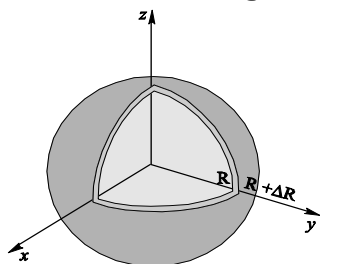


بخش ۲.۴ مشتق های جزئی

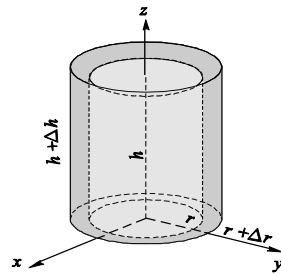
مشتق تابع حقیقی f در نقطه x_0 ، آهنگ تغییرات تابع f در نقطه x_0 را به دست می دهد. مشتق های توابع چند متغیره نسبت به تابع یک متغیره، متنوع تر و جالب ترند، زیرا متغیرها می توانند به طریق مختلف بر یکدیگر اثر گذارند.

مطابق شکل (۱) حجم کره ای به شعاع R را که به صورت تابع یک متغیره $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ معرفی شده است، در نظر بگیرید. به یاد آورید که آهنگ تغییرات حجم V با مقایسه آن با حجم جدید که با یک تغییر ناچیز ΔR در شعاع R ایجاد شده است، زمانی که $\Delta R \rightarrow 0$ مساحت سطح کره به شعاع R یعنی $S = 4\pi R^2$ می باشد. یعنی اگر حجم کره در حال تغییر تحت تأثیر تغییر شعاع کره باشد، میزان تغییرات به اندازه مساحت سطح کره می باشد.



شکل ۱- تغییر هندسی اینکه مشتق حجم کره مساحت سطح جانبی آن است

حال تابع حجم استوانه را به صورت یک تابع دو متغیره $V(r, h) = \pi r^2 h$ بر حسب شعاع r و ارتفاع h در نظر بگیرید (شکل ۲). اگر حجم در حال تغییر باشد، میزان تأثیر تنها با تغییر r ، تنها با تغییر h یا اینکه با تغییرات r و h با هم چیست؟ در ادامه به اینها خواهیم پرداخت.



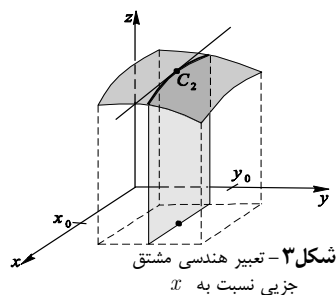
شکل ۲- تغییر هندسی تغییرات حجم استوانه نسبت به شعاع و ارتفاع

مشتق جزئی

به یاد آورید که تعبیر هندسی مشتق تابع یک متغیره $y = f(x)$ در نقطه x_0 ، همان ضریب زاویه خط مماس بر منحنی در نقطه $(x_0, f(x_0))$ می باشد. اکنون فرض کنید، یک نقطه از دامنه تابع دو متغیره $z = f(x, y)$ باشد، محل تقاطع صفحه $y = y_0$ با رویه $z = f(x, y)$ طبق شکل (۳) منحنی $z = f(x, y_0)$ است، مشتق $z = f(x, y_0)$ نسبت به x در x_0 طبق معمول مقدار حد زیر در صورت وجود می باشد:

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

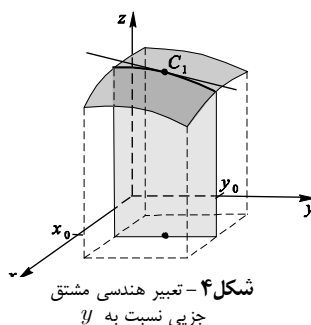
که مشتق جزئی f نسبت به x در نقطه (x_0, y_0) نامیده می شود. با تعبیر هندسی همان ضریب زاویه خط مماس بر منحنی $z = f(x, y_0)$ در نقطه (x_0, y_0) است. و با نمادهای $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ، $D_1 f(x_0, y_0)$ یا $f_x(x_0, y_0)$ نیز نمایش داده می شود.



به همین ترتیب **مشتق جزئی f نسبت به y** در نقطه x_0, y_0 با ثابت گرفتن $x = x_0$ و تعیین مشتق معمولی در نقطه y_0 از تابع $z = f(x_0, y)$ تعریف می‌شود.

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

و بانمادهای $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ، $D_2 f(x_0, y_0)$ یا $f_y(x_0, y_0)$ نیز نمایش داده می‌شود. مطابق شکل (۴) تعبیر هندسی این مشتق نیز ضریب زاویه منحنی حاصل از تقاطع رویه $z = f(x, y)$ با صفحه $x = x_0$ در نقطه x_0, y_0 است.



