

حساب دیفرانسیل توابع چند متغیره

۱.۴ توابع چند متغیره حقیقی

۲.۴ مشتق‌های جزئی و قاعده‌های زنجیره‌ای

۳.۴ مشتق‌های جهتی (سویی) و معادلات خطوط مماس و قائم بر رویه

مقدمه

تا کنون با حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره سروکار داشتیم. اما در جهان واقعی کمیت‌های فیزیکی اغلب به دو یا بیشتر از دو متغیر وابسته هستند، بنابراین در این فصل حساب دیفرانسیل را از توابع یک متغیره حقیقی به توابع چند متغیره حقیقی تعمیم می‌دهیم، که در عمل بیشتر از توابع یک متغیره ظاهر می‌شوند. مفاهیم دامنه و برد، خم تراز و رویه تراز، حد، پیوستگی و مشتق آنها را برای توابع دو متغیره که تعمیم ساده‌تر دارند، توسعه می‌دهیم. سپس این مفاهیم به سادگی برای توابع سه متغیره و بالاتر قابل تعمیم است.

بخش ۱.۴ توابع چند متغیره حقیقی

بسیاری از توابع وجود دارند که در آنها بیش از یک متغیر مستقل وجود دارند، برای نمونه حجم استوانه ای به شعاع قاعده r و ارتفاع h عبارت است از $V = \pi r^2 h$. که می توان حجم v را به عنوان تابعی از دو متغیر r و h در نظر گرفت.

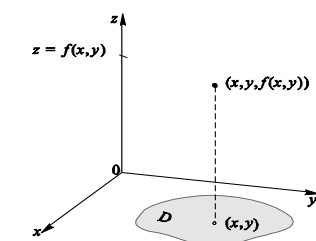
هر نقطه از صفحه را با زوج مرتب (x, y) و نقاط صفحه را با $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ و هر نقطه از فضا را با سه نایی مرتب (x, y, z) و فضا را با $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ نشان می دهیم. لذا توابع دو متغیره را به صورت

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{با ضابطه} \quad z = f(x, y) \quad \text{و توابع سه متغیره را به صورت} \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{تعریف می} \\ (x, y) \rightarrow z \quad (x, y, z) \rightarrow w$$

کنیم. به همین ترتیب می توان آن را به توابع n متغیره حقیقی تعمیم داد.

دامنه و برد توابع چند متغیره

مجموعه تمام نقاطی که تابع چند متغیره در آنها تعریف می شود را دامنه آن تابع چند متغیره می نامیم و آن را با D_f نشان داده و مجموعه تمام مقادیر حقیقی $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ که روی D_f تعریف شده اند را برد تابع چند متغیره f می نامیم. اگر f یک تابع دو متغیره حقیقی باشد ضابطه f را به صورت $z = f(x, y)$ نشان می دهیم به طوری که به هر نقطه از دامنه f در $\mathbb{R}^2$ طبق ضابطه f به نقطه منحصر به فردی از $\mathbb{R}$ نظیر می شود (شکل ۱).



شکل ۱ - هر نقطه از دامنه متناظر با یک نقطه از برد

تعیین دامنه توابع دو متغیره

مثال ۱

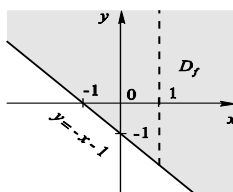
دامنه توابع زیر را می یابیم و $f(3, 2)$ و $g(3, 2)$ را ارزیابی می کنیم.

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1} \quad (a) \quad g(x, y) = x \ln y^2 - x \quad (b)$$

حل: (a) دامنه تابع f به صورت زیر است.

$$D_f = \{x, y \mid x + y + 1 \geq 0, x \neq 1\}$$

بنابراین دامنه تابع f بالا و روی خط $y = -x - 1$ است که خط $x = 1$ از آن حذف شده است (شکل ۲).



شکل ۲ - دامنه تابع f

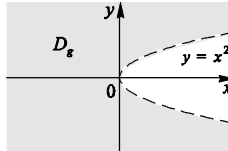
$$f_{3,2} = \frac{\sqrt{3+2+1}}{3-1} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

(b) دامنه این تابع عبارت است از:

$$D_g = \{x, y \mid y^2 - x > 0\}$$

که نقاط سمت چپ $x = y^2$ مطابق شکل (۳) است. و چون $3, 2$ نیز یک نقطه از دامنه g است، پس

$$g_{3,2} = 3 \ln 2^2 - 3 = 3 \ln 1 = 0$$



شکل ۳- دامنه تابع g

تعیین دامنه و برد تابع

مثال ۲

دامنه و برد توابع زیر را می‌یابیم.

