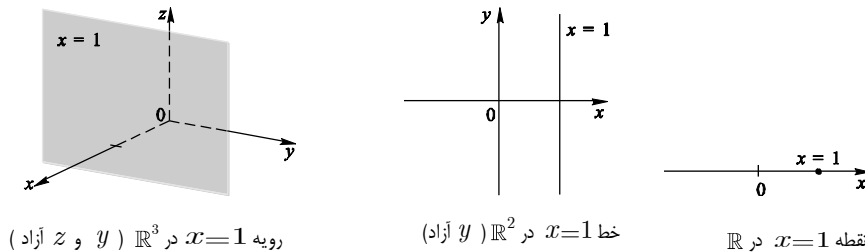


بخش ۴.۱ رویه های فضایی درجه دوم

در این بخش با برخی از شکل های فضایی آشنا خواهید شد که به آنها رویه می گوئیم. در بخش قبل با حالت خاصی از رویه به نام صفحه آشنا شده اید. کره نیز یک رویه از فضا می باشد. وقتی که معادله ای داده می شود باید مشخص گردد که منظور یک نقطه در $\mathbb{R}$ ، یک منحنی در صفحه $\mathbb{R}^2$ یا یک رویه در فضای $\mathbb{R}^3$ می باشد. برای مثال شکل (۱)، حالت های مختلف نمایش معادله $x = 1$ را نشان می دهد.

(شکل ۱)



تعریف ۱.۱ رویه

مکان هندسی تمام نقاط $p(x, y, z)$ در فضای $\mathbb{R}^3$ که در رابطه $F(x, y, z) = 0$ صدق کنند، تشکیل یک رویه می دهند.

رسم رویه ها در حالت کلی بسیار مشکل است. اما خوشبختانه امروزه سیستم های کامپیوتری به آسانی آنها را رسم کنند و از زوایای مختلف می توان آنها را مشاهده نمود. در این بخش دو دسته کلی از رویه ها یعنی استوانه ها و رویه های درجه دوم را معرفی می نماییم.

استوانه ها

تعریف ۲.۱ استوانه

مکان هندسی خطوطی است که از تمام نقاط یک منحنی مسطح (به نام هادی استوانه) بگذرد و با خط ثابتی (به نام مولد استوانه) موازی باشد.

(ممکن است مولد مایل باشد)، استوانه ای که منحنی هادی آن بیضی باشد استوانه بیضوی، استوانه ای که منحنی هادی آن سهمی باشد، استوانه سهموی و استوانه ای که منحنی هادی آن هذلولی باشد استوانه هذلولوی نامیده می شوند.

در این قسمت به استوانه هایی محدود می شویم که منحنی هادی آنها در یکی از صفحات مختصات و خطوط مولد آنها عمود بر یکی از صفحات مختصات باشند. در این حالت هر معادله ای در فضا که فاقد یکی از سه متغیر x و y و z باشد، یک استوانه است و امتداد آن در جهت متغیری است که غایب است. یعنی معادلات $f(x, y) = 0$ ، $f(x, z) = 0$ و $f(y, z) = 0$ به ترتیب رویه های استوانه ای موازی محورهای z ، y و x هستند.

رسم چند استوانه:

رسم رویه

مثال ۱

نمودار رویه های داده شده زیر را رسم و مقایسه می کنیم.

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \quad (c)$$

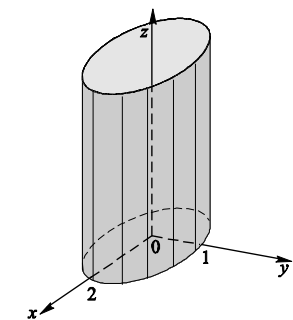
$$y^2 + z^2 = 1 \quad (b)$$

$$z = x^2 \quad (a)$$

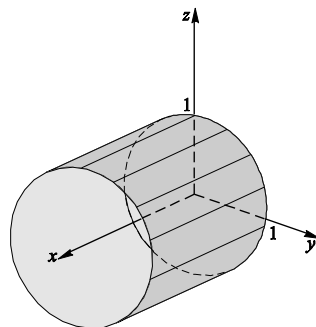
حل (a): معادله $z = x^2$ شامل y نیست، این نشان می دهد که صفحه های $y = k$ با ثابت های مختلف k رویه را در سهمی های $z = x^2$ قطع می کنند. به عبارت دیگر y متغیر آزاد بوده، یعنی با حرکت سهمی $y = x^2$ در جهت محور y ، یا با رسم خطوط موازی با محور y روی سهمی $y = x^2$ مطابق شکل (۲) استوانه آشکار می شود.

