

دستگاه‌های مختصات دیگر

۱.۲ دستگاه مختصات قطبی

۲.۲ دستگاه مختصات استوانه‌ای

۳.۲ دستگاه مختصات کروی

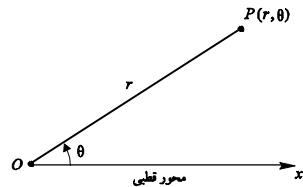
مقدمه

- به کمک دستگاه مختصات قطبی می‌توان برخی از منحنی‌ها و ناحیه‌های ویژه را در صفحه راحت‌تر توصیف کرد. پدید آمده است. معادلات قطبی خم‌های جالبی تولید می‌کنند، همچنین به کمک انتگرال قطبی می‌توان مساحت نواحی محدود به معادلات قطبی و طول قوس آن‌ها را محاسبه نمود.
- در فضای سه بعدی دستگاه‌های مختصات دیگری از قبیل دستگاه مختصات استوانه‌ای و کروی وجود دارند که به کمک آن‌ها می‌توان بعضی از رویه‌ها و نواحی در فضا را آسان‌تر توصیف نمود.

بخش ۱.۲ دستگاه مختصات قطبی

این دستگاه شامل یک محور اعداد به نام محور قطبی می‌باشد که حول نقطه‌ای به نام مبدا O یا قطب می‌چرخد و جهت آن به سمت راست نشان داده می‌شود.

هر نقطه P در صفحه می‌تواند توسط مختصات قطبی r, θ نمایش داده شود که در آن r فاصله جهت‌دار از مبدا O تا نقطه P است و θ زاویه جهت‌دار از محور قطبی تا پاره خط OP در جهت مثبت محور (خلاف جهت عقربه ساعت) می‌باشد.

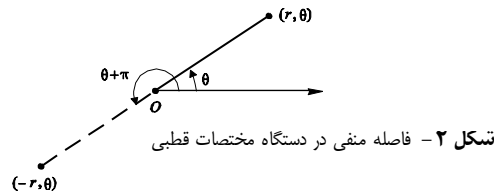
شکل ۱- مختصات قطبی r, θ P

لازم به ذکر است که در مختصات دکارتی هر نقطه $P(x, y)$ به صورت یکتا نمایش داده می‌شود ولی این خاصیت در مختصات قطبی برقرار نمی‌باشد، زیرا زاویه‌های زیر نقطه پایانی یکسانی دارند

$$\theta + 2n\pi \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

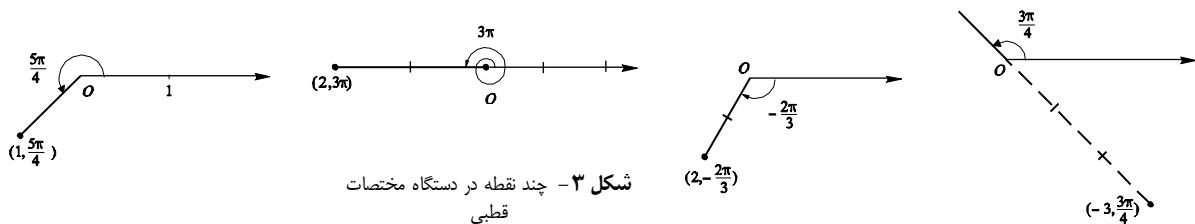
برای آنکه دستگاه کامل باشد گاهی لازم است که فاصله منفی تعریف شده باشد، یعنی $r < 0$ ، که نمایش فاصله مثبت $-r$ در جهت مخالف یعنی $\theta + \pi$ می‌باشد. (شکل ۲)

$$-r, \theta = r, \theta + \pi$$



شکل ۲- فاصله منفی در دستگاه مختصات قطبی

برای آنکه با نقاط در دستگاه مختصات قطبی بیشتر آشنا شوید، در شکل (۳) چند نقطه در مختصات قطبی نشان داده شده است.

