

بخش ۲.۳ حساب دیفرانسیل توابع برداری

در بخش قبلی دیدید که توابع برداری می‌توانند توصیف حرکت اجسام در فضا باشند. در این بخش با کمک حساب دیفرانسیل توابع برداری، توصیف‌های جالبی از رفتار این حرکت‌ها در فضا به دست می‌آیند.

حد و پیوستگی توابع برداری

حد یک تابع برداری در نقطه t_0 را می‌توان با حد توابع مولفه‌ای متناظر در نقطه t_0 تعریف نمود.

تعریف ۲.۳

حد توابع برداری

اگر $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ یک تابع برداری باشد آنگاه:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t \rightarrow t_0} f(t), \lim_{t \rightarrow t_0} g(t), \lim_{t \rightarrow t_0} h(t) \right\rangle \quad (1)$$

یعنی حد تابع برداری $\mathbf{r}$ در نقطه $t = t_0$ ، با حد توابع مولفه‌ای متناظر در نقطه t_0 تعریف می‌شود.

مثال ۱

محاسبه حد یک تابع برداری

حد $\lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t)$ را بررسی می‌کنیم در صورتی که

$$\mathbf{r}(t) = 1 + t^3 \mathbf{i} + te^{-t^2} \mathbf{j} + \frac{\sin t}{t} \mathbf{k}$$

حل: با توجه به تعریف ۱.۳ داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t) &= \lim_{t \rightarrow 0} 1 + t^3 \mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow 0} te^{-t^2} \mathbf{j} + \left(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \right) \mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \mathbf{k} \end{aligned}$$

تعریف ۳.۳

پیوستگی توابع برداری

تابع برداری $\mathbf{r}$ در نقطه $t = t_0$ از دامنه پیوسته است، اگر حد $\mathbf{r}(t)$ در $t = t_0$ موجود باشد

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) \quad (2)$$

تابع برداری $\mathbf{r}$ در بازه I پیوسته است اگر در هر نقطه از بازه پیوسته باشد. از این تعریف نتیجه می‌شود که یک تابع برداری $\mathbf{r}$ در نقطه $t = t_0$ پیوسته است اگر و فقط اگر مولفه‌های متناظر در نقطه $t = t_0$ پیوسته باشند. برای مثال تابع معرفی شده در مثال (۱) همه جا پیوسته است به جز نقطه $t = 0$ ، چون در این نقطه مؤلفه سوم، یعنی $\frac{\sin t}{t}$ با وجود حد، پیوسته نمی‌باشد مگر اینکه این مؤلفه به صورت زیر تعریف شود

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

مشتق توابع برداری

با توجه به اینکه در عمل، مکان جسم متحرک در هر لحظه با تابع برداری نمایش داده می شود، تغییرات تابع برداری شامل اطلاعات مهمی از قبیل سرعت، شتاب و غیره می باشد، که به کمک مفهوم مشتق های برداری می توان آنها را بررسی نمود.

تعریف ۴.۳

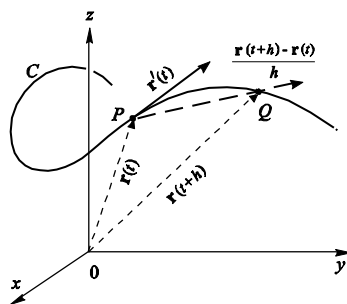
مشتق تابع برداری

مشتق تابع برداری $\mathbf{r}$ با شرط وجود حد، به صورت زیر تعریف می شود:

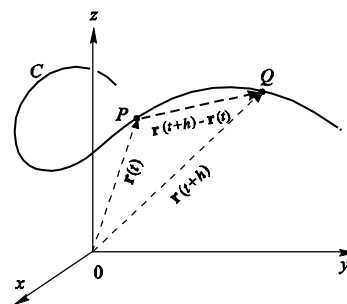
$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} \quad (3)$$

تعبیر هندسی

مطابق شکل (۱)، اگر P و Q وضعیت بردارهای $\mathbf{r}(t)$ و $\mathbf{r}(t+h)$ باشند بردار $\overline{PQ}$ نمایش بردار $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ به منحنی نمو تابع $\mathbf{r}$ می باشد و برای $h > 0$ بردار $\frac{\Delta \mathbf{r}}{h}$ بردار همسوروی منحنی در نقطه Q است (شکل ۲)، که اگر $h \rightarrow 0$ بر روی خط مماس در نقطه P قرار می گیرد، به این دلیل **بردار مماس** نیز می گویند.



شکل ۲- تعبیر هندسی مشتق منحنی در فضا



شکل ۱- تعبیر هندسی نمو منحنی در فضا

محاسبه مشتق توابع برداری با روش مستقیم با فرمول (۳) مشکل می باشد، قضیه زیر یک روش معادل ساده تر بر حسب مؤلفه های $\mathbf{r}$ را به دست می دهد.

قضیه ۱.۳

مشتق تابع برداری با توابع مؤلفه ای

اگر توابع مؤلفه ای $f(t)$ و $g(t)$ و $h(t)$ در تابع برداری $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ مشتق پذیر باشند، آنگاه $\mathbf{r}'(t)$ مشتق پذیر است و داریم:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle \quad (4)$$

مثال ۲

محاسبه مشتق تابع برداری و بردار مماس

مشتق تابع برداری $\mathbf{r}(t) = \sin 3t \mathbf{i} + e^{-2t} \mathbf{j} + \frac{1}{t^2} \mathbf{k}$ را به دست می آوریم و بردار مماس در نقطه $t = 1$ را می یابیم.