اکنون به طور خلاصه مشتقات جزئی توابع دو متغیره را تعریف می‌نماییم.

تعریف ۲.۴

مشتق‌های جزئی توابع دو متغیره

برای تابع دو متغیره $z = f(x, y)$ ، مشتق‌های جزئی توابع f_x و f_y هستند، که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}, \quad (1)$$

$$f_y(x, y) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} \quad (2)$$

ارزیابی این مشتق‌های جزئی مرتبه اول در نقطه (x_0, y_0) به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \quad , \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} = f_y(x_0, y_0)$$

اکنون با این نمادگذاری از مشتق می‌توان آهنگ تغییرات حجم استوانه $V(r, h) = \pi r^2 h$ را نسبت به شعاع r و ارتفاع h زمانی که $r = 1$ و $h = 2$ است، محاسبه نمود.

$$V_{r \ 1,2} = 2\pi r h \Big|_{1,2} = 4\pi \quad , \quad V_{h \ 1,2} = 2\pi r \Big|_{1,2} = 2\pi$$

ملاحظه کنید، در این حالت خاص آهنگ تغییرات در جهت شعاع سریعتر از ارتفاع می باشد، چون نسبت به شعاع حجم با مساحت سطح جانبی استوانه در هر لحظه تغییر می یابد. ولی نسبت به ارتفاع حجم به اندازه مساحت دایره قاعده استوانه در هر لحظه تغییر می کند.

مثال ۱ تعیین و ارزیابی مشتق جزئی مرتبه اول

فرض کنید $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$ ، با استفاده از تعریف ۴.۴، $f_x(1, 1)$ و $f_y(1, 1)$ را می یابیم.

حل: با توجه به فرمول های مشتق معمولی (زمانی که نسبت به x مشتق جزئی می گیریم y ثابت است):

$$f_x(x, y) = -2x,$$

بنابراین $f_x(1, 1) = -2$ به همین ترتیب داریم:

$$f_y(x, y) = 4y \Rightarrow f_y(1, 1) = 4y \Big|_{1,1} = 4$$

مثال ۲ محاسبه مشتق جزئی مرتبه اول با کمک تعریف

مقادیر $f_x(0, y)$ و $f_y(x, 0)$ را می یابیم، وقتی که:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x, y \neq 0, 0 \\ 0 & , \quad x, y = 0, 0 \end{cases}$$

حل: اگر $y \neq 0$ باشد، طبق رابطه (۱):

$$\begin{aligned} f_x(0, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0 \end{aligned}$$

حال اگر $y = 0$ باشد، داریم:

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

بنابراین برای هر y ، $f_x(0, y) = 0$. به همین ترتیب برای محاسبه $f_y(x, 0)$ اگر $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f_y(x, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(x, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 1 \end{aligned}$$

ولی اگر $x = 0$ نتیجه می شود:

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0$$

بنابراین داریم:

$$f_y(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

■ مشتق جزئی توابع بیش از دو متغیر مشتق جزئی یک تابع n متغیره حقیقی مشابه یک تابع دو متغیره حقیقی،

نسبت به هر متغیر آن قابل تعریف است. یعنی برای محاسبه مشتق جزئی تابع با ضابطه $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ نسبت به متغیر i -ام آن کافی است، بقیه متغیرها ثابت فرض شوند، و فقط نسبت به متغیر i -ام مشتق معمولی گرفته شود.

درستی تساوی به کمک مشتق جزئی تابع دو متغیره

مثال ۳

$$(a) \quad \text{اگر } f(x, y) = xy \tan\left(\frac{y}{x}\right) \text{، آنگاه ثابت می کنیم: } xf_x + yf_y = 2f(x, y)$$

حل (a): برای محاسبه f_x ، متغیر y را به عنوان ثابت در نظر می گیریم، اکنون با مشتق گیری معمولی نسبت به x داریم:

$$f_x = y \tan\left(\frac{y}{x}\right) + xy\left(\frac{-y}{x^2}\right)(1 + \tan^2\left(\frac{y}{x}\right))$$

لذا:

$$xf_x = xy \tan\left(\frac{y}{x}\right) - y^2(1 + \tan^2\left(\frac{y}{x}\right))$$

به همین ترتیب برای محاسبه f_y ، متغیر x را به عنوان ثابت در نظر می گیریم و با مشتق گیری نسبت به y داریم:

$$f_y = x \tan\left(\frac{y}{x}\right) + xy\left(\frac{1}{x}\right)(1 + \tan^2\left(\frac{y}{x}\right))$$

