

توابع برداری

۱.۳ توابع برداری و منحنی‌های فضایی

۲.۳ حساب دیفرانسیل توابع برداری

۳.۳ دستگاه TNB ، انحنا و تاب

مقدمه

- توابعی که تا کنون معرفی و به کار برده شده‌اند، توابع با مقادیر حقیقی بوده‌اند. توابعی که در این فصل مطالعه می‌نماییم با مقادیر برداری هستند، یعنی به هر نقطه (اسکالر) از دامنه یک بردار نسبت می‌دهند. این قبیل توابع برای توصیف منحنی‌ها و رویه‌ها در فضا مهم هستند. همچنین توابع برداری برای توصیف حرکت اجسام در فضا به کار می‌روند.

بخش ۱.۳ توابع برداری و منحنی های فضایی

می دانید در حالت کلی، یک تابع قانونی است که به هر عنصر از دامنه یک عنصر در برد نسبت می دهد. پس یک تابع با **مقادیر برداری** یا **تابع برداری** که دامنه آن یک مجموعه از اعداد حقیقی و برد آن مجموعه ای از بردارها باشد، به صورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۱.۳ تابع برداری

هر تابع $r: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ که دامنه آن در $\mathbb{R}$ و برد آن در $\mathbb{R}^n$ باشد یک تابع برداری نامیده می شود. اگر $x \in I$ متغیر مستقل باشد، آنگاه مقدار تابع برداری $r(x)$ به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$r(x) = \langle f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \rangle \quad (1)$$

که در آن f_i ها به ازای $i = 1, 2, \dots, n$ توابع حقیقی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ می باشند و به **توابع مؤلفه ای** معروف هستند.

به دلیل اهمیت کاربردی **تابع برداری سه بعدی** r که از (۱) به ازای $n = 3$ به دست می آید، داریم:

$$r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad (2)$$

در اغلب کاربردها متغیر مستقل t به عنوان پارامتر زمان می باشند.

■ دامنه تابع برداری

اشتراک دامنه توابع مؤلفه ای متناظر، دامنه تابع برداری را تشکیل می دهد.

مثال ۱ دامنه تابع برداری

دامنه تابع برداری زیر را می یابیم:

$$r(t) = \langle t^3, \ln(3-t), \sqrt{t} \rangle$$

حل: دامنه تابع برداری r شامل همه مقادیر $t \in \mathbb{R}$ می باشد که در آن مؤلفه های $f(t) = t^3$ ، $g(t) = \ln(3-t)$ و $h(t) = \sqrt{t}$ تعریف شده اند، یعنی:

$$\text{دامنه } f \quad \text{دامنه } g \quad \text{دامنه } h$$

$$D_{r(t)} = \mathbb{R} \cap (-\infty, 3) \cap [0, +\infty) = [0, 3)$$

■ نمودار توابع برداری

یک ارتباط نزدیک بین توابع برداری و منحنی ها در فضا وجود دارد، به این صورت که اگر t_0 یک نقطه از ناحیه تعریف شده تابع برداری r باشد، آنگاه:

$$r(t_0) = \langle f(t_0), g(t_0), h(t_0) \rangle$$

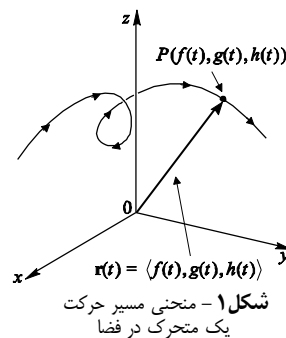
یک بردار ثابت در فضا می باشد که موقعیت نقطه $P_0(x_0, y_0, z_0)$ با $x_0 = f(t_0)$ ، $y_0 = g(t_0)$ و $z_0 = h(t_0)$ را مشخص می نماید. مجموعه C تشکیل شده از همه نقاط x, y, z به صورت:

$$x = f(t), y = g(t), z = h(t) \quad (3)$$

که t مقداری در فاصله I باشد، یک **منحنی فضایی** نامیده می‌شود. همچنین معادلات (۳) **معادلات پارامتری** c و t یک پارامتر نامیده می‌شوند. می‌توانید تجسم نمایید که مجموعه c اثر حرکت یک ذره در هر لحظه از زمان t است که در موقعیت $f(t), g(t), h(t)$ قرار دارد. اکنون می‌توان $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ را بردار وضعیت ذره در هر لحظه t در نظر گرفت (شکل ۱). به این ترتیب منحنی‌ها در صفحه رانیز می‌توان با علامت برداری با حذف یکی از توابع مولفه‌ای نشان داد:

$$r(t) = \langle f(t), g(t) \rangle = f(t)i + g(t)j$$

که در آن $i = \langle 1, 0 \rangle$ و $j = \langle 0, 1 \rangle$ می‌باشند



رسم یک تابع برداری

مثال ۲

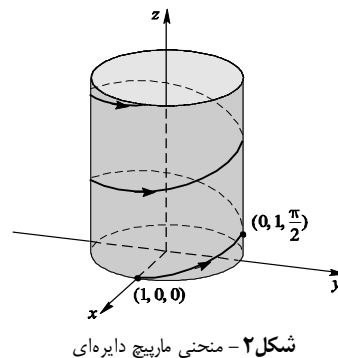
منحنی تابع برداری زیر را رسم می‌کنیم

$$r(t) = \cos t i + \sin t j + t k$$

حل: معادله پارامتری این منحنی عبارت است از:

$$x = \cos t, y = \sin t, z = t$$

چون $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ ، منحنی روی استوانه دایره‌ای $x^2 + y^2 = 1$ قرار دارد. نقطه x, y, z به طور مستقیم با $z = t$ بالای نقطه $x, y, 0$ قرار می‌گیرد که نشان دهنده حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت روی دایره $x^2 + y^2 = 1$ در صفحه xy است، در نتیجه C یک **منحنی مارپیچ** دورانی رو به بالای استوانه فوق با افزایش t می‌باشد. منحنی در شکل (۲) نشان داده شده که به **منحنی فنری** نیز معروف است.