حل: با توجه به رابطه (۴) داریم:

$$\mathbf{r}'(t) = 3 \cos 3t \mathbf{i} - 2e^{-2t} \mathbf{j} + \left(-\frac{2}{t^3}\right) \mathbf{k}$$

بردار مماس در نقطه $t = 1$ همان $\mathbf{r}'(t)$ در $t = 1$ یعنی $\mathbf{r}'(t) = 3\cos 3\mathbf{i} - 2e^{-2}\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ است.

■ سرعت و شتاب

فرض کنید مسیر حرکت یک ذره در فضا توسط بردار وضعیت $\mathbf{r}(t)$ در زمان t مشخص شود. بردار:

$$\frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

سرعت حرکت ذره را در طول منحنی $\mathbf{r}(t)$ تقریب می‌زند. که سرعت متوسط رد فاصله زمانی به طول است. لذا حد آن بردار سرعت $\mathbf{r}(t)$ در زمان می‌باشد، یعنی

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) \quad (5)$$

بنابراین بردار سرعت در هر نقطه، مماس بر مسیر حرکت در جهت بردار مماس است. همانند حرکت در صفحه شتاب یک ذره با مشتق سرعت تعریف می‌شود:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \mathbf{r}''(t) \quad (6)$$

محاسبه بردار سرعت و شتاب

مثال ۳

برای حرکت یک ذره بابر بردار وضعیت $\mathbf{r}(t) = \langle 1+t, t^2, -2t \rangle$ بردار سرعت و شتاب و اندازه سرعت را می‌یابیم.

حل: با توجه به تعریف‌ها داریم:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 1\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = 2\mathbf{j}$$

اندازه بردار سرعت در هر لحظه از زمان عبارت است از:

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 4} = \sqrt{5 + 4t^2}$$

شرط عمود بودن بردار سرعت و شتاب

مثال ۴

در فاصله زمانی داده شده لحظاتی را به دست می‌آوریم که بردارهای سرعت و شتاب مسیر حرکت $\mathbf{r}(t)$ ، برهم عمود باشند.

$$\mathbf{r}(t) = \langle t - \sin t, 1 - \cos t \rangle \quad 0 < t < 2\pi$$

حل: با توجه به رابطه (۵) و (۶)

$$\mathbf{v}(t) = 1 - \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j}$$

شرط اینکه بردار سرعت $\mathbf{v}(t)$ بر بردار $\mathbf{a}(t)$ عمود باشد آن است که $\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = 0$ یعنی:

$$\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t) = 1 - \cos t \sin t + \sin t \cos t = 0$$

$$\Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow t = 0, \pi, 2\pi$$

طول قوس

در بعضی از مسایل کاربردی لازم است طول قسمتی از مسیری را که متحرک در یک فاصله زمانی طی می کند، محاسبه کنیم. فرض کنید ذره ای در مسیر $\langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ در حال حرکت است. در صورتیکه f' و g' و h' پیوسته باشند، طول مسافتی که ذره فوق از مکان a تا مکان b می پیماید را **طول قوس** گویند و از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2 + h'(t)^2} dt \quad (7)$$

محاسبه طول قوس در فضا

مثال ۵

طول قوس منحنی مارپیچ دایره ای با معادله برداری $\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$ در فاصله زمانی ۰ تا 2π می یابیم:

حل: چون $\mathbf{r}'(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}$ داریم:

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{-\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

لذا:

$$L = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi$$

■

مجموعه تمرین‌های بخش ۲.۳

۱. حد توابع برداری زیر را بیابید.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{e^t - 1}{t}, 1 + t^{\frac{1}{t}}, \ln t + 1 \right\rangle \mathbf{a} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \left(e^{-t} \mathbf{i} + \frac{t+1}{t-1} \mathbf{j} + \tan^{-1} t \mathbf{k} \right) \mathbf{b}$$

۲. (پیوستگی تابع برداری) مشخص کنید که تابع برداری زیر به ازای چه مقادیری از t پیوسته است.

$$\mathbf{r}(t) = \langle t^2 + 1, \sqrt{t}, \ln 3 - t \rangle$$

۳. سرعت، شتاب و اندازه سرعت برای یک ذره با معادله برداری در نقطه داده شده، در هر یک از تمرین‌های زیر را بیابید.

$$\mathbf{r}(t) = e^{-t} \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} \quad \text{در } t = 0 \quad \mathbf{a}$$

$$\mathbf{r}(t) = t \sin t \mathbf{i} + t \cos t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k} \quad \text{در } t = \pi \quad \mathbf{b}$$

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \tan t \mathbf{j} \quad \text{در } t = \frac{\pi}{2} \quad \mathbf{c}$$

۴. (تعامل سرعت و شتاب) بردار مکان $\mathbf{r}(t)$ جسمی در لحظه است. لحظه یا لحظاتی را در بازه زمانی مفروض بیابید که بردارهای سرعت و شتاب بر هم عمود باشند.

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + 5 \cos t \mathbf{j} + 3 \sin t \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

۵. (محاسبه طول قوس) در تمرین‌های زیر طول منحنی داده شده را بیابید.

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \mathbf{a}$$

$$\mathbf{r}(t) = \langle 5t, 2 \sin t, 2 \cos t \rangle \quad -10 \leq t \leq 10 \quad \mathbf{b}$$

$$\mathbf{r}(t) = t \cos t \mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \mathbf{c}$$