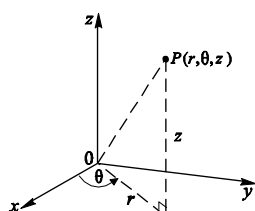


بخش ۲.۲ دستگاه مختصات استوانه ای

هر نقطه $P(x, y, z)$ در دستگاه مختصات دکارتی را می توان به صورت سه تایی مرتب r, θ, z در دستگاه مختصات استوانه ای نمایش داد، به طوریکه r و θ همان مولفه های مختصات قطبی تصویر نقطه $P(x, y, z)$ در صفحه xy هستند و z فاصله جهت دار از صفحه xy تا نقطه P است (شکل ۱).



شکل ۱ - دستگاه مختصات استوانه ای

برای تبدیل مختصات استوانه ای به دکارتی از معادلات زیر استفاده می شود:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z \quad (1)$$

و به طور عکس برای تبدیل از مختصات دکارتی به استوانه ای معادلات زیر موجود است:

$$r^2 = x^2 + y^2, \tan \theta = \frac{y}{x}, z = z \quad (2)$$

تبدیل مختصات دکارتی به استوانه ای

مثال ۱

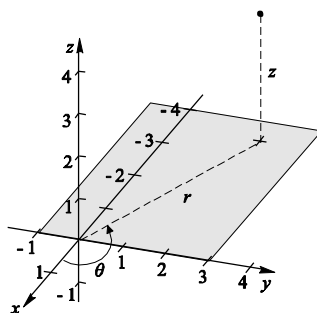
نقطه $4, 5\pi/6, 3$ را در مختصات استوانه ای نشان می دهیم و مختصات دکارتی متناظر را می یابیم. همچنین مختصات استوانه ای نقطه $1, \sqrt{3}, 2$ را در مختصات دکارتی می یابیم.

حل: مختصات استوانه ای نقطه $4, 5\pi/6, 3$ در شکل (۲) رسم شده است، از معادلات (۱) داریم:

$$x = 4 \cos \frac{5\pi}{6} = 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -2\sqrt{3}$$

$$y = 4 \sin \frac{5\pi}{6} = 4 \left(\frac{1}{2} \right) = 2$$

$$z = 3$$



شکل ۲ - نمایش یک نقطه در دستگاه مختصات استوانه ای

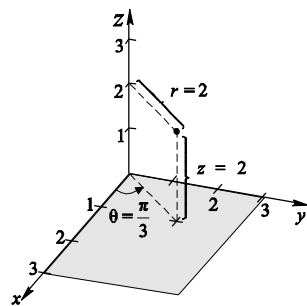
بنابراین $-2\sqrt{3}, 2, 3$ نقطه متناظر در مختصات دکارتی می باشد. حال مختصات استوانه‌ای نقطه $1, \sqrt{3}, 2$ را تعیین می کنیم. از معادلات (۲) خواهیم داشت:

$$r^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \sqrt{3} = 2n\pi + \frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$z = 2$$

بنابراین مجموعه نقاط $2, 2n\pi + \frac{\pi}{3}, 2$ نمایش مختصات استوانه‌ای نقطه مذکور می باشند (شکل ۳).



شکل ۳- نمایش یک نقطه در دستگاه مختصات دکارتی

یادداشت ۱

دستگاه مختصات استوانه‌ای می تواند نسبت به محور x یا محور y به جای محور z در نظر گرفته شود. دستگاه مختصات استوانه‌ای در مسایلی که نسبت به یک محور تقارن دارند مفید می باشد. برای نمونه معادله استوانه $x^2 + y^2 = c^2$ در مختصات استوانه‌ای $r = c$ است، این دلیل انتخاب نام مختصات استوانه‌ای است.

توصیف رویه در مختصات استوانه‌ای

رویه در مختصات استوانه‌ای

مثال ۲

مطلوب است:

(a) توصیف رویه معادله $r = z$ در مختصات استوانه‌ای.

(b) معادله بیضی گون $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ در مختصات استوانه‌ای.

حل (a): در هر نقطه از سطح رویه، مقدار z (ارتفاع) طبق صورت معادله برابر r است، یعنی ارتفاع نقطه برابر فاصله همان نقطه تا محور z می باشد، از طرف دیگر چون معادله فاقد θ می باشد و مقطع آن با صفحه $z = k$ یک دایره است، این موارد به طور قوی پیشنهاد می کند رویه مورد نظر یک مخروط است. با تبدیل معادله به مختصات دکارتی از (۲) نتیجه می شود،

$$z^2 = r^2 = x^2 + y^2$$

که حالت خاصی از معادله مخروط می باشد.

(b) چون $r^2 = x^2 + y^2$ معادله بیضی گون در مختصات استوانه‌ای $4r^2 + z^2 = 1$ است.