بنابراین:

$$yf_y = xy \tan\left(\frac{y}{x}\right) + y^2(1 + \tan^2\left(\frac{y}{x}\right))$$

اکنون خواهیم داشت:

$$xf_x + yf_y = 2xy \tan\left(\frac{y}{x}\right) = 2f(x, y)$$

$$(b) \quad \text{اگر } z = \frac{1}{x^2 + y^2} \text{، آنگاه نشان می دهیم: } x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = -2z$$

حل (b): ابتدا متغیر y را ثابت فرض کرده و مشتق معمولی نسبت به متغیر x می گیریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow x \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

به همین ترتیب متغیر x را ثابت فرض کرده و مشتق معمولی نسبت به y می گیریم:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y}{(x^2 + y^2)^2} \Rightarrow y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

اکنون با جمع آنها خواهیم داشت:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = -2 \frac{1}{x^2 + y^2} = -2z$$

■

■ مشتق‌های جزئی مراتب بالا

همانطور که ملاحظه نمودید، یک تابع n متغیره دارای n مشتق جزئی مرتبه اول است، این مشتق‌های جزئی خود توابعی n

متغیره حقیقی‌اند که مشتق‌های جزئی آنها در صورت وجود **مشتقات جزئی مرتبه دوم** تابع نامیده می‌شوند.

به همین ترتیب مشتق‌های جزئی مراتب بالاتر نیز تعریف می‌شوند. در مورد تابع دو متغیره، چهار مشتق جزئی مرتبه دوم وجود

دارد که به صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$f_{xx} = f_{x \ x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = f_{x \ y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f_{yy} = f_{y \ y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f_{yx} = f_{y \ x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

توجه شود که نماد f_{xy} (یا $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$) به این معنی است که ابتدا نسبت به x سپس از نتیجه نسبت به y مشتق جزئی گرفته می شود.

مثال ۴

محاسبه مشتق های جزئی مرتبه دوم

فرض کنید $f(x, y) = x^4 + x^3y^2 - y^3$ ، مشتق های جزئی مرتبه دوم را می یابیم.

حل: با توجه به تعریف مشتق های جزئی مرتبه اول داریم:

$$f_{x \ x}, y = 4x^3 + 3x^2y^2, \quad f_{y \ x}, y = 2x^3y - 3y^2$$

بنابراین:

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (4x^3 + 3x^2y^2) = 12x^2 + 6xy^2, \quad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} (4x^3 + 3x^2y^2) = 6x^2y$$

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} (2x^3y - 3y^2) = 2x^3 - 6y, \quad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} (2x^3y - 3y^2) = 6x^2y$$

■ ترتیب مشتق های جزئی

هر چند در مثال (۴) رابطه $f_{xy} = f_{yx}$ در تمام نقاط برقرار است. توجه داشته باشید که این موضوع در حالت کلی برقرار نمی باشد، بلکه تحت شرایط خاصی برقرار است. مثال زیر دلیلی بر این ادعا می باشد.

مثال ۵

اهمیت ترتیب مشتق های جزئی

برای تابع f با ضابطه زیر، نشان می دهیم $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & x, y \neq 0, 0 \\ 0, & x, y = 0, 0 \end{cases}$$

حل: با توجه به تعریف مشتق جزئی می توان نشان داد که:

$$f_{x \ 0}, y = -y, \quad f_{y \ x}, 0 = x$$

بنابراین داریم:

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_{x \ 0}, 0 + k - f_{x \ 0}, 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k - 0}{k} = -1,$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{y \ 0} + h, 0 - f_{y \ 0}, 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - 0}{h} = 1$$

ملاحظه می کنید که $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ برقرار است.

از مثال بالا ملاحظه نمودید که ترتیب مشتق‌گیری جزئی اهمیت دارد، و بدون توجه به آن ممکن است مشکل ساز شود. قضیه زیر شرایط کافی برای برقراری $f_{xy} = f_{yx}$ را بیان می‌کند.

قضیه ۱.۴

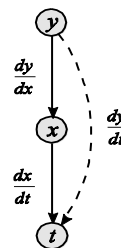
مشتق‌های جزئی آمیخته

فرض کنید تابع دو متغیره f روی قرص باز D شامل x_0, y_0 تعریف شده باشد، اگر f_{yx} و f_{xy} موجود و پیوسته باشند، آنگاه:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

قاعده‌های زنجیره‌ای

به خاطر آورید که قاعده زنجیره‌ای برای تابع یک متغیره مشتق ترکیب توابع مشتق‌پذیر $y = f(x)$ و $x = g(t)$ می‌باشد که با این عمل متغیر وابسته y به طور غیر مستقیم یک تابع مشتق‌پذیر از متغیر مستقل t است و به عنوان یک متغیر میانی عمل می‌کند (شکل ۵).