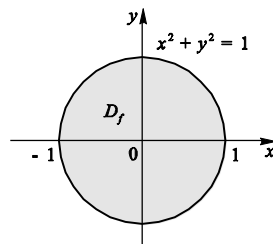
$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{(a)} \quad g(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}} \quad \text{(b)}$$

حل : (a): برای تعیین برد ابتدا باید دامنه تابع را مشخص نمود.

$$D_f = \{x, y \mid 1 - x^2 - y^2 \geq 0\}$$

پس دامنه f مطابق شکل (۴) مجموعه نقاط درون و روی دایره به مرکز مبدا و شعاع ۱ است. بنابراین برد f مجموعه زیر می‌باشد:

$$R_f = \{z \mid z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, x, y \in D_f\}$$



شکل ۴- دامنه تابع f

از طرفی چون z یاریشه دوم $1 - x^2 - y^2$ همواره غیر منفی است، پس داخل و روی دایره فوق داریم $0 \leq 1 - x^2 - y^2 \leq 1$. از رابطه اخیر نتیجه می‌شود:

$$0 \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2} \leq 1$$

بنابراین برد f بازه $[0, 1]$ است.

(b): g یک تابع سه متغیره است و دامنه آن عبارت است از:

$$D_g = \{x, y, z \mid x^2 + y^2 + z^2 - 4 > 0\},$$

یعنی دامنه آن خارج کره به شعاع 3 است. برد این تابع با توجه به

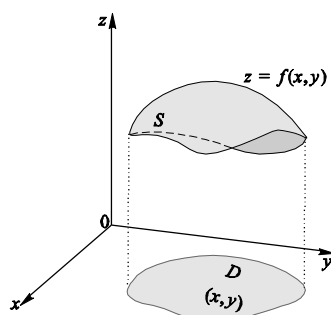
$$R_g = \left\{ w \mid w = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4}}, x, y, z \in D_g \right\}$$

بازه $0, +\infty$ است. چون فقط اگر یکی از متغیرهای x, y, z به بی نهایت میل کند، مقدار تابع به صفر میل خواهد کرد. از طرف دیگر اگر نقطه x, y, z از خارج کره به مرز کره نزدیک شود، مقدار تابع به بی نهایت میل خواهد نمود.

■

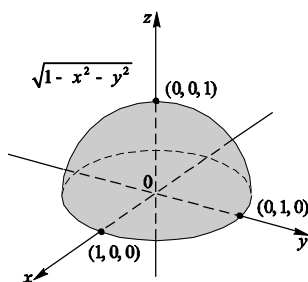
نمودار توابع چند متغیره حقیقی

یکی از روش ها برای مشاهده رفتار یک تابع، به خصوص تابع دو متغیره، در نظر گرفتن نمودارش می باشد. نمودار تابع دو متغیره f مکان هندسی نقاط x, y, z در $\mathbb{R}^3$ است که $x, y \in D_f$ و $z = f(x, y)$ نمودار اغلب تابع سطح S روی دامنه D می باشد. (شکل ۵)



شکل ۵- نمودار تابع دو متغیره f

اکنون به مثال (۲) قسمت (a) بر می گردیم، نمودار $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ نیم کره بالایی مطابق شکل (۶) می باشد. واضح است که دامنه آن داخل و روی دایره $x^2 + y^2 = 1$ و برد آن بازه $0, 1$ است.



شکل ۶- نیم کره بالایی

■ **مجموعه های تراز** برای رسم نمودار تابع دو متغیره $z = f(x, y)$ دو راه متداول است، یک راه این است که نمودار تابع $z = f(x, y)$ را به عنوان رویه ای در فضا در نظر گرفت، که در فصل اول در باره طریقه رسم آنها به اندازه کافی بحث شده است.

راه دیگر اینکه **خم های تراز** آن را رسم کنیم، به خصوص **رویه های تراز** برای توابع سه متغیره $u = f(x, y, z)$ که تجسم نمودار آن غیر ممکن است، به این دلیل که جهان ما سه بعدی است و نمودار S از توابع سه متغیره در فضای $\mathbb{R}^4$ قرار می گیرد. در حالت کلی برای تحلیل توابع بیش از سه متغیره تعریف **مجموعه های تراز** با یک بعد کمتر شاید مفید باشد.