تعیین منحنی حاصل از تقاطع صفحه با استوانه

مثال ۳

ضابطه تابع برداری که نشان دهنده منحنی محل تقاطع صفحه $y + z = 2$ با استوانه $x^2 + y^2 = 1$ را می‌یابیم.

حل: شکل (۳) تقاطع صفحه با استوانه را نشان می دهد، همان طور که ملاحظه می نمایید منحنی C حاصل از محل تقاطع آنها

یک بیضی است. تصویر C در صفحه xy ، دایره $x^2 + y^2 = 1$ با $z = 0$ است، یعنی:

$$x = \cos t, y = \sin t, z = 0 \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

از معادله صفحه داریم:

$$x = 2 - y = 2 - \sin t$$

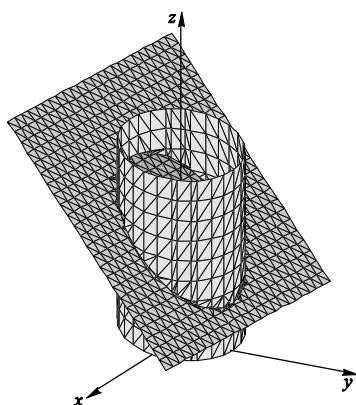
بنابراین معادله پارامتری برای بیضی C به صورت زیر به دست می آید:

$$x = \cos t, y = \sin t, z = 2 - \sin t \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

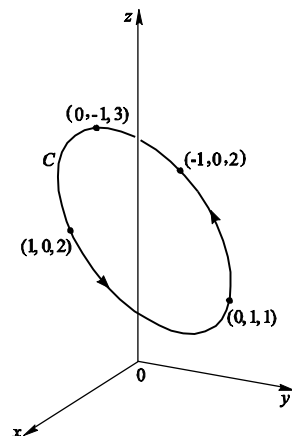
در نتیجه معادله برداری متناظر عبارت است از:

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + (2 - \sin t) \mathbf{k} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

جهت حرکت C نیز در شکل (۴) با افزایش نشان داده شده است.



شکل ۳- منحنی حاصل از برخورد استوانه با یک صفحه



شکل ۴- بیضی حاصل از برخورد دو رویه در شکل (۳)

مجموعه تمرین های بخش ۱.۳

۱. (دامنه توابع برداری) در تمرین های زیر دامنه تابع برداری را بیابید.

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t}{1-t} \mathbf{i} + e^{-2t} \mathbf{j} + \ln t \mathbf{k} \quad \mathbf{a} \quad \mathbf{r}(t) = \langle t^2, \sqrt{t-2}, \sqrt{t-3} \rangle$$

۲. (توصیف معادله پارامتری) در تمرین های زیر معادله پارامتری داده شده را توصیف کنید.

$$x = \cos 4t, y = \sin 4t, z = t \quad \mathbf{b} \quad x = \sin t, y = \cos t, z = \ln t \quad \mathbf{a}$$

$$x = \cos t, y = \sin t, z = \sin 5t \quad \mathbf{c}$$

۳. (رسم منحنی های برداری) در تمرین های زیر منحنی برداری داده شده را رسم و جهت آن را مشخص کنید.

$$\mathbf{r}(t) = \langle 3, \sin t, \cos t \rangle \quad \mathbf{b} \quad \mathbf{r}(t) = \langle t^4, 1+t \rangle \quad \mathbf{a}$$

$$\mathbf{r}(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \sqrt{2} \sin t \mathbf{k} \quad \mathbf{d} \quad \mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + t \mathbf{k} \quad \mathbf{c}$$

۴. (دو رویه مشترک در یک منحنی) نشان دهید معادله پارامتری $x = \sin t$ و $y = \cos t$ و $z = \sin^2 t$ محل اشتراک

رویه های $z = x^2$ و $x^2 + y^2 = 1$ است، با این واقعیت رویه های داده شده را بیابید.

۵. (منحنی حاصل از تقاطع دو رویه) در تمرین های زیر یک منحنی که نمایش تقاطع رویه های داده شده باشد را بیابید.

$$\mathbf{a} \quad \text{مخروط } z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ با صفحه } z = 1 + y$$

$$\mathbf{b} \quad \text{سه می گون } z = 4x^2 + y^2 \text{ با استوانه سهمی شکل } y = x^2$$

$$\mathbf{c} \quad \text{استوانه } x^2 + 4y^2 = 1 \text{ با صفحه } 3x + 2y + z = 4$$

$$\mathbf{d} \quad \text{سطح } x^2 + y + z = 2 \text{ با سطح } xy + z = 1$$

۶. (بیضی مایل در فضا) یک ذره در فضا طبق معادله برداری زیر حرکت می کند

$$\mathbf{r}(t) = 4 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} + 4 \cos t \mathbf{k}$$

نشان دهید مسیر حرکت یک بیضی است، صفحه حاوی آن را بیابید.