شکل ۵- قاعده زنجیره‌ای تابع یک متغیره

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad (۳)$$

به عنوان یک نمونه کاربردی فرض کنید مطابق شکل (۶) یک گوی کروی به شعاع r تحت تاثیر حرارت داده شده نسبت به زمان منبسط شود، به این صورت که شعاع با زمان $r = r_0 + 0.001t$ در حال تغییر باشد. اکنون اگر بخواهیم آهنگ تغییرات افزایش حجم گوی را در هر لحظه اندازه بگیریم قاعده زنجیره‌ای کمک بزرگی می‌باشد.



شکل ۶- تعبیر فیزیکی قاعده زنجیره‌ای تابع یک متغیره

① قاعده زنجیره‌ای نوع اول در این حالت تابع چند متغیره در نهایت به یک متغیر مستقل وابسته می‌شود.

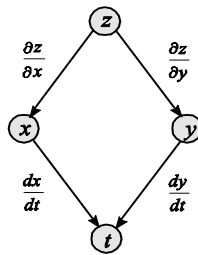
قضیه ۲.۴

حالت اول قاعده زنجیره‌ای توابع دو متغیره

اگر f یک تابع دو متغیره با ضابطه $z = f(x, y)$ باشد، و توابع $x = x(t)$ و $y = y(t)$ هر دو بر حسب t مشتق‌پذیر و f_x و f_y پیوسته باشند، آنگاه z یک تابع مشتق‌پذیر نسبت به t است و

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (۴)$$

نحوه به دست آوردن معادله (۴) شبیه قاعده زنجیره ای (۳) برای تابع یک متغیره است که نمودار آن در شکل (۷) آمده است.



شکل ۷- قاعده زنجیره ای
نوع اول تابع دومتغیره

محاسبه مشتق جزئی با قاعده زنجیره ای

مثال ۶

اگر $z = x^2y + 3xy^2$ و $x = \sin 2t$ و $y = \cos t$ باشند، dz/dt را در $t = 0$ می یابیم.

حل: با توجه به قاعده زنجیره ای (۴) داریم:

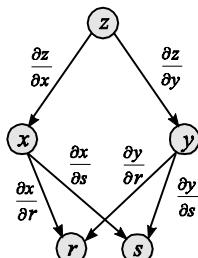
$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= 2xy + 3y^2 \cdot 2\cos 2t + x^2 + 6xy \cdot (-\sin t)\end{aligned}$$

ضرورتی ندارد به جای x و y عبارت بر حسب t متناظر را جایگزین نماییم، چون در $t = 0$ داریم: $x(0) = \sin 0 = 0$ و $y(0) = \cos 0 = 1$ ، بنابراین:

$$\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = 0 + 0 \cdot 2\cos 0 + 0 + 0 \cdot (-\sin 0) = 0$$

■ **۲ قاعده زنجیره ای نوع دوم** در این حالت تابع چند متغیره پس از ترکیب به بیش از یک متغیره وابسته می شود.

برای نمونه فرض کنید $f(x, y)$ دمای نقاط داخل و روی یک دایره باشد. شاید ترجیح دهیم که x و y را به صورت توابعی بر حسب r و s که طول و عرض جغرافیایی نقاط را به دست می دهند در نظر بگیریم. در این صورت دما را به صورت تابع مرکب $f(x(r, s), y(r, s))$ بیان می نماییم، یعنی f به طور غیرمستقیم به r و s وابسته می شود.



شکل ۸- قاعده زنجیره ای
نوع دوم تابع دومتغیره

حال اگر s را ثابت در نظر بگیریم همانند معادله (۴) داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$$

به طریق مشابه برای $\partial f / \partial s$ نیز برقرار است.

قضیه ۳.۴

حالت دوم قاعده زنجیره ای توابع دو متغیره

فرض کنید تابع دو متغیره $z = f(x, y)$ ، f_x و f_y موجود و پیوسته باشند، و همچنین مشتقات جزئی مرتبه اول $x = x(r, s)$ و $y = y(r, s)$ موجود باشند، در این صورت داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \quad (5)$$

در این حالت، سه نوع متغیر وجود دارد، r و s که متغیرهای مستقل هستند، z متغیر وابسته و x ، y متغیرهای میانی می باشند. برای به ذهن سپردن قاعده دوم نیز نمودار شکل (۸) خیلی کمک می نماید.