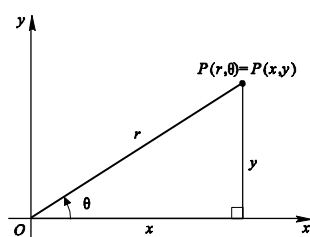


شکل ۳- چند نقطه در دستگاه مختصات قطبی

■ رابطه بین دستگاه مختصات قطبی و دکارتی

اگر بخواهیم دستگاه مختصات دکارتی و دستگاه مختصات قطبی را در یک دستگاه نشان دهیم محور قطبی را محور مثبت x انتخاب می‌نماییم، در این صورت با توجه به شکل ۴ رابطه بین مختصات قطبی و دکارتی حاصل می‌گردد.

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases} \quad (1)$$



شکل ۴- ارتباط دستگاه مختصات دکارتی با قطبی

با استفاده از معادلات فوق می‌توان معادلات در مختصات دکارتی را به معادلات در مختصات قطبی و برعکس تبدیل نمود.

تبدیل مختصات قطبی به دکارتی

مثال ۱

مختصات قطبی نقطه‌ای که مختصات دکارتی آن $\sqrt{2}, \sqrt{2}$ می‌باشد را تعیین می‌کنیم.

حل:

$$x = \sqrt{2}, y = \sqrt{2} \Rightarrow r^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

پس این نقطه دارای دو مختصات قطبی $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$ می‌باشد.

تبدیل مختصات دکارتی به قطبی

مثال ۲

مختصات دکارتی نقطه $\left(-6, \frac{7\pi}{4}\right)$ را تعیین می‌نماییم.

حل:

$$x = r \cos \theta = -6 \cos \frac{7\pi}{4} = -6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}$$

$$y = r \sin \theta = -6 \sin \frac{7\pi}{4} = -6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2}$$

پس این نقطه دارای مختصات دکارتی $-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$ می‌باشد.

تبدیل معادله قطبی به دکارتی

مثال ۳

معادله قطبی نموداری بصورت $r = 2a \cos \theta$ است. معادله دکارتی آن را می‌یابیم.

حل: باید مختصات قطبی را به مختصات دکارتی تبدیل نماییم، ابتدا طرفین را در r ضرب می‌نماییم:

$$r^2 = 2ar \cos \theta$$

لذا با توجه به رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

که این معادله دایره $x^2 + y^2 = a^2$ به مرکز $a, 0$ و شعاع a می‌باشد.

■

تبدیل معادله دکارتی به قطبی

مثال ۴

معادله دکارتی نموداری بصورت $x^2 + y^2 - 4x = 0$ است. معادله قطبی آن را می‌یابیم.

حل: $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ را در معادله فوق جایگزین می‌نماییم:

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - 4r \cos \theta = 0 \Rightarrow r^2 - 4r \cos \theta = 0 \Rightarrow r(r - 4 \cos \theta) = 0$$

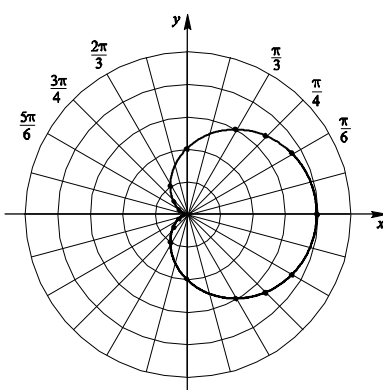
$$\Rightarrow r = 0 \text{ یا } r = 4 \cos \theta$$

وقتی که $\theta = \frac{\pi}{2}$ در $r = 4 \cos \theta$ داریم $r = 0$. لذا $r = 0$ بر نمودار $r = 4 \cos \theta$ واقع است. بنابراین معادله قطبی بصورت $r = 4 \cos \theta$ می‌باشد.

