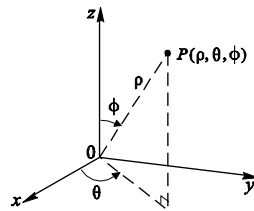


بخش ۳.۲ دستگاه مختصات کروی

هر نقطه $P(x, y, z)$ در دستگاه مختصات کروی مطابق شکل (۱) به صورت p, θ, ϕ می‌باشد، به طوری که فاصله نقطه P تا مبدأ است (یعنی $|OP|$)، θ همان زاویه در مختصات استوانه‌ای است و ϕ زاویه بین خط OP با محور z می‌باشد. توجه کنید:

$$P \geq 0, \quad 0 \leq \phi < \pi$$



شکل ۱ - دستگاه مختصات کروی

دستگاه مختصات کروی زمانی مفید است که جسم نسبت به یک نقطه تقارن داشته باشد. به عنوان یک مثال ساده، $\rho = c$ معادله یک کره است. به همین دلیل مختصات کروی نامگذاری شده است. رابطه بین مختصات دکارتی و کروی مطابق شکل (۱) می‌باشد از مثلث OPP' داریم:

$$z = \rho \cos \phi, \quad r = \rho \sin \phi$$

با توجه به مختصات قطبی $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ تبدیل از مختصات کروی به دکارتی به صورت زیر است.

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi \quad (۱)$$

همچنین فرمول فاصله به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (۲)$$

از این معادلات می‌توان برای تبدیل مختصات دکارتی به کروی نیز استفاده نمود.

تبدیل مختصات دکارتی و کروی

مثال ۱

(a) نقطه $2, \pi/4, \pi/3$ را رسم می‌کنیم و مختصات دکارتی آنها را می‌یابیم.

(b) نقطه $0, 2\sqrt{3}, 2$ را به مختصات کروی تبدیل می‌نماییم.

حل (a): نقطه مورد نظر در شکل (۲۱) نشان داده شده است. از معادله (۹) داریم:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta = 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta = 2 \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$z = \rho \cos \phi = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1$$

بنابراین نقطه متناظر در مختصات دکارتی می‌باشد.

(b): از معادله (۱۰) داریم:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{0 + 12 + 4} = 4$$

و معادله (۹) نتیجه می دهد :

$$\cos \phi = \frac{z}{\rho} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\rho \sin \phi} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

بنابراین مختصات کروی نقطه متناظر $4, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ است.

توصیف رویه در مختصات کروی

مثال ۲

معادله هندلولی گون دو پارچه $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ را در مختصات کروی نمایش می دهیم. سپس معادله کره $\rho = \sin \theta \sin \phi$ را در مختصات دکارتی می نویسیم.

حل : با جایگزینی عبارت رابطه (۱) در معادله داده شده داریم :

$$\rho^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta - \rho^2 \cos^2 \phi = 1$$

یا

$$\rho^2 \sin^2 \phi \cos 2\theta - \cos^2 \phi = 1$$

اکنون معادله $\rho = \sin \theta \sin \phi$ را در مختصات دکارتی می نویسیم. از معادلات (۱) و (۲) داریم :

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 = \rho \sin \theta \sin \phi = y$$

یا

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$$

که یک کره به مرکز $0, \frac{1}{2}, 0$ و شعاع $\frac{1}{2}$ است.

استفاده از CAS

 **رسم در مختصات استوانه‌ای و کروی** این دستور را می توانید برای مختصات استوانه‌ای و کره‌ای نیز استفاده نمایید.

همچنین می توانید با بار نمودن بسته **Parametric Plot3D**، از دستورات مستقیم، **CylindricalPlot3D** در مختصات استوانه‌ای و **SphericalPlot3D** در مختصات کروی نیز استفاده کنید.

برای رسم در مختصات استوانه‌ای و کروی در *Maple* از دستورات زیر استفاده می شود.

> cylinderplot 1, theta = 0..2 * pi, z = -1..1 ; (در Maple)

> sphericalplot 1, theta = 0..2 * pi, phi = 0..2 * pi ;

که به این ترتیب ساده ترین شکل ها، یک استوانه و یک کره در مختصات مورد نظر رسم می شود.

