

بخش ۳.۳ دستگاه TNB، انحنا و تاب

مسیر حرکت ذره‌ای روی یک منحنی مانند C در فضا دارای آزادی حرکت بیشتری نسبت به منحنی‌ها در صفحه می‌باشد، چون مسیر حرکت در فضا علاوه بر پیچ خوردن به چپ یا راست، می‌تواند همزمان به بالا یا پایین نیز تاب بخورد. در عمل برای بررسی دقیق‌تر وضعیت مسیر حرکت اجسام سه بردار دو به دو متعامد را معرفی می‌نماییم که همراه با منحنی در فضا حرکت می‌کنند. اگر این سه بردار و مشتق‌های آنها موجود باشند اطلاعات سودمندی درباره مسیر حرکت به دست می‌دهند.

دستگاه TNB

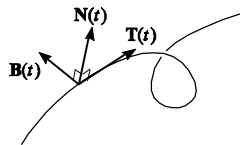
فرض کنید $r(t)$ یک منحنی فضایی باشد، در اینصورت بردار زیر بردار مماس یکانی بر منحنی در هر نقطه می‌باشد:

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} \quad (1)$$

چون بردار مماس T یکانی است (یعنی $|T| = 1$) پس T' بر بردار مماس T عمود است. در نتیجه بردار یکانی

$$N(t) = \frac{T'(t)}{|T'(t)|} \quad (2)$$

بر T عمود است که بردار **قائم اول** منحنی نامیده می‌شود.



شکل ۱ - دستگاه مختصات متحرک

همچنین با توجه به خاصیت ضرب خارجی، بردار یکانی زیر بردارهای T و N عمود است.

$$B(t) = T(t) \times N(t) \quad (3)$$

که به بردار **قائم دوم** منحنی معروف است (شکل ۱). سه تایی T ، N و B که یک پایه برای فضای $\mathbb{R}^3$ تشکیل می‌دهند، به دستگاه TNB یا **کنج فرنه** معروف هستند.

تعیین دستگاه TNB یک منحنی

مثال ۱

دستگاه TNB برای منحنی زیر را می‌یابیم:

$$r(t) = t + \cos t \, i + t - \cos t \, j + \sqrt{2} \sin t \, k$$

حل: ابتدا مشتق تابع برداری را اندازه آن را می‌یابیم.

$$r'(t) = 1 - \sin t \, i + 1 + \sin t \, j + \sqrt{2} \cos t \, k, \quad |r'(t)| = 2$$

با استفاده از رابطه (۱) داریم:

$$T(t) = \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{1}{2} (1 - \sin t \, i + 1 + \sin t \, j + \sqrt{2} \cos t \, k)$$

اکنون مشتق بردار مماس و اندازه آن را در هر نقطه t برای تعیین عمود اول، یعنی N محاسبه می‌کنیم:

$$T' t = \frac{1}{2} - \cos ti + \cos tj - \sqrt{2} \sin tk, \quad |T' t| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

در نتیجه قایم اول از رابطه (۲) در هر نقطه t برابر است با:

$$N t = \frac{T' t}{|T' t|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos ti + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos tj - \sin tk$$

و در نهایت قایم دوم در هر نقطه t به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} B t &= T t \times N t \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 - \sin t & 1 + \sin t & \sqrt{2} \cos t \\ -\cos t & \cos t & -\sqrt{2} \sin t \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1 + \sin t}{2} i - \frac{1 - \sin t}{2} j + \frac{\cos t}{\sqrt{2}} k \end{aligned}$$

■

انحنا و تاب

برای بررسی دقیق‌تر رفتار حرکت یک ذره در فضا، دستگاه متحرک TNB اطلاعات خوبی درباره چگونگی حرکت ذره به ما می‌دهد. دو رفتار مهم در هر نقطه از منحنی، انحنا k و تاب τ می‌باشد. ملاحظه خواهید نمود که این دو پارامتر یک ارتباط جالب نیز بین سه تایی T ، N و B ایجاد می‌کنند.

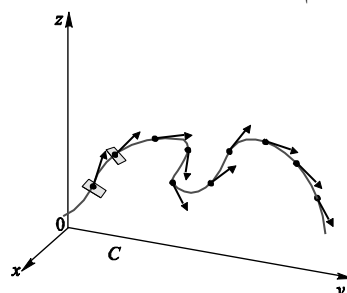
■ انحنا

برای بررسی اینکه ذره تا چه اندازه به چپ یا راست متمایل می‌شود به عبارت دیگر منحنی با چه سرعتی تغییر جهت می‌دهد، از تعریف **انحنا یا خمیدگی** استفاده می‌کنیم.