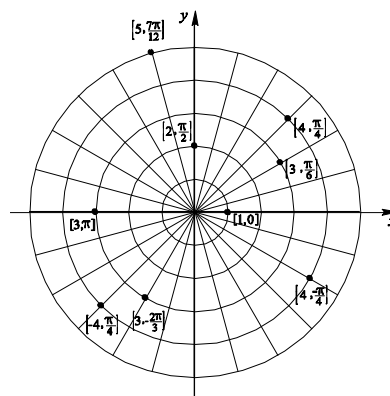
■

رسم نمودار معادلات در دستگاه قطبی

نخستین گام برای رسم معادله قطبی $r = f(\theta)$ همانند رسم منحنی‌ها در دستگاه مختصات دکارتی، تعیین چند نقطه روی منحنی قطبی $r = f(\theta)$ سپس اتصال این نقاط توسط یک منحنی به یکدیگر می‌باشد توصیه ما این است که ابتدا یک شبکه‌بندی با مقیاس مناسب بر حسب r, θ در صفحه قطبی ایجاد نمایید به طوری که بتوانید مکان نقطه را از روی شبکه به آسانی تعیین کنید (شکل ۵). برای نمونه توسط نقطه‌یابی منحنی نمودار معادله $r = 2 + 2 \cos \theta$ با طول گام‌های $\frac{\pi}{2}$ و ۱ برای فاصله‌های $0 \leq \theta < 2\pi$ و $0 \leq r < \infty$ در شکل (۶) آمده است.



شکل ۶ - نمایش منحنی
 $r = 2 - 2 \cos \theta$
به صورت نقطه‌یابی در ناحیه شبکه‌بندی

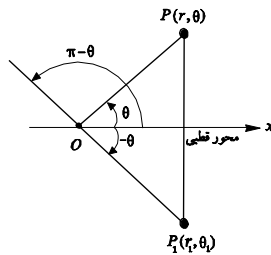


شکل ۵ - شبکه‌بندی صفحه قطبی همراه با
نمایش چند نقطه روی آن

ملاحظه می‌نمایید که روش نقطه‌یابی برای رسم نمودار یک معادله قطبی $r = f(\theta)$ بسیار خسته‌کننده و طولانی است به این سبب بررسی چند نکته قبل از نقطه‌یابی به طور کامل یاری دهنده است.

۱. بررسی تقارن نسبت به محور قطبی

اگر با تعویض نقطه r, θ روی منحنی با نقطه $r, -\theta + 2n\pi$ یا $-r, \pi - \theta + 2n\pi$ که در آن n عدد صحیح دلخواهی است، یک نقطه روی معادله منحنی $r = f(\theta)$ بدست آید. (شکل ۷) در اینصورت نمودار یک معادله $r = f(\theta)$ در مختصات قطبی نسبت به محور قطبی تقارن دارد.



شکل ۷- نمایش تقارن نسبت به محور قطبی

تقارن نسبت به محور قطبی

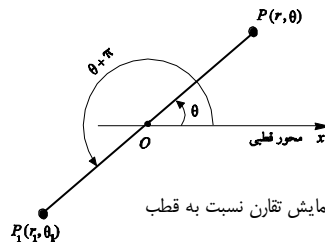
مثال ۵

برای نمونه نمودار معادله $r = 4 \cos 2\theta$ نسبت به محور قطبی تقارن دارد چون با تعویض r, θ با $r, -\theta$ داریم:

$$r = 4 \cos -2\theta = 4 \cos 2\theta$$

۲. بررسی تقارن نسبت به قطب

اگر با تعویض نقطه r, θ از معادله $r = f(\theta)$ در مختصات قطبی با $-r, \theta + 2n\pi$ یا $r, \pi + \theta + 2n\pi$ که عدد n صحیح دلخواهی است، مجدد یک نقطه روی منحنی $r = f(\theta)$ متناظر شود. (شکل ۸) در اینصورت نمودار منحنی نسبت به قطب متقارن است.



شکل ۸- نمایش تقارن نسبت به قطب

تقارن نسبت به قطب

مثال ۶

برای بررسی تقارن نمودار معادله $r = 4 \cos 2\theta$ نسبت به قطب، اگر نقطه r, θ را با $-r, \theta$ تعویض نماییم، معادله $-r = 4 \cos 2\theta$ حاصل می شود که با معادله داده شده معادل نیست. با این حال مختصات دیگر را امتحان می کنیم. با تعویض r, θ با $r, \pi + \theta$ خواهیم داشت:

$$r = 4 \cos 2(\pi + \theta) = 4 \cos 2\theta$$

بنابراین نمودار نسبت به قطب متقارن است.