مجموعه تمرین های فصل ۲

۱. (یک نقطه با چند نمایش در مختصات قطبی) نقطه $\left(3, \frac{2\pi}{3}\right)$ را در مختصات قطبی نشان دهید و مختصات این نقطه را طوری بیابید که

$$\mathbf{a} \quad 0 < \theta < 2\pi, r < 0 \quad \mathbf{b} \quad 0 < \theta < 2\pi, r > 0 \quad \mathbf{c} \quad -2\pi < \theta < 0, r < 0$$

۲. (تبدیل مختصات دکارتی به قطبی) مختصات قطبی نقاط زیر که مختصات دکارتی آنها داده شده اند را بیابید.

$$\mathbf{a} \quad 1, -1 \quad \mathbf{b} \quad -\sqrt{3}, 1 \quad \mathbf{c} \quad -5, 0 \quad (\text{با شرایط } 0 \leq \theta < 2\pi, r > 0)$$

۳. (تبدیل مختصات قطبی به دکارتی) مختصات دکارتی نقاط زیر که در مختصات قطبی داده شده اند را بیابید.

$$\mathbf{a} \quad 3, \pi \quad \mathbf{b} \quad \left(-2, \frac{\pi}{2}\right) \quad \mathbf{c} \quad \left(\sqrt{2}, \frac{-3\pi}{4}\right)$$

۴. (تبدیل معادله دکارتی به قطبی) معادله قطبی هر یک از معادلات دکارتی داده شده را بیابید.

$$\mathbf{a} \quad x + y = 1 \quad \mathbf{b} \quad x^2 + 6y - y^2$$

$$\mathbf{c} \quad x^2 - y^2 = 16 \quad \mathbf{d} \quad x^2 + y^2 = 4$$

۵. (تبدیل معادله قطبی به دکارتی) معادله دکارتی هر یک از معادلات قطبی داده شده را بیابید.

$$\mathbf{a} \quad r^2 = 4 \sin 2\theta \quad \mathbf{b} \quad r^2 = \cos \theta$$

$$\mathbf{c} \quad r = \frac{6}{2 - 3 \sin \theta} \quad \mathbf{d} \quad r^6 = r^2 \cos^2 \theta$$

۶. (تعیین تقارن های منحنی) تقارن های نمودار معادله قطبی را در هر حالت بیان نمایید.

$$\mathbf{a} \quad r = -2 \quad \mathbf{b} \quad r = \theta \quad \mathbf{c} \quad r = \sin \theta \quad \mathbf{d} \quad r = 2 + \cos \theta$$

۷. (رسم نمودارهای قطبی) در هر یک از تمرین های زیر نمودار معادله داده شده را رسم کنید.

$$\mathbf{a} \quad r = -4 \quad \mathbf{b} \quad \theta = -4$$

$$\mathbf{c} \quad r \sin \theta = 4 \quad \mathbf{d} \quad r = \frac{1}{\theta} \quad (\text{مارپیچ هذلولی})$$

$$\mathbf{e} \quad r = 2\theta \quad (\text{مارپیچ ارشمیدسی}) \quad \mathbf{f} \quad r = 3 \cos 3\theta \quad (\text{رزه سه پر})$$

$$\mathbf{g} \quad r = 3 + 3 \cos \theta \quad (\text{دلنا}) \quad \mathbf{h} \quad r = 2 - 3 \sin \theta \quad (\text{لیماسون})$$

۸. (معادله با مختصات دیگر) در تمرین های زیر معادله رویه های داده شده را در دو مختصات استوانه ای و کروی بنویسید.

$$\mathbf{a} \quad x + 2y + 3z = 0 \quad \mathbf{b} \quad x^2 + y^2 = 2z \quad \mathbf{c} \quad x^2 + y^2 - z^2 = 16 \quad \mathbf{d} \quad z = x^2 - y^2$$

۹. (توصیف رویه ها در مختصات دیگر) در تمرین های زیر رویه های داده شده را توصیف کنید.

$$\mathbf{a} \quad r = 3 \quad \mathbf{b} \quad \rho = 3 \quad \mathbf{c} \quad \phi = \frac{\pi}{2} \quad \mathbf{d} \quad \phi = \pi/3$$