(b): چون معادله $y^2 + z^2 = 1$ فاقد متغیر x است، تقاطع آن با صفحه yz یک دایره می باشد، که مطابق شکل (۳) با حرکت آن در جهت محور x ، استوانه حادث می شود.

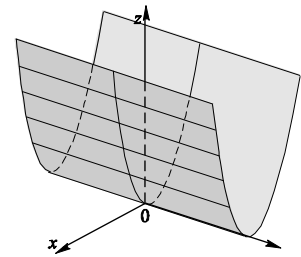
(c): به همین ترتیب چون رابطه $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ فاقد z است، تقاطع آن با صفحه xy یک بیضی می باشد. که با حرکت در جهت محور z استوانه مطابق شکل (۴) حادث می شود. توجه داشته باشید که رابطه $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ در فضای $\mathbb{R}^3$ یک استوانه نامیده می شود، نه یک بیضی.



شکل ۴- نمودار استوانه $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$



شکل ۳- نمودار استوانه $y^2 + z^2 = 1$



شکل ۲- نمودار استوانه $z = x^2$

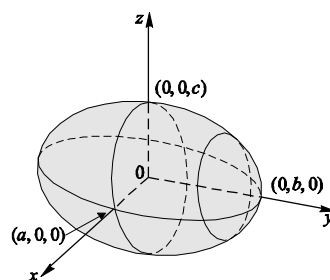
رسم رویه های درجه دوم

برای شناخت و رسم مناسب رویه های درجه دوم در حالت کلی آنها را به پنج دسته تقسیم می کنیم:

۱. **بیضی گون:** هر رویه به صورت زیر که در آن a, b و c ثابت هستند یک بیضی گون نامیده می شود.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

که نمودار کلی آن به صورت شکل زیر است



شکل ۵- نمودار بیضی گون

مقطع عمودی با صفحه های $z = k$ عبارت است از:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2}, \quad -c \leq k \leq c$$

که یک بیضی می باشد. به همین ترتیب مقاطع عمودی با صفحات دیگر نیز بیضی هایی به صورت

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2}, \quad -a \leq k \leq a$$

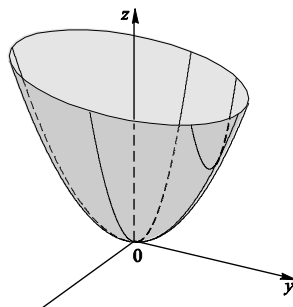
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{k^2}{a^2} \quad -b \leq k \leq b$$

می‌باشند. اگر $a = b = c$ ، بیضی گون همان کره می‌شود.

۲. **سهی گون**: هر رویه به صورت زیر یک سهی گون یا سهی وار بیضوی نامیده می‌شود.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \quad (۲)$$

که نمودار کلی آن برای $c > 0$ به صورت شکل زیر است.



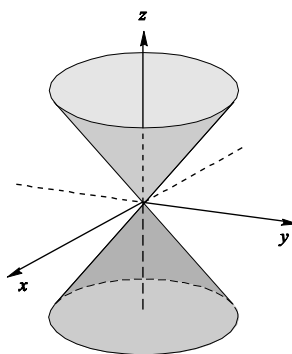
شکل ۶- نمودار سهی گون

هرگاه این معادله توسط صفحات $x = k$ ، $y = k$ و $z = k$ (عددی ثابت) قطع شود، روی صفحات $x = k$ و $y = k$ سهی و روی صفحه $z = k$ بیضی به جا خواهد ماند.

۳. **مخروط**: هر رویه به صورت

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \quad (۳)$$

یک مخروط یا مخروط بیضوی نامیده می‌شود که نمودار کلی آن به صورت زیر است. مقطع این رویه با صفحه $z = k$ یک بیضی و با صفحه‌های $x = k$ و $y = k$ هذلولی می‌باشد.

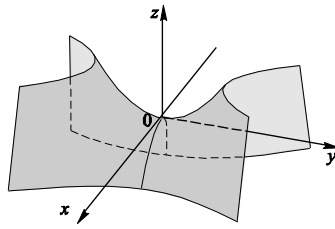


شکل ۷- نمودار مخروط

۴. **زین اسبی**: رویه‌ای به صورت

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \quad (۴)$$

به رویه زین اسبی یا سهی گون هذلولوی معروف است که نمودار کلی آن به صورت زیر است.