۳. بررسی تقارن نسبت به یک خط

ممکن است نمودار یک معادله در مختصات قطبی نسبت به خط L تقارن داشته باشد، برای نمونه معادله $r = 4 \cos \theta$ نسبت به

خط $\theta = \frac{\pi}{2}$ متقارن است، چون با تعویض r, θ با $r, \pi - \theta$ داریم:

$$r = 4 \cos 2\pi - \theta = 4 \cos 2\theta$$

۴. عبور منحنی از قطب

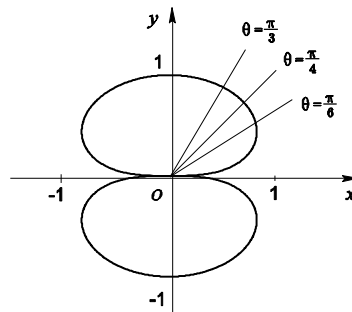
برای تحقیق اینکه منحنی معادله $r = f(\theta)$ از قطب عبور می‌کند، کافی است در معادله فوق قرار دهیم $r = 0$ یعنی $f(\theta) = 0$ اگر $f(\theta) = 0$ برقرار باشد، منحنی از قطب عبور می‌کند برای نمونه $r = 5 - 4 \cos \theta$ از قطب عبور نمی‌کند چون به ازای $r = 0$ ، $\cos \theta = \frac{5}{4} > 1$ ، ولی $r = 4 - 5 \cos \theta$ از قطب عبور می‌کند. جواب‌هایی که برای θ از حل معادله $f(\theta) = 0$ حاصل می‌شود، معادله خط مماس $\theta = \theta_0$ بر نمودار $r = f(\theta)$ است که از قطب می‌گذرد.

رسم نمودار قطبی

مثال ۲

شکل عدد ۸ معادله دکارتی $x^2 + y^2 = y^3$ را به قطبی تبدیل نموده سپس آن را رسم می‌کنیم.

حل: با استفاده از $x^2 + y^2 = r^2$ ، $y = r \sin \theta$ داریم $r^6 = r^2 \sin^2 \theta$ یا $r^2 = |\sin \theta|$ و یا $r = \sqrt{|\sin \theta|}$ رسم منحنی این معادله در دستگاه مختصات دکارتی بسیار مشکل است. ولی رسم این معادله در مختصات قطبی ساده است. به عنوان نمونه در بازه $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ، $\sin \theta$ از ۰ تا ۱ افزایش می‌یابد، پس r نیز از ۰ تا ۱ زیاد خواهد شد. با رسم چند نقطه برای نمونه $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، $\theta = \frac{\pi}{4}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ می‌توانیم به سرعت آن قسمت از منحنی را که در ربع اول قرار دارد، رسم کنیم بقیه قسمت‌ها با توجه به تقارن در مختصات دکارتی با تقارن و خاصیت تناوبی $|\sin \theta|$ به دست می‌آید (شکل ۹).



شکل ۹- نمودار معادله $r = \sqrt{|\sin \theta|}$

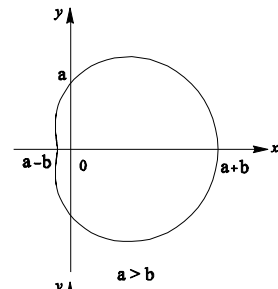
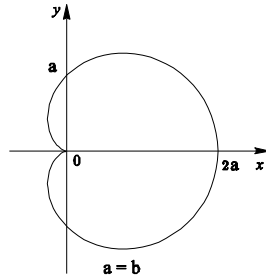
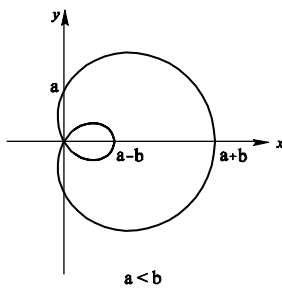
■ نمودار لیماسون