محاسبه مشتق جزئی با قاعده دوم زنجیره ای

مثال ۷

اگر $z = e^x \sin y$ و $x = sr^2$ ، $y = s^2r$ باشند، z_r و z_s را می یابیم.

حل: با به کار گیری معادلات (۵) داریم:

$$\begin{aligned} z_r &= \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = e^x \sin y \cdot 2rs + e^x \cos y \cdot s^2 \\ &= 2rse^{sr^2} \sin s^2r + s^2e^{sr^2} \cos s^2r \end{aligned}$$

به همین ترتیب به دست می آید:

$$\begin{aligned} z_s &= \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = e^x \sin y \cdot r^2 + e^x \cos y \cdot 2rs \\ &= r^2e^{sr^2} \sin s^2r + 2rse^{sr^2} \cos s^2r \end{aligned}$$

■

■ **قاعده زنجیره ای برای توابع بیش از دو متغیر** قاعده زنجیره ای در قضیه ۳.۳ و ۴.۳ به آسانی برای توابع سه متغیره و بالاتر قابل گسترش است.

بررسی جواب معادله با قاعده زنجیره ای

مثال ۸

اگر $w = f(z - y, x - z, y - x)$ باشد ثابت می کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

حل: با تغییر متغیر میانی $u = z - y$ ، $v = x - z$ و $w = y - x$ و استفاده از قاعده زنجیره ای (۶) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$= f_u \times 0 + f_v \times 1 + f_w \times -1 = f_v - f_w$$

به همین ترتیب با اعمال قاعده زنجیره ای و ساده نمودن داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -f_u + f_w, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f_u - f_v$$

که با جمع سه رابطه اخیر نتیجه می شود:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = f_v - f_w + -f_u + f_w + f_u - f_v = 0$$

مشتق های ضمنی

برخی از منحنی ها در صفحه با معادله دکارتی $F(x, y) = 0$ و یا برخی از سطوح در فضای سه بعدی به صورت معادله ضمنی $F(x, y, z) = 0$ توصیف می شوند. با استفاده از قاعده زنجیره ای می توان یک توصیف کامل از فرآیند محاسبه مشتق های ضمنی ارائه نمود.

فرض کنید در رابطه ضمنی $F(x, y) = 0$ ، y به عنوان تابعی از x باشد، یعنی $F(x, y(x)) = 0$ با استفاده از قاعده زنجیره ای داریم:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

با توجه به اینکه $dx/dx = 1$ ، و با فرض $\partial F / \partial y \neq 0$ ، به یاد آورید که با حل معادله نسبت به dy/dx داشتیم:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} = -\frac{F_x}{F_y}$$

اکنون فرض کنید $z = f(x, y)$ به عنوان تابعی بر حسب x و y روی سطح $F(x, y, z) = 0$ باشد، یعنی برای همه x, y در دامنه رابطه $F(x, y, z(x, y)) = 0$ باشد. با توجه به قاعده زنجیره ای داریم:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

چون $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ و $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ ، پس:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

اگر $\partial F / \partial z \neq 0$ باشد، این معادله نسبت به $\partial z / \partial x$ حل می شود. به همین ترتیب $\partial z / \partial y$ به دست می آید، بنابراین داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_x}{F_z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_y}{F_z}$$

محاسبه مشتق ضمنی

مثال ۹

برای رابطه زیر $\frac{\partial z}{\partial y}$ و $\frac{\partial z}{\partial x}$ را تعیین می نمایم:

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

حل: فرض کنید:

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz - 1$$

بنابراین طبق رابطه داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-F_x}{F_z} = -\frac{3x^2 + 6yz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xz},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-F_y}{F_z} = -\frac{3y^2 + 6xz}{3z^2 + 6xy} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

■

دیفرانسیل کل

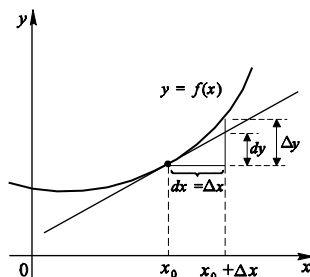
به یاد آورید که برای تابع یک متغیره $y = f(x)$ مشتق پذیر در x ، نمو متغیر وابسته Δy را می توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \varepsilon \Delta x$$