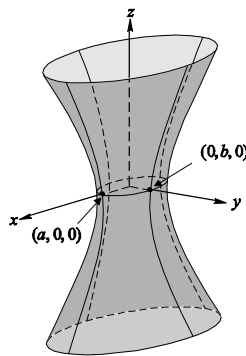


شکل ۸- نمودار زین اسبی

۵. هذلولی گون: هر رویه به صورت

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (5)$$

هذلولی گون یک پارچه نامیده می شود که تقاطع این رویه با صفحه $z = k$ بیضی و با صفحات $x = k$ و $y = k$ هذلولی می باشد و نمودار کلی آن به صورت شکل زیر است.

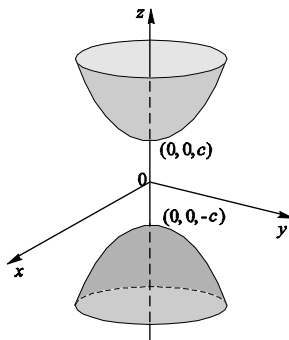


شکل ۹- هذلولی گون یک پارچه

همچنین هر رویه به صورت زیر هذلولی گون دو پارچه نامیده می شود:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (6)$$

که مقطع این رویه با صفحه های $z = k$ بیضی و تقاطع آن با صفحه های $x = k$ و $y = k$ هذلولی می باشد و نمودار کلی آن به صورت شکل زیر است.



شکل ۱۰- هذلولی گون دو پارچه

توجه گردد که این شش رویه در جهت محور z - ها در نظر گرفته شده اند لذا می توان با تعویض متغیرها جهت رویه ها را عوض نمود و همچنین رویه های درجه دوم فوق در مقایسه با مبدا مختصات معرفی شده اند.

استفاده از CAS

با توجه به مشکلات رسم و تجسم رویه‌ها در فضای $\mathbb{R}^3$ به کمک *Maple* و *Mathematica* می‌توانید رویه‌ها را به نحو مناسب رسم و با زاویه دید مناسب آنها را مشاهده کنید.

 **رسم صریح** رویه‌ها با معادله صریح $y = f(x, y)$ به آسانی در محیط CAS قابل رسم هستند.

`> with plots ;` (در *Maple*)

`> f := x^2 + y^2 ;`

`> plot3d f, x = -4..4, y = -4..4 ,`

که با این عمل سهمی‌گون در محیط *Maple* رسم می‌شود، که با انتخاب آن می‌توانید به نحو مناسب از همه جوانب رویه را مشاهده کنید .

`Plot3D x^2 + y^2, x, -4, 4 , y, -4, 4` (در *Mathematica*)

به این دستور سهمی‌گون با زاویه دید پیش فرض رسم می‌شود که می‌توانید با افزودن دستور زیر داخل دستور فوق از نقطه a, b, c رویه را مشاهده کنید .

`viewpoint -> a, b, c`

 **رسم ضمنی** برای رسم رویه‌های ضمنی با معادله $F(x, y, z) = 0$ در محیط *Maple* از دستور `implicitplot3d` استفاده می‌شود.

معادل این دستور در محیط *Mathematica* دستور `ParametricPlot3D` می‌باشد.

`x[t_, s_] = 3cos[t] * cos[s];` (در *Mathematica*)

`x[t_, s_] = 6sin t * cos s ;`

`z[t_, s_] = 2sin[s];`

`ParametricPlot3D[ x t, s , y t, s , z t, s , t, 0, 2Pi, , s, 0, 2Pi ]`

 **رسم منحنی‌های تراز** منحنی‌های تراز را می‌توانید روی رویه با دستور `CountorPlot3d` و در صفحه با دستور `CountorPlot`

مشاهده کنید.

مجموعه تمرین های بخش ۴.۱

۱. رویه های استوانه ای زیر را توصیف و رسم کنید.

$$z = \cos x \quad \text{c.}$$

$$yz = 4 \quad \text{b.}$$

$$y^2 + 4z^2 = 4 \quad \text{a.}$$

۲. (صورت متعارف رویه های درجه دوم) در تمرین های زیر معادله را به صورت متعارف در آورید، سپس آنها را رسم کنید.

$$x^2 + y^2 + 4y + z = 4 \quad \text{b.}$$

$$x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x = 0 \quad \text{a.}$$

$$9x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0 \quad \text{d.}$$

$$x^2 + y^2 - 4z^2 + 4x - 6y - 8z = 13 \quad \text{c.}$$

۳. (محل تقاطع دو رویه درجه دوم) نشان دهید که تقاطع رویه های زیر در یک صفحه قرار می گیرند.

$$2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0, \quad x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1$$