

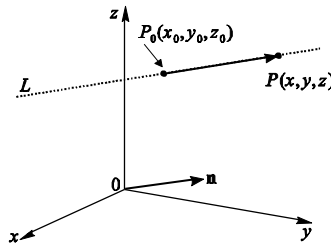
بخش ۳.۱ معادلات خط و صفحه

معادله خط

می‌دانیم معادله خطی که از نقطه x_0, y_0 گذشته و دارای شیب m باشد، به صورت $y - y_0 = m(x - x_0)$ مشخص می‌گردد. به طور مشابه در فضای $\mathbb{R}^3$ معادله خطی که از نقطه $p_0(x_0, y_0, z_0)$ گذشته و با بردار $n = ai + bj + ck$ موازی باشد، (بردار n را بردار هادی خط می‌نامیم) عبارت است از:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

معادله فوق به معادله دکارتی خط معروف است.



شکل ۱- معادله خط و بردارهای آن

توجه شود که اگر یکی از ثابت‌های a و b و c صفر باشد مثلاً $a = 0$ معادله دکارتی به صورت زیر می‌باشد.

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (1)$$

■ معادله پارامتری خط

با توجه به شکل (۱) که بردار $\vec{p_0p} = (x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k$ با بردار هادی n موازی است لذا یک پارامتر مانند $t \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوریکه $\vec{p_0p} = tn$ پس داریم:

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = \langle ta, tb, tc \rangle$$

در آن صورت با توجه به تساوی دو بردار فوق معادله پارامتری خط به صورت زیر می‌باشد:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

معادله خط گذرنده از دو نقطه

مثال ۱

معادله دکارتی و پارامتری خطی که از نقاط $A(1, -1, 0)$ و $B(2, -1, 3)$ می‌گذرد را می‌یابیم.

حل: ابتدا بردار هادی خط را با توجه به این که نقاط A و B روی خط قرار دارند و بردار $\vec{AB}$ موازی خط می‌باشند، به صورت زیر می‌یابیم:

$$n = \vec{AB} = \langle 2 - 1, -1 - (-1), 3 - 0 \rangle = \langle 1, 0, 3 \rangle$$

پس معادله دکارتی و پارامتری خط به صورت زیر می‌باشند

$$\text{معادله دکارتی: } \frac{x-1}{1} = \frac{z-0}{3}, \quad y = -1$$

$$\text{معادله پارامتری خط: } x = 1 + t, \quad y = -1 + 0t, \quad z = 0 + 3t$$

معادله خط موازی با خط دیگر

مثال ۲

$$\text{معادله خطی که از مبدأ گذشته و با خط موازی باشد را می یابیم.} \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5t \end{cases}$$

حل: ابتدا بردار هادی خط داده شده را می یابیم:

$$n = \langle 1, 3, 5 \rangle$$

چون دو خط موازی هستند پس بردار هادی فوق، بردار هادی هر دو خط می باشد. در نتیجه معادله خط