که در آن ε تابعی از Δx بوده، و زمانی که $\Delta x \rightarrow 0$ آنگاه، $\varepsilon \rightarrow 0$. به این ترتیب با انتخاب $\Delta x = dx$ به عنوان یک متغیر مستقل که هر مقدار حقیقی را می تواند اختیار کند، دیفرانسیل y به عنوان یک تابع دو متغیره به صورت زیر معرفی می شود.

$$dy = df(x), dx = f'(x) dx \quad (۶)$$

شکل (۹) رابطه بین تغییرات Δy و دیفرانسیل dy (یا df) را نشان می دهد. ملاحظه می کنید که Δy حداکثر تغییرات منحنی $y = f(x)$ و dy حداکثر تغییرات خط تقریب (خط مماس) زمانی که x به اندازه Δx تغییر می کند، را نمایش می دهد.



شکل ۹- تعبیر هندسی دیفرانسیل
با نمو تابع یک متغیره

به همین ترتیب برای تابع دو متغیره مشتق پذیر $z = f(x, y)$ ، نمو متغیر وابسته Δz را می توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\Delta z = f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \quad (۷)$$

که در آن ε_1 و ε_2 توابعی از $(\Delta x, \Delta y)$ بوده، و زمانی که $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ داشته باشیم، $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ و $\varepsilon_2 \rightarrow 0$. پس با انتخاب نمو های $\Delta x = dx$ و $\Delta y = dy$ به عنوان متغیرهای مستقل، که هر مقدار حقیقی را می تواند اختیار کنند، دیفرانسیل dz (یا df) به عنوان **دیفرانسیل کل** به صورت زیر تعریف می شود.

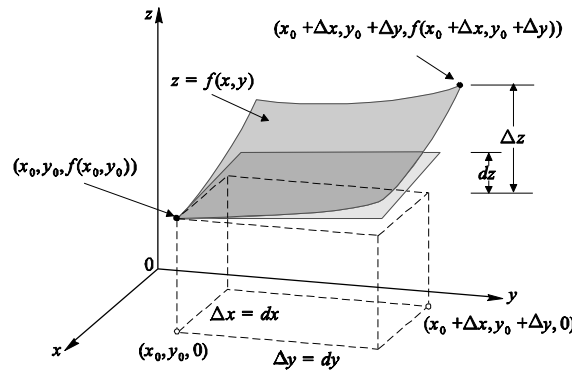
تعریف ۵.۴

دیفرانسیل کل

اگر $z = f(x, y)$ یک تابع مشتق پذیر در x, y باشد، دیفرانسیل کل f که با نماد df نشان داده می شود، به صورت زیر تعریف می شود.

$$dz = df(x, y, dx, dy) = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy \quad (۸)$$

توجه کنید df تابعی از چهار متغیر x, y, dx, dy می‌باشد. با یک مقایسه بین شکل (۹) و شکل (۱۰) در سه بعد، مشخص می‌شود که Δz و dz به ترتیب بیشترین تغییر رویه $z = f(x, y)$ و صفحه مماس است زمانی که x, y از x_0, y_0 به $x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y$ تغییر می‌کند.



شکل ۱۳ - تعبیر هندسی دیفرانسیل با نمودار دو متغیره، ملاحظه می‌کنید که، زمانی Δx و Δy به صفر میل می‌کنند، اختلاف Δz و dz سریعتر به صفر می‌رسد، یعنی،

$$\Delta z - dz = \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

که ε_1 و ε_2 وابسته به Δx و Δy به صفر میل کنند.

محاسبه دیفرانسیل حجم یک استوانه

مثال ۱۰

شعاع قاعده استوانه دایره‌ای ۱۰ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۱۵ سانتی‌متر می‌باشد که با اندازه ۰.۰۲ سانتی‌متر دقیق هستند. اگر حجم با این اندازه‌ها محاسبه شود، خطای ماکزیمم و خطای درصد را به طور تقریبی پیدا می‌کنیم.

حل: تابع حجم استوانه دایره‌ای در ابتدای بخش به صورت $V = \pi r^2 h$ معرفی شده است که r شعاع و h ارتفاع با واحد سانتی‌متر باشد. از تعریف دیفرانسیل مشخص است مقدار دقیق ΔV است. ولی ما از dV که آسانتر است برای تقریب ΔV استفاده می‌کنیم.

