده در مکعب B باشد به طوری که F روی E برابر f و خارج آن برابر صفر باشد. در این حالت:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iiint_B F(x, y, z) dV$$

برای ارزیابی عملی این نوع انتگرال نیز با این فرض که E یک ناحیه از نوع یک باشد، یعنی:

$$E = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in D, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y) \}$$

که در آن u_1 و u_2 روی ناحیه D که تصویر E در صفحه xy است، پیوسته می باشند. در این حالت مطابق شکل (۹) انتگرال به صورت:

$$\iiint_E f(x, y, z) dV = \iint_D \left[\int_{z=u_1(x,y)}^{z=u_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dA \quad (11)$$

در می آید، که بعد از محاسبه انتگرال در جهت محور z به یک انتگرال دوگانه روی ناحیه D کاهش می یابد، که با اطلاعات حاصل از بخش قبلی قابل ارزیابی است.

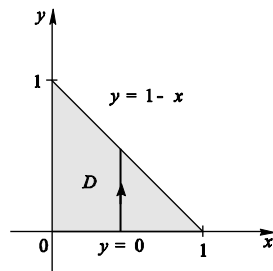
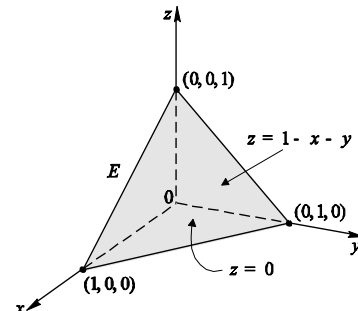
ارزیابی انتگرال سه گانه روی یک ناحیه کلی

مثال ۵

انتگرال $\iiint_E z dV$ را به یک انتگرال دوگانه کاهش می دهیم که E ناحیه بین صفحات مختصات و صفحه $x + y + z = 1$ است.

حل: مطابق شکل (۱۰) ناحیه یک هرم تولید شده با صفحات داده شده است. اگر به عنوان یک ناحیه از نوع یک در فضا در نظر گرفته شود، تصویر آن در صفحه xy مثلث D است (شکل ۱۱):

$$\begin{aligned}\iiint_E z \, dV &= \iint_D \int_{z=0}^{z=1-x-y} z \, dz \, dA \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2} (1-x-y)^2 \, dy \, dx = \frac{1}{24}\end{aligned}$$

شکل ۱۱- تصویر ناحیه هرمی در صفحه- xy 

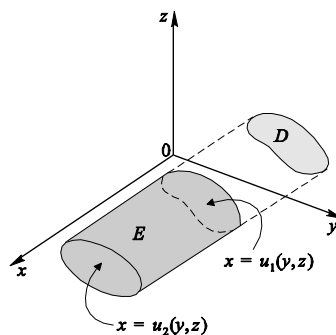
شکل ۱۰- ناحیه حجمی هرمی

■ **ناحیه نوع دوم و سوم** در فضا یک ناحیه E از نوع دوم است، اگر به صورت زیر باشد:

$$E = \{x, y, z \mid y, z \in D, v_1(y, z) \leq x \leq v_2(y, z)\}$$

که v_1 و v_2 روی ناحیه D (تصویر E در صفحه- yz) پیوسته اند (شکل ۱۲) در این حالت داریم:

$$\iiint_E f(x, y, z) \, dV = \iint_D \left[\int_{x=v_1(y,z)}^{x=v_2(y,z)} f(x, y, z) \, dx \right] dA.$$



شکل ۱۲- ناحیه حجمی نوع دوم

خیلی سریع به یک انتگرال دوگانه در صفحه- yz روی ناحیه D (تصویر E) کاهش می‌یابد. به عهده خواننده که ناحیه نوع سوم را معرفی کند و ارزیابی انتگرال روی آن را بررسی کند.

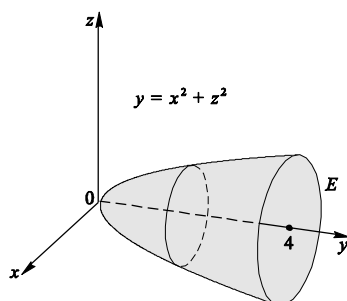
کاهش انتگرال سه‌گانه به دوگانه در ناحیه نوع سوم

مثال ۶

انتگرال $\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} \, dV$ را که E ناحیه محدود به سهمی‌گون $y = x^2 + z^2$ و صفحه $y = 4$ می‌باشد، را به یک انتگرال دوگانه کاهش می‌دهیم.