منحنی C با معادله پارامتری r را می‌توان نسبت به فاصله جهت‌دار s پارامتری نمود. به این ترتیب از رابطه (۱) نتیجه می‌شود که بردار مماس یکانی به صورت زیر است:

$$T s = \frac{dr s}{ds}$$

در هر نقطه P از منحنی C ، آهنگ چرخش صفحه قایم، انحنا یا خمیدگی منحنی را می‌دهد. چون بردار مماس T بر صفحه قایم عمود است، تعریف معادل زیر را برای انحنا داریم (شکل ۲)



شکل ۲- تعبیر هندسی انحنا

تعریف ۵.۳ انحنا یا خمیدگی منحنی

در هر نقطه P از منحنی C ، اندازه آهنگ چرخش T نسبت به فاصله جهت دار s ، انحنا یا خمیدگی نامیده می شود. یعنی:

$$k = \left| \frac{dT}{ds} \right|$$

اگر پارامتر t جایگزین در فرمول فوق شود، انحنا آسانتر محاسبه می شود. از قاعده زنجیره ای داریم:

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt} \frac{dt}{ds}, \quad k = \left| \frac{dT}{ds} \right| = \left| \frac{dT/dt}{ds/dt} \right|$$

با توجه به رابطه $\frac{ds}{dt} = |r' t|$ داریم:

$$k t = \left| \frac{T' t}{r' t} \right| \quad (۴)$$

مثال ۲ محاسبه انحنا

نشان می دهیم که انحنا یک خط صفر و انحنا یک دایره به شعاع a همواره ثابت $1/a$ است.

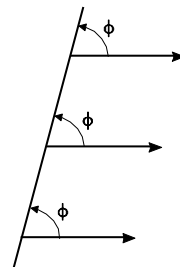
حل: با توجه به شکل (۳) و شکل (۴) مساله به طور طبیعی برقرار است. برای خط با معادله برداری

$$r t = x_0 + at i + y_0 + bt j + z_0 + ct k$$

$$T t = \frac{r' t}{|r' t|} = \frac{ai + bj + ck}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

که با توجه به رابطه (۴) انحنا عبارت است از:

$$k t = \left| \frac{T' t}{r' t} \right| = \frac{0}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$



شکل ۳- انحنا خط راست صفر است

برای یک دایره در صفحه با معادله برداری

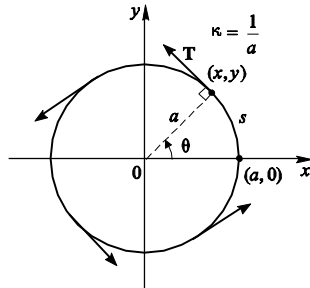
$$r t = a \cos t i + b \sin t j$$

داریم:

$$T t = \frac{r' t}{|r' t|} = \frac{-a \sin t i + a \cos t j}{a} = -\sin t i + \cos t j$$

بنابراین با توجه به اینکه $|T' t| = 1$ از رابطه (۴) انحنا برابر است با ثابت:

$$k_t = \frac{T'_t}{|r'_t|} = \frac{1}{a}$$



شکل ۴- انحنا دایره ثابت است

یادداشت ۱

شعاع انحنا یک منحنی از رابطه زیر به دست می آید:

$$\rho = 1/k$$

یادداشت ۲

انحنا یک منحنی بر حسب r_t

انحنا یک منحنی داده شده با تابع برداری r_t عبارت است از:

$$k_t = \frac{|r'_t \times r''_t|}{|r'_t|^3}$$

■ تاب

یکی دیگر از اطلاعات ارزشمند در حرکت یک جسم در فضا، میزان تاب خوردن آن می باشد که اغلب به همان **تاب** معروف است.

تعریف ۶.۳

تاب منحنی

در هر نقطه s از منحنی C ، آهنگ تغییر جهت بردار قایم دوم B نسبت به فاصله جهت دار s تاب نامیده می شود. یعنی:

$$\tau = \left| \frac{dB}{ds} \right| \quad (5)$$

یادداشت ۳

تاب یک منحنی بر حسب r_t

متداول ترین فرمول برای محاسبه تاب بر حسب تابع برداری r_t عبارت است از:

$$\tau = \pm \frac{r'_t \times r''_t \cdot r'''_t}{|r'_t \times r''_t|^2} \quad (6)$$

علامت طوری انتخاب می‌شود که $\tau \geq 0$.

با این تفسیر خمی که در صفحه قرار داشته باشد، تاب آن صفر است. یا به طور عکس خمی که تاب آن صفر باشد، به این معنی است که در یک صفحه ثابت در فضا قرار دارد، چون بردار قائم دوم آن طبق (۵) ثابت است.

محاسبه تاب

مثال ۳

تاب مارپیچ دایره‌ای زیر را به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

حل: واضح است که

$$\mathbf{r}'(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''(t) = -\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'''(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

همچنین داریم:

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k} \Rightarrow |\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \sqrt{2}$$

و

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \cdot \mathbf{r}''' = \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t & 1 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

سپس طبق فرمول (۶) تاب برابر $\tau = \frac{1}{2}$ است. مشخص بود که این حرکت منظم تاب ثابتی داشته باشد.

■

استفاده از CAS

تابع برداری را می‌توان در محیط *Maple* و *Mathematica* معرفی و به تجزیه و تحلیل رفتار آن پرداخت.