تعریف ۱.۴ مجموعه تراز

اگر f یک تابع n متغیره و c یک عدد ثابت حقیقی باشد، مجموعه نقاط

$$S_c = \{ \mathbf{x} \in S \subset \mathbb{R}^n \mid f(\mathbf{x}) = c \}$$

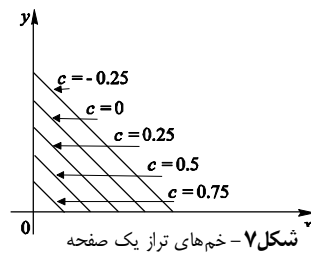
مجموعه تراز f وابسته به ثابت c نامیده می‌شود. برای $n = 2$ ، $f(x, y) = c$ منحنی تراز، و برای $n = 3$ ، $f(x, y, z) = c$ رویه تراز نامیده می‌شود.

اکنون چند مثال از خم‌های تراز و رویه‌های تراز ارائه می‌دهیم، با این توضیح که رسم اینها نیز با دست مشکل می‌باشند. ولی این عمل یک توصیف ساده تراز آنها برای افراد آشنا با ریاضی ایجاد می‌کند. به هر حال امروزه استفاده از فن آوری کامپیوتر رسم نمودارها را آسان‌تر نموده است، که دانستن آن برای هر دانشجویی غیر قابل اجتناب است.

مثال ۳ رسم خم‌های تراز

برای تابع f با ضابطه $f(x, y) = 1 - x - y$ خم‌های تراز آن را رسم می‌کنیم.

حل: تابع f یک تابع خطی می‌باشد، که نمودار آن یک صفحه مایل $z = 1 - x - y$ در فضای $\mathbb{R}^3$ است. به ازای هر مقدار c منحنی تراز، خط $y = 1 - (x + c)$ در صفحه xy می‌باشد. در شکل (۷) چند منحنی تراز آن رسم شده است.



شکل ۷ - خم‌های تراز یک صفحه

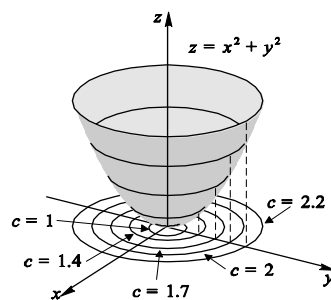
رسم رویه‌ها به کمک خم‌های تراز

مثال ۴

نمودار توابع زیر با ضابطه $z = f(x, y)$ را به کمک منحنی‌های تراز رسم می‌کنیم.

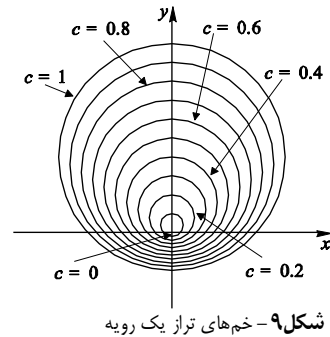
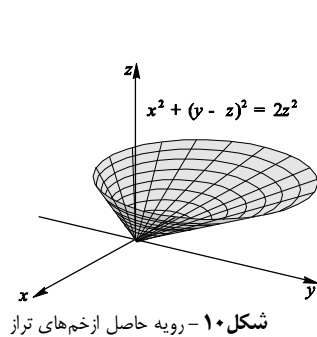
$$(a): z = x^2 + y^2 \quad (b): x^2 + y - z^2 = 2z^2, z \geq 0$$

حل (a): منحنی‌های تراز با مقدار c که $c < 0$ تهی است. ولی به ازای $c > 0$ منحنی تراز دایره $x^2 + y^2 = c$ به شعاع $\sqrt{c}$ به مرکز مبدا مختصات است. شکل (۸) چند منحنی تراز تابع فوق و سطح تابع حادث شده از منحنی‌های تراز را نشان می‌دهد. ملاحظه کنید که شکل همان سهمی‌گون دایره‌ای می‌باشد.