نمودار یک معادله به یکی از صورت‌های زیر یک لیماسون *Limacon* نامیده می‌شود.

$$r = a \pm \cos \theta, \quad r = a \pm \sin \theta \quad (۲)$$

برای رسم این نمودارها کافی است به بررسی رسم نمودار معادله $r = a + b \cos \theta$ بپردازیم. چون نمودار معادله $r = a - b \cos \theta$ همان نمودار $r = a + b \cos \theta$ می‌باشد که به اندازه ۱۸۰ درجه دوران یافته است (چرا؟). همچنین معادلات $r = a + b \sin \theta$ همان معادلات سمت راست در (۲) هستند که به اندازه ۹۰ درجه دوران می‌یابند.

معادله $r = a + b \cos \theta$ نسبت به محور قطبی متقارن است (چون اگر در معادله r, θ با $r_1, -\theta$ عوض شود، معادله تغییر نمی‌کند). نمودار این معادله در سه حالت در شکل (۱۰) نمایش داده شده است.



شکل ۱۰ - نمودارهای معادله $r = a + b \cos \theta$ وابسته به ثابت‌های a و b

رسم چند لیماسون

مثال ۸

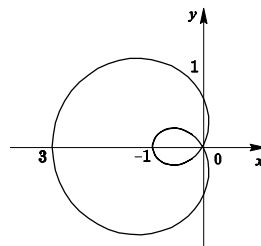
نمودار هر یک از منحنی‌های زیر را می‌یابیم.

b. $r = 2 - 2 \sin \theta$

a. $r = 1 - 2 \cos \theta$

حل (a): با توجه به نمودارهای شکل ۱۰ می‌دانیم که $r = 1 + 2 \cos \theta$ حالت سوم است چون $1 = a < b = 2$ بنابراین

نمودار $r = 1 - 2 \cos \theta$ به اندازه 180° دوران یافته نمودار معادله $r = 1 + 2 \cos \theta$ است (شکل ۱۱)

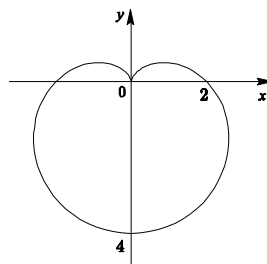


شکل ۱۱ - نمودار معادله $r = 1 - 2 \cos \theta$

(b): با توجه باین که معادله $r = 2 + 2 \cos \theta$ معادل حالت دوم $a = b = 2$ شکلی شبیه یک دلقون دارد، بنابراین نمودار

منحنی $r = 2 - 2 \cos \theta$ به اندازه 180° دوان از آن حاصل می‌شود. در نهایت نمودار معادله $r = 2 - 2 \sin \theta$ به

اندازه 90° دوران دیگر از نمودار معادله $r = 2 - 2 \cos \theta$ حاصل خواهد شد. (شکل ۱۲)



شکل ۱۲ - نمودار معادله $r = 2 - 2 \sin \theta$

نمودار گل رز

نمودار هر معادله به یکی از صورت‌های زیر یک گل رز نامیده می‌شود.

$$r = a \sin n\theta, \quad r = a \cos n\theta \quad (3)$$

نمودار شامل n پر است اگر n فرد باشد و همچنین شامل $2n$ پر خواهد بود اگر n یک عدد زوج باشد.

رسم رز چهار پر

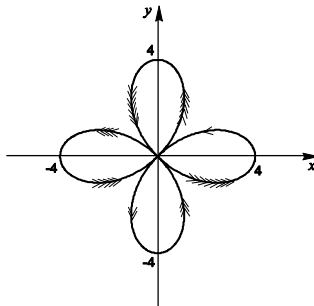
مثال ۹

رز چهار پر $r = 4 \cos 2\theta$ را رسم می‌کنیم.