(در *Maple*)

```
> R := t -> cos t, sin t, t;
```

```
> map lim, R t, t = 0;
```

```
1, 0, 0
```

```
> map diff, R t, t;
```

```
-sin t, cos t, 1
```

> with plots :

> spacecurve[R t , t = 0..4 * Pi ;

که به این ترتیب یک مارپیچ فضایی در محیط *Maple* رسم می شود.

(در *Mathematica*)

$R[t_] = \{\cos t, \sin t, t\};$

$\text{limit}[R[t], t \rightarrow 0]$

$\{1, 0, 0\}$

$\text{ParametricPlot3D}[R[t], \{t, 0, 4\pi\}]$

$R'[t]$

$\{-\sin t, \cos t, 1\}$

با توجه به این دستورات و دستورهای ارائه شده در بردارها می توان به محاسبه طول مسیر پیموده شده ، سرعت ، شتاب همچنین محاسبه تاب، انحنای کنج *TNB* پرداخت.

مجموعه تمرین‌های بخش ۳.۳

۱. (کنج فونه) در تمرین‌های زیر سه تایی T ، N و B را بیابید.

$$\mathbf{a} \text{ در } \left(1, \frac{2}{3}, 1\right) \quad \mathbf{r}(t) = \left\langle t^2, \frac{2}{3}t^2, t \right\rangle \quad \mathbf{b} \text{ در } (1, 0, 1) \quad \mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^t \sin t, e^t \cos t \rangle$$

۲. (حرکت با شتاب صفر) نشان دهید که اگر مولفه قایم شتاب یک ذره در حال حرکت صفر باشد مسیر حرکت خط راست است.

۳. (انحنا و شعاع انحنا یک منحنی بر حسب s) اگر $a > 0$ انحنا و شعاع انحنا منحنی زیر را بیابید.

$$\mathbf{r} = a \cos\left(\frac{s}{a}\right) \mathbf{i} + a \sin\left(\frac{s}{a}\right) \mathbf{j}$$

۴. انحنا را در تمرین‌های زیر بیابید.

$$\mathbf{a} \quad \mathbf{r}(t) = t^2 \mathbf{i} + t \mathbf{k} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{r}(t) = \langle 2 \sin t, 5t, 2 \cos t \rangle$$

۵. (فرمول پارامتری انحنا در صفحه) ثابت کنید، یک منحنی در صفحه با معادله پارامتری $x = f(t)$ و $y = g(t)$ دارای

$$k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^{\frac{3}{2}}$$

انحنا زیر است.

پس انحنا منحنی $x = t \sin t$ و $y = t \cos t$ را بیابید.

۶. تاب τ را برای منحنی‌های داده شده در تمرین‌های زیر بیابید.

$$\mathbf{a} \quad \mathbf{r}(t) = e^t \sin t \mathbf{i} + e^t \cos t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{r}(t) = \frac{4}{9} (1+t)^{\frac{3}{2}} \mathbf{i} + \frac{4}{9} (1-t)^{\frac{3}{2}} \mathbf{j} + \frac{1}{3} t \mathbf{k}$$

۷. (کنج فرنه انحنا و تاب) مطلوب است T ، N ، B و τ در مورد خم‌های زیر در $t = 0$

$$\mathbf{a} \quad \mathbf{r}(t) = \sin t \cos t \mathbf{i} + \sin^2 t \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k} \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{r}(t) = e^t \sin 2t \mathbf{i} + e^t \cos 2t \mathbf{j} + 2e^t \mathbf{k}$$

$$\mathbf{c} \quad \mathbf{r}(t) = 6 \sin 2t \mathbf{i} + 6 \cos 2t \mathbf{j} + 5t \mathbf{k}$$

۸. (منحنی با انحنا و تاب برابر) نشان دهید که انحنا و تاب منحنی $\mathbf{r}$ زیر در هر نقطه برابر $\sqrt{2} e^t + e^{-t}$ هستند.

$$\mathbf{r}(t) = e^t \mathbf{i} + \sqrt{2} t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}$$

۹. (موشک و ضد موشک) یک موشک با تندی ثابت v_0 به سمت هدف نامعلومی در حرکت است، فقط موشک در ۴ مایلی، یک لحظه رویت شده دوباره ناپدید شده است، در همان لحظه ضد موشک با سرعت ۳ برابر روی چه منحنی هم صفحه با مسیر موشک اصلی شلیک شود تا موشک را خنثی کند.

۱۰. (طرح جاده و ریل) شکل یک جاده در یک محدوده با توجه به شیب زمین آن طوری است که به ازای $x \leq 0$ ، $y = 0$ و به ازای $x \geq 1$ ، $y = x - 1$ می‌باشد. در محدوده $0 \leq x \leq 2$ با چند جمله‌ای از کمترین درجه $y = f(x)$ چگونه ساخته شود تا ماشین‌ها انحناء جاده را در این محدوده احساس نکنند.

راهنمایی: با توجه به فرمول انحناء در نقاط ناپیوستگی باید طرفین f ، f' و f'' برابر باشند.