شکل ۸ - خم‌های تراز سهمی‌گون

(b): منحنی‌های تراز $z = f(x, y) = c$ با $c \geq 0$ ، دایره‌های $x^2 + y - c^2 = 2c^2$ به مرکز $0, c$ و شعاع $\sqrt{2}c$ می‌باشند. در شکل (۹) چند منحنی تراز تابع فوق و سطح تابع حادث شده از منحنی‌های تراز در شکل (۱۰) نشان داده شده است.



تحلیل نمودار در $\mathbb{R}^4$ به کمک رویه‌های تراز

مثال ۵

نمودار تابع f با ضابطه $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ را به کمک رویه‌های تراز آن تحلیل می‌کنیم.

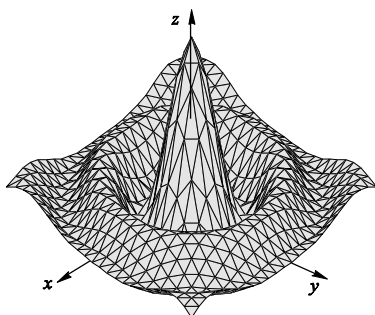
حل: نمودار تابع فوق در فضای $\mathbb{R}^4$ رانمی‌توان به طور مستقیم تجسم نمود، اما مقطع‌های آن را می‌توان به طور تحلیلی رسم نمود. رویه‌های تراز با مقدار c عبارت است از:

$$S_c = \{x, y, z \mid x^2 + y^2 + z^2 = c\}$$

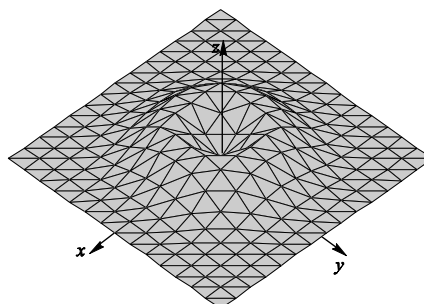
که به ازای $c > 0$ کره‌ای به مرکز مبدا و شعاع $\sqrt{c}$ ، به ازای $c = 0$ یک نقطه در مبدا و به ازای $c < 0$ تهی است.

رسم‌های کامپیوتری

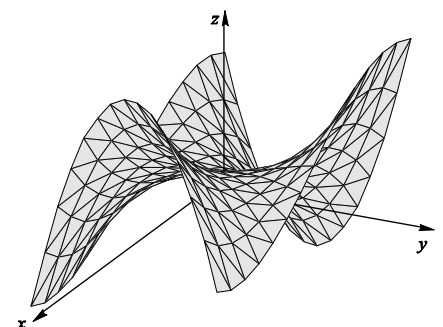
در حالت کلی رسم نمودار یک تابع دو متغیره حقیقی به راحتی امکان پذیر نمی‌باشد، ولی با استفاده از امکانات پیشرفته امروزی به خصوص سیستم جبر کامپیوتری CAS می‌توان آنها را راحت تر رسم نمود و از روی رفتار نمودارهای سه متغیره می‌توان اطلاعاتی از خود تابع بدست آورد. نمودار چند تابع دو متغیره حقیقی با استفاده از Maple ارایه شده است.



$$z = \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{نمودار رویه}$$



$$z = (x^2 + y^2) e^{1 - x^2 - y^2} \quad \text{نمودار رویه}$$



$$z = x^3 - 3xy^2 \quad \text{نمودار رویه چندجمله‌ای}$$

حد و پیوستگی توابع دو متغیره

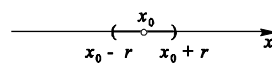
بررسی رفتار یک تابع چند متغیره f در همسایگی نقطه x_0 که زمینه ساز تعریف حد می باشد، بسیار اهمیت دارد، که توان درک ما را در مطالعه دو مفهوم اساسی دیگر، پیوستگی و مشتق توابع چند متغیره افزایش می دهد. این تعریف مانند تعریف متناظر در مورد تابع یک متغیره می باشد، جز اینکه در این مورد باید متغیرهای بیشتری در نظر گرفته شوند، به این دلیل بحث متنوع تری خواهیم داشت. چون تعداد مسیر میل کردن به یک نقطه در $\mathbb{R}^2$ و بالاتر برخلاف توابع یک متغیره که مسیر نزدیک شدن به یک نقطه فقط از سمت چپ و راست بود بی نهایت مسیر می باشد، بحث برانگیز تر است. برای بررسی دقیق حد به چند مفهوم نیاز داریم.