حل: در بالا نشان دادیم که نمودار این معادله نسبت به محور قطبی، محور $\frac{1}{2}\pi$ و قطب متقارن است. اگر در معادله داده شده به جای r مقدار 0 را جایگزین نماییم، به ازای $0 \leq \theta < 2\pi$ به دست خواهیم آورد:

$$\theta = \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi$$

جدول (۱) مقادیر را به ازای برخی مقادیر θ از 0 تا $\frac{1}{2}\pi$ نشان می‌دهد. اکنون با استفاده از این مقادیر و خواص تقارن نمودار را رسم می‌کنیم (شکل ۱۳).



شکل ۱۳ - نمودار معادله رز چهار پر
 $r = 4 \cos 2\theta$

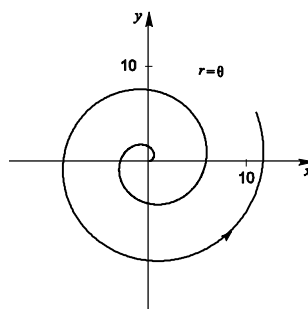
جدول ۱- مقادیر معادله مثال (۷)

θ	r
0	4
$\frac{1}{12}\pi$	$2\sqrt{3}$
$\frac{1}{6}\pi$	2
$\frac{1}{4}\pi$	0
$\frac{1}{3}\pi$	-2
$\frac{5}{12}\pi$	$-2\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	-4

نمودارهای مارپیچی: در حالت کلی هر معادله به صورت

$$r = a\theta \quad (۴)$$

به **مارپیچ ارشمیدسی** معروف است که در آن a یک ثابت اختیاری می‌باشد. این نمودار با تبدیل r, θ به $-r, -\theta$ تغییر نمی‌کند، بنابراین نسبت به محور $\frac{\pi}{2}$ متقارن است. همچنین نمودار در قطب بر محور قطبی مماس است، چون زمانی که $r = 0$ ، $\theta = 0$ نتیجه می‌شود (شکل ۱۴).



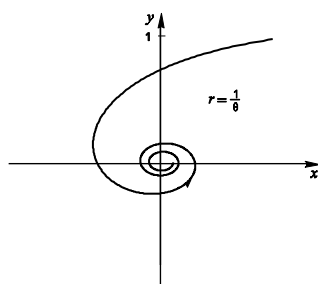
شکل ۱۴ - نمودار خاص مارپیچ ارشمیدسی
 $r = a\theta$

به ازای هر ثابت a ، معادله به صورت

$$r = \frac{a}{\theta} \quad (۵)$$

به **مارپیچ هذلولی** معروف می‌باشد. بدیهی است که در این معادله $\theta \neq 0$ بوده و با افزایش θ مقدار r کم می‌شود به طوریکه به سمت صفر متمایل می‌شود.

این نمودار نیز نسبت به محور $\frac{\pi}{2}$ متقارن است، چون با تبدیل r, θ به $-r, -\theta$ معادله تغییر نمی‌کند (شکل ۱۵).

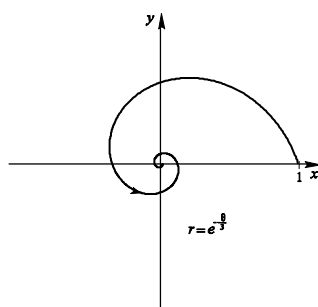


شکل ۱۵ - نمودار خاص مارپیچ هذلولی $r = \frac{a}{\theta}$

در حالت کلی معادله به صورت

$$r = ae^{k\theta} \quad (۶)$$

که در آن a و k دو ثابت اختیاری می باشند، به مارپیچ لگاریتمی معروف شده است. زمانی که $\theta = 0$ باشد $r = a$ معادله یک دایره است. همچنین با افزایش θ مقدار r ضمن این است که حول قطب می چرخد نسبت به علامت k افزایش یا کاهش می یابد (شکل ۱۶).



شکل ۱۶ - نمودار خاص مارپیچ لگاریتمی $r = ae^{k\theta}$