حل: ناحیه محدود در شکل (۱۳) نشان داده شده است. اگر به عنوان یک ناحیه نوع سوم به آن نگاه کنیم، تصویر آن در صفحه- xz داخل و روی دایره $x^2 + z^2 = 4$ است. با توجه به انتخاب ناحیه نوع سوم، ورود در همه نقاط سهمی‌گون $y = x^2 + z^2$ و خروجی آن صفحه $y = 4$ است. پس داریم:

$$\begin{aligned}\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2} dV &= \iint_D \left[\int_{y=x^2+z^2}^{y=4} \sqrt{x^2 + z^2} dy \right] dA \\ &= \iint_D (4 - x^2 - z^2) \sqrt{x^2 + z^2} dA .\end{aligned}$$



شکل ۱۳- ناحیه حجمی نوع سوم

این انتگرال را می توانید با تغییر به مختصات قطبی (بخش بعدی) به آسانی ارزیابی نمایید.

■

مجموعه تمرین‌های بخش ۵.۱

۱. (محاسبه انتگرال دوگانه) انتگرال‌های دوگانه زیر را محاسبه کنید.

a. $\iint_D (x+y) dx dy$ که در آن D حوزه‌ای است محدود به منحنی $x^2 + y^2 = x + y$

b. $\iint_R \frac{xy^2}{x^2+1} dA$ که در آن $R: \begin{cases} -3 \leq y \leq 3 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

c. $\iint_R xye^{x^2y} dA$ که در آن $R: \begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

d. $\iint_R x \cos y dA$ که در آن R ناحیه واقع در ربع اول زیر منحنی $y = 1 - x^2$

۲. انتگرال‌های دوگانه زیر را حساب کنید.

a. $\iint_D e^{x+y} dx dy$ ، که در آن $D = \{x, y \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

b. $\iint_D x^2 y^2 dx dy$ ، که در آن D بخش کراندار ربع اول واقع بین دو هذلولی $xy = 1$ و $xy = 2$ و دو خط مستقیم $y = x$ و $y = 4x$ است.

c. $\iint_D xy dA$ که D ناحیه محصور به $y^2 = x^3$ و $y = x$ است.

d. $\iint_D y dA$ که D ناحیه واقع در یک چهارم اول و بالای $xy = 1$ ، $y = x$ و زیر $y = 2$ است.

e. $\iint_D x^2 + y^2^{\frac{3}{2}} dA$ که D ناحیه واقع در یک چهارم اول و محصور به خطوط $y = 0$ و $y = \sqrt{3}x$ و دایره $x^2 + y^2 = 9$ است.

۳. (تبدیل انتگرال یگانه به دوگانه) انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید (راهنمایی: انتگرالده را به صورت یک انتگرال بنویسید)

a. $\int_0^2 \tan^{-1} \pi x - \tan^{-1} x dx$ b. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$

c. $\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} \pi x - \tan^{-1} x}{x} dx$ d. $\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx$

۴. انتگرال‌های سه‌گانه زیر را محاسبه کنید.

a. $\iiint_E 6xy dV$ که E واقع در زیر صفحه $z = 1 + x + y$ و بالای ناحیه محصور بین منحنی‌های $y = 0$ ، $x = 1$ و $y = \sqrt{x}$ در صفحه xy است.

b. $\iiint_E xy dV$ که E چهار وجهی بارتوس $0,0,0$ و $0,1,0$ و $2,1,0$ و $0,1,1$ است.

c. $\iiint_E z dV$ که E ناحیه محصور در استوانه $y^2 + z^2 = 9$ و صفحات $x = 0$ و $y = 3x$ و $z = 0$ واقع در یک هشتم اول است.

d. $\iiint_E dV$ که E ناحیه محصور در استوانه $x = y^2$ و صفحات $z = 0$ و $x + z = 1$ است.

e. $\iiint_R \sin(\pi y^3) dV$ که ناحیه R هرمی بارتوس $0,0,0$ ، $0,1,0$ ، $1,1,0$ ، $1,1,1$ و $0,1,1$ است.

f. $\iiint_R \frac{1}{x+y+z^3} dV$ که R ناحیه محصور به صفحات $z = 1$ ، $z = 2$ ، $y = 0$ ، $y = z$ ، $x = 0$ و $x = y + z$ است.

g. $\iiint_R y dV$ که R بخشی از ناحیه داخل مکعب $0 \leq x, y, z \leq 1$ واقع در بالای صفحه $y + z = 1$ و پایین صفحه $x + y + z = 2$ است.

h. $\iiint_E x^2 z dV$ که $E = \{x, y, z \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x, 0 \leq z \leq x\}$

i. انتگرال $\iiint_R dx dy dz$ را محاسبه کنید، که در آن R جسم محدود به سطح $z = x^2 + y^2$ و سه صفحه مختصات و صفحه $x + y = 1$ است

j. $\iiint_E z dV$ که E ناحیه محصور به صفحات $y = 0$ و $z = 0$ و $x + y = 2$ و استوانه $y^2 + z^2 = 1$ واقع در یک هشتم اول مختصات است.