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh = 2\pi r h dr + \pi r^2 dh$$

با توجه به اینکه $|\Delta V| \leq 0.02$ و $|\Delta h| \leq 0.02$ داریم:

$$dV = 2\pi \cdot 10 \cdot 15 \cdot 0.02 + \pi \cdot 10^2 \cdot 0.02 = 8\pi$$

پس $\Delta V \simeq 8\pi \text{ cm}^3$. چون خطای نسبی از تقسیم خطای مطلق بر مقدار واقعی به دست می‌آید، پس داریم:

$$\frac{\Delta V}{V} \simeq \frac{dV}{V} = \frac{8\pi}{\pi \cdot 10^2 \cdot 15} = \frac{2}{375} \simeq 0.0053$$

در نتیجه خطای درصدی نیز تقریباً ۰.۵۳ درصد است.

محاسبه مقدار تقریبی به کمک دیفرانسیل کل

مثال ۱۱

با استفاده از دیفرانسیل کل مقدار تقریبی $\sqrt{(1.9)^2 + (2.01)^2 + (0.9)^2}$ را محاسبه می‌کنیم.

حل: همانند رابطه (۸) اگر $f(x, y, z)$ یک تابع سه متغیره باشد، دیفرانسیل کل عبارت است از:

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

$$\text{اکنون با فرض } \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 2 \text{ و } f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ z_0 = 1 \end{cases} \text{ داریم:}$$

$$\Delta x = -0.1, \Delta y = 0.01, \Delta z = -0.1$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \Delta f &\simeq \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Delta x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Delta y + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Delta z \\ &\Rightarrow f(x, y, z) - 3 \simeq \frac{2}{3}(-0.1) + \frac{2}{3}(0.01) + \frac{1}{3}(-0.1) = -0.06 \\ &\Rightarrow f(x, y, z) \simeq 3 - 0.06 = 2.94 \end{aligned}$$

■

کاربرد دیفرانسیل کل

مثال ۱۲

شعاع قاعده یک بلبرینگ با شکل استوانه مستدیر 3 سانتی متر و ارتفاع آن 4 سانتی متر است، اگر شعاع قاعده را به 2.9 و ارتفاع آن را به 4.2 سانتی متر تغییر دهیم، میزان کل تغییر حجم بلبرینگ را به دست می آوریم.

حل: می دانیم شعاع قاعده یک بلبرینگ از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$V = \pi r^2 h$$

پس با استفاده از دیفرانسیل کل داریم:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial h} dh$$

لذا:

$$dV = 2\pi r h dr + \pi r^2 dh$$

$$dV(3, 4) = (2\pi \cdot 3 \cdot 4)(-0.1) + \pi \cdot 9(0.2) = -0.6$$

یعنی حجم بلبرینگ به اندازه -0.6 سانتی متر مکعب کاهش می یابد.

■

استفاده از CAS

محاسبه مشتق جزئی با این فرض که در محیط CAS تابع $g(x, y) = x^3 + y^2 - xy + 2$ معرفی شده است، از دستورات زیر برای محاسبه مشتق جزئی استفاده می نمایم.

(در Maple) `> diff g x,y ,x,x ;`

6x

`> subs x = 1,y = 1,eval % ;`

6

D g x,y ,x

(در Mathematica)

$$3x^2 - y$$

$D g_{x,y}, x, y$

$$-1$$

$D g_{x,y}, x, 2$

$$6x$$

$\text{Derivative } 2,0 g_{1,1}$

$$6$$

 **مشتق زنجیره‌ای و ضمنی** در این نرم افزارها علاوه بر فرمول‌ها با مشتق جزئی می‌توانید از دستورات مستقیم نیز برای محاسبه مشتق زنجیره‌ای و ضمنی استفاده نمایید.

$> g := (x, y) \rightarrow f(x^2 - y^2, x * y)$

(در Maple)

$> \text{simplify}(D[1,2](g)(x, y))$

$$\begin{aligned} & -4yD_{1,1}(f)(x^2 - y^2, xy)x - 2D_{1,2}(f)(x^2 - y^2, xy)y^2 \\ & + 2D_{1,2}(f)(x^2 - y^2, xy)x^2 + xD_{2,2}(f)(x^2 - y^2, xy)y \\ & + D_2(f)(x^2 - y^2, xy) \end{aligned}$$

$> f := x^3 - y^2 - 2 * y/z = z^2;$

(در Maple)

$> \text{implicitdiff } f, y \text{ } x, z, x ;$

$$-3 \frac{x^2 y z}{x^3 - z - 2}$$

مجموعه تمرین های بخش ۲.۴

۱. (محاسبه مشتقات جزئی) مشتق های جزئی مرتبه اول توابع چند متغیره زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\text{a. } f(x, y) = xe^{2y} \quad \text{b. } f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3} \quad \text{c. } f(x, y, z) = \ln(x + y - 3z)$$

$$\text{d. } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2y^2}{x - y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