مجموعه باز

هرگاه x_0 یک نقطه از خط $\mathbb{R}$ باشد، همسایگی نقطه x_0 به شعاع $r > 0$ ، بازه باز:

$$N_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$$

می باشد و همسایگی محذوف متناظر از حذف نقطه x_0 از بازه $N_r(x_0)$ ایجاد می شود (شکل ۱۱).

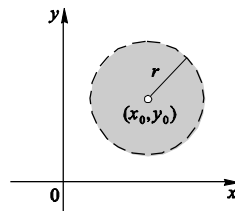


شکل ۱۱ - بازه باز محذوف

اگر x_0, y_0 یک نقطه در صفحه $\mathbb{R}^2$ باشد، همسایگی نقطه x_0, y_0 به شعاع $r > 0$ قرص باز

$$N_r(x_0, y_0) = \{x, y \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$$

می باشد که همسایگی محذوف $N_r^*(x_0, y_0)$ ، با حذف نقطه x_0, y_0 از همسایگی متناظر حاصل می شود (شکل ۱۲).



شکل ۱۲ - همسایگی محذوف نقطه (x_0, y_0)

در شکل (۱۲) ملاحظه کنید که برخلاف بازه باز در شکل (۱۱) که فقط دو مسیر چپ و راست دارد از بی نهایت مسیر می توان به نقطه x_0, y_0 در همسایگی محذوف $N_r^*(x_0, y_0)$ نزدیک شد.

حد توابع دو متغیره

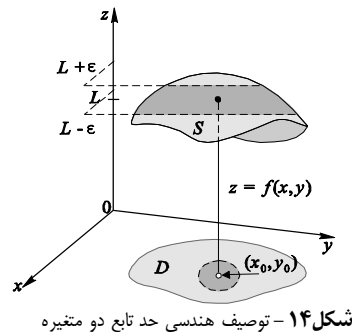
تعریف ۲.۴

فرض f یک تابع دو متغیره باشد که در یک همسایگی محذوف $N_\delta^*(x_0, y_0)$ باشد. گوییم حد $f(x, y)$ زمانی که x, y به x_0, y_0 میل می کند برابر L است و می نویسیم:

$$\lim_{x, y \rightarrow x_0, y_0} f(x, y) = L, \quad (1)$$

اگر برای هر عدد $\varepsilon > 0$ عدد متناظر $\delta > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر x, y داشته باشیم:

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon$$



اثبات وجود یک حد با تعریف

مثال ۶

با تعریف حد نشان می دهیم که :

$$\lim_{x, y \rightarrow 0, 1} 4x + 8y = 8$$

حل : طبق تعریف ۲.۴ باید نشان دهیم که به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که:

$$0 < \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2} < \delta \Rightarrow |4x + 8y - 8| < \varepsilon$$

با توجه به

$$|x - 0| = \sqrt{(x - 0)^2} \leq \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2} < \delta,$$

و

$$|y - 1| = \sqrt{(y - 1)^2} \leq \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 1)^2} < \delta,$$

نتیجه می شود:

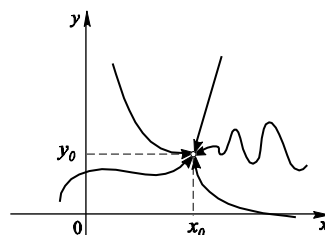
$$\begin{aligned} |4x + 8y - 8| &= |4(x - 0) + 8(y - 1)| \\ &\leq 4|x - 0| + 8|y - 1| \\ &< 4\delta + 8\delta = 12\delta. \end{aligned}$$

پس اگر قرار دهیم $\varepsilon \leq 12\delta$ ، آنگاه با انتخاب $\delta \leq \varepsilon/12$ اثبات کامل است.

■

■ **بررسی عدم وجود حد به کمک مسیرها** با توجه به تعریف ۲.۴ در صورت وجود حد L ، مقادیر تابع روی هر

مسیر C از دامنه به سمت نقطه x_0, y_0 به حد L میل می کنند (شکل ۱۵).



پس اگر فقط دو مسیر C_1 و C_2 به سمت نقطه x_0, y_0 یافت شود، به طوری که

$$\lim_{x,y \xrightarrow{C_1} x_0,y_0} f(x,y) = L_1 \neq L_2 = \lim_{x,y \xrightarrow{C_2} x_0,y_0} f(x,y)$$

برقرار باشد، حد موجود نمی‌باشد. با این تذکر که، حتی اگر به ازای مسیرهای مختلف $L_1 = L_2$ برقرار شود، دلیلی برای وجود حد نمی‌باشد.