۲. (محاسبه مشتق های جزئی مرتبه دوم) مشتقات جزئی مرتبه دوم توابع زیر را بیابید.

$$\text{a. } f(x, y, z) = xy^2z^3 - e^{xyz} \quad \text{b. } f(x, y) = \sin(3x - 4y) \quad \text{c. } f(x, y, z) = \ln(xy^2z)$$

۳. (تعویض ترتیب مشتق های جزئی) محاسبه f_{xy} با کدام ترتیب مشتق گیری سریعتر انجام می شود، اول x یا اول y .

$$\text{a. } f_{x,y} = y + x/y \quad \text{b. } f_{x,y} = x \ln xy$$

۴. (مشتق های جزئی موجود ولی ناپیوسته) با فرض

$$f_{x,y} = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x, y \neq 0, 0 \\ 0, & x, y = 0, 0 \end{cases}$$

نشان دهید تابع در $(0, 0)$ پیوسته نمی باشد ولی f_x و f_y موجودند.

۵. (شرط برقراری جواب) فرض کنید که $z = u(x, y)e^{ax+by}$ و $u_{yx} = 0$ برای ثابت های a و b مقداری بیابید که:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0$$

۶. (برقراری جواب) فرض کنید $z = y \sin(\frac{y}{x})$ ، نشان دهید:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

۷. (برقراری جواب) اگر $w = \frac{x}{y} \arctan(\frac{y}{x})$ آنگاه نشان دهید:

$$xw_x + yw_y = 0$$

۸. (قضیه اویلر در باره تابع همگن درجه n - ام) تابع $f(x, y, z)$ همگن درجه n - ام نامیده می شود اگر عدد صحیح

ثابت n موجود باشد که به ازای تمام مقادیر x, y, z و t معادله زیر برقرار باشد:

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$$

a. فرض کنید که تابع همگن درجه n - ام $f(x, y, z)$ ، پیوسته و مشتقات جزئی پیوسته دارد نشان دهید:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = nf$$

b. برای تابع $f(x, y, z) = \sin \frac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}$ نشان دهید:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

۹. (قاعده زنجیره‌ای نوع اول) اگر $x = t + \ln 1 + t^2$ ، $y = e^t$ و $z = xy^2$ ، dz/dt را در $t = 0$ محاسبه کنید.

۱۰. (قاعده زنجیره‌ای نوع دوم) اگر $z = \tan^{-1} \frac{u}{v}$ با $u = 2x + y$ و $v = 3x - y$ ، عبارت $\partial z / \partial x$ را محاسبه کنید.

۱۱. (قاعده زنجیره‌ای نوع دوم) اگر $z = u^2 + v^2 - 2uv$ با $u = r \cos \theta$ و $v = r \sin \theta$ ، مقدار $\partial z / \partial r$ را محاسبه کنید.

۱۲. (معادله لاپلاس در مختصات قطبی) اگر $z = f(x, y)$ مشتق‌های جزئی مرتبه دوم پیوسته داشته و $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ نشان دهید:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$$

۱۳. دیفرانسیل کل توابع زیر را بیابید.

$$\text{a. } u(t, \theta) = e^t \sin \theta \quad \text{b. } u(x, y) = \ln(2cx - 3y) \quad \text{c. } w(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

۱۴. مقدار تقریبی زیر را محاسبه کنید.

$$\text{a. } \sqrt{(5.05)^2 + (3.1)^2} - \sqrt{5 + 3} \quad \text{b. } \sin((1.05)^2 + (0.95)^2) - \sin(1^2 + 4^2)$$

$$\text{c. } \sqrt{(3.02)^2 + (1.97)^2 + (5.99)^2}$$

۱۵. (مشتق ضمنی) برای هر یک از معادلات داده شده، مشتق‌های خواسته شده را بیابید. شرط وجود مشتق‌های جزئی را مشخص نمایید.

$$\text{a. } y' \text{ در معادله } xy^3 + x^4y = 2$$

$$\text{b. } y' \text{ در معادله } x^y = y^x$$

$$\text{c. } z_y \text{ در معادله } z^2 + xy^3 = \frac{xz}{y}$$

$$\text{d. } z_x \text{ و } z_y \text{ در معادله } x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$$

$$\text{e. } u_x, u_y, u_z \text{ در معادله } e^{xyz} = zu$$

$$\text{f. } z_{z_x} \text{ را در معادله } x + y + z, x^2 + y^2 + z^2 = 0 \text{ بر حسب } x, y, z \text{ و مشتقات جزئی } \varphi_x \text{ و } \varphi_y$$