عدم وجود حد به کمک حد مسیری

مثال ۷

نشان می‌دهیم که $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ در نقطه $0,0$ موجود نمی‌باشد.

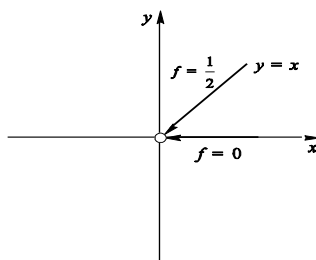
حل: مطابق با شکل (۱۶) فقط کافی است دو مسیر $y = 0$ و $y = x$ که از نقطه $0,0$ می‌گذرند را در نظر بگیریم. روی مسیر با معادله خط $y = 0$ داریم:

$$\lim_{x,y \rightarrow 0,0} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2 + 0} = 0$$

ولی از مسیر دیگر، روی خط $y = x$ داریم:

$$\lim_{x,y \rightarrow 0,0} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

چون $1/2 \neq 0$ پس حد موجود نمی‌باشد.



شکل ۱۶ - حدهای مختلف روی دو مسیر خطی مختلف

عدم وجود حد به کمک حد مسیری

مثال ۸

نشان می‌دهیم که حد $\lim_{x,y \rightarrow 0,0} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ موجود نمی‌باشد.

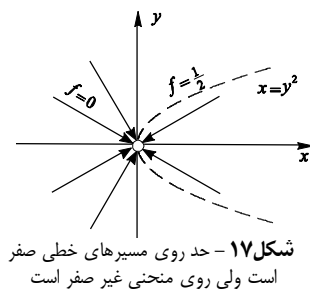
حل: اگر مطابق شکل (۱۷) مسیرهای خطی $y = mx$ را انتخاب کنیم، داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \\ \lim_{x,mx \rightarrow 0,0} f(x,mx) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 x^3}{x^2 + m^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xm^2}{1 + m^4 x^2} = 0 \end{aligned}$$

هر چند نتیجه به بی‌نهایت مسیر خطی با شیب m وابسته نمی‌باشد، با این وجود نمی‌توان ادعا کرد حد موجود و برابر صفر است. با کمی بررسی با سعی و خطا، مطابق شکل (۱۷) روی مسیر سهمی $x = y^2$ (غیرخطی) گذرنده از $0,0$ خواهیم داشت:

$$\lim_{y^2, y \rightarrow 0,0} f(y^2, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2}$$

چون $1/2 \neq 0$ نتیجه می‌شود که حد موجود نمی‌باشد.



یادداشت ۱

توجه کنید که اگر با امتحان مسیرهای مختلف نتیجه ارزیابی یکسان و برابر L به دست آید، برای اثبات پیش‌بینی (ادعا) باید از تعریف حد استفاده نمود.

■ عملیات جبری حد

قضایای جبری در مورد حد که در مورد توابع یک متغیره موجود است به طور مشابه برای توابع دو متغیره و چند متغیره با گسترش برقرار است.

پیوستگی توابع دو متغیره

همانند پیوستگی یک تابع یک متغیره، تابع دو متغیره $f(x, y)$ در نقطه (x_0, y_0) پیوسته است هرگاه

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) \text{ موجود و برابر مقدار تابع } f(x, y) \text{ در نقطه } (x_0, y_0) \text{ باشد. به عبارت دیگر:}$$

تعریف ۳.۴

پیوستگی توابع دو متغیره

تابع $f(x, y)$ در نقطه (x_0, y_0) از دامنه f پیوسته نامیده می‌شود، اگر

$$\lim_{x,y \rightarrow x_0,y_0} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

و روی ناحیه $D \subset D_f$ پیوسته است، اگر f در هر نقطه (x_0, y_0) از D پیوسته باشد.

بررسی پیوستگی تابع دو متغیره

مثال ۹

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^2 - 3xy}{\sqrt{x^4 + y^4}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{پیوستگی تابع}$$

حل: با انتخاب مسیر $y = mx$ داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \\ \lim_{x, mx \rightarrow 0,0} f(x, mx) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2m^2x^2 - 3mx^2}{\sqrt{x^4 + m^4x^4}} = \frac{2m^2 - 3m}{\sqrt{1 + m^4}} \end{aligned}$$

که جواب حد فوق به ازای مسیرهای مختلف m متفاوت می‌باشد، لذا تابع فوق حد ندارد، پس در نقطه $(0, 0)$ پیوسته نیست.

بررسی پیوستگی تابع دو متغیره

مثال ۱۰

نشان می دهیم که تابع زیر روی کل $\mathbb{R}^2$ پیوسته است.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 - x^2}{y^3 + x^3} & , \quad x, y \neq -1, 1 \\ \frac{2}{3} & , \quad x, y = -1, 1 \end{cases}$$

حل: در محاسبه حد تابع $f(x, y)$ داریم:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} f(x, y) = \lim_{x,y \rightarrow -1,1} \frac{(y+x)(y-x)}{(y+x)(y^2 - xy + x^2)} = \lim_{x,y \rightarrow -1,1} \frac{y-x}{y^2 - xy + x^2} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y+1}{y^2 + y + 1} = \frac{2}{3}$$

لذا حد تابع $f(x, y)$ موجود و برابر $\frac{2}{3}$ است که این با مقدار $f(x, y)$ در نقطه $(-1, 1)$ برابر است، پس تابع $f(x, y)$ در نقطه $(-1, 1)$ پیوسته است.

■

استفاده از CAS

تعریف توابع چند متغیره همانند توابع یک متغیره در *Maple* و *Mathematica* تعریف می شوند.

(در *Maple*) $> f := x, y \rightarrow x^2 - y^2 / x^2 + y^2 ;$

$$f := x, y \rightarrow \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

(در *Mathematica*) $f[x_, y_] = x^2 - y^2 / x^2 + y^2$

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

رسم توابع دو متغیره همانند رسم رویه ها می باشد، که می توانید از دستورهای ارایه شده در انتهای بخش ۴.۱ استفاده نمایید. همانطور که بیان شد یکی از راه های تجسم یک رویه در عمل رسم منحنی های تراز آن می باشد.

(در *Maple*)

$> \text{contourplot}(-5 * x / (x^2 + y^2 + 1), x = -3..3, y = -3..3, \text{filled} = \text{true})$

در *Maple* برای نمایش منحنی های تراز روی رویه دستور **contourplot3d** جایگزین می شود.

(در *Mathematica*)

$\text{ContourPlot}[-5 x / (x^2 + y^2 + 1), \{x, -3, 3\}, \{y, -3, 3\}];$

🖥 **حد و پیوستگی توابع دو متغیره** را می توان با دستوره های رسم این نرم افزارها حول نقطه حدی بررسی نمود. برای نمونه شکل تابع $f(x,y)$ در حاشیه نشان می دهد که تابع در مبدا حد ندارد. همچنین در این نرم افزارها دستوره های مستقیم نیز برای بررسی حد موجود هستند.

(در *Maple*) $\text{> limit}(f \ x,y , \ x = 0,y = 0 ;$

undefined

(در *Mathematica*)

$\text{> Limit } f \ x,y , x \rightarrow 0,y \rightarrow 0$

برای بررسی حدود در بی نهایت از *infinity* در *Maple* و *Infinity* در *Mathematica* به جای نقطه حدی استفاده می شود.

مجموعه تمرین های بخش ۱.۴

۱. دامنه توابع زیر را بیابید.

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2) \quad \text{a.}$$

$$f(x, y, z) = \ln(25 - 4x^2 - y^2 - z^2) \quad \text{b.}$$

$$f(x, y) = \sqrt{16 - 2x^2 - 4y^2 - 8z^2} + \ln(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \quad \text{c.}$$

۲. برد توابع زیر را بیابید.

$$f(x, y) = e^{x^2 - y} \quad \text{a.}$$

$$f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2} \quad \text{b.}$$

$$f(x, y, z) = x^2 \ln(x - y + z) \quad \text{c.}$$

۳. نمودار توابع زیر را رسم نمایید، سپس از روی شکل دامنه و برد هر یک را از روی نمودار مشخص نمایید.

$$f(x, y) = 1 - x - y \quad \text{a.}$$

$$f(x, y) = 1 - x^2 \quad \text{b.}$$

$$f(x, y) = \sqrt{36 - x^2 - 16y^2} \quad \text{c.}$$

۴. منحنی های تراز توابع زیر را بیابید و برخی از آنها را رسم کنید.

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 \quad \text{a.}$$

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{b.}$$

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{1}{y} - x^2} \quad \text{c.}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & x, y \neq 0, 0 \\ 0, & x, y = 0, 0 \end{cases} \quad \text{d. در مختصات قطبی:}$$

۵. (توصیف رویه با منحنی های تراز) با فرض این که $z \geq 0$ ، معادله $4z^2 = x - z^2 + y - z^2$ را به عنوان تابعی از x و y معرفی می کند. تعدادی از منحنی های تراز این تابع را ترسیم کنید و نمودار تابع را توصیف نمایید.

۶. سطوح تراز توابع زیر را توصیف نمایید.

$$\text{a. } f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 \quad \text{b. } f(x, y, z) = x + y + 3z$$

$$\text{c. } f(x, y, z) = |x| + |y| + |z|$$

۷. (اثبات حد با تعریف) با استفاده از تعریف حد ثابت نمایید.

$$\text{a. } \lim_{(x, y) \rightarrow (2, 1)} (x^2 - y^2) = 3 \quad \text{b. } \lim_{(x, y, z) \rightarrow (1, 1, 1)} (x^3 + y^3 - xyz + z) = 2$$

۸. (وجود حد) با ذکر دلیل مشخص کنید که توابع زیر در مبدأ حد دارند یا نه.

$$\text{a. } \frac{x^3 + xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{b. } \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{c. } \frac{x^9 y}{x^6 + y^2} \quad \text{d. } \frac{x^2 y - xy^2}{x^3 - y^3}$$

۹. (پیوستگی توابع) مشخص کنید که توابع زیر در چه نقاطی از دامنه تعریف شان پیوسته می باشند (با ذکر دلیل).

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x - y}, & x \neq y \\ x + y, & x = y \end{cases} \quad \text{b.} \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + xy}{x^3 + y^3}, & (x, y) \neq (1, -1) \\ \frac{1}{3}, & (x, y) = (1, -1) \end{cases} \quad \text{a.}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{c.}$$

۱۰. (حدود مکرر) ثابت کنید، هرگاه $\lim_{x, y \rightarrow a, b} f(x, y) = L$ و هر دو حدود یک بعدی $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$ و $\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ وجود داشته باشند، آنگاه حدود مکرر موجود و با هم برابر هستند، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} [\lim_{y \rightarrow b} f(x, y)] = \lim_{y \rightarrow b} [\lim_{x \rightarrow a} f(x, y)] = L$$

۱۱. (بررسی عدم وجود حد با حدود مکرر) فرض کنید، اگر $x + y \neq 0$ ، $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$ نشان دهید که:

$$\lim_{y \rightarrow 0} [\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)] = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} [\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)] = 1$$

از تمرین (۱۰)، نتیجه بگیرید که $f(x, y)$ در $(0, 0)$ به حدی میل نمی کند.

۱۲. (برابری حدود مکرر شرط کافی وجود حد نیست) فرض کنید

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + x - y^2}, \quad x^2 y^2 + x - y^2 \neq 0$$

نشان دهید عکس تمرین (۱۰) همیشه درست نیست، یعنی

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)] = \lim_{y \rightarrow 0} [\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)] = 0$$

ولی $f(x, y)$ وقتی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ به حدی میل نمی کند.

۱۳. (برابری حدود مکرر شرط لازم وجود حد نیست) فرض کنید:

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

نشان دهید که وقتی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ ، آنگاه $f(x, y) \rightarrow 0$ ولی

$$\lim_{y \rightarrow 0} [\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)] \neq \lim_{x \rightarrow 0} [\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)]$$

توضیح دهید، چرا این با تمرین (۱۰) تناقض ندارد.

۱۴. (وجود حد با اینکه حدود مکرر موجود نمی باشند) نشان دهید که برای تابع $f(x, y) = x + y \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ دو حد مکرر

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$$

موجود نیستند ولی $\lim_{x, y \rightarrow 0, 0} f(x, y) = 0$.

۱۵. (شرط برقراری پیوستگی) به ازای چه مقادیری از r تابع زیر در تمام نقاط $\mathbb{R}^3$ پیوسته می شود.

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x + y + z^r}{x^2 + y^2 + z^2}, & x, y, z \neq 0, 0, 0 \\ 0, & x, y, z = 0, 0, 0 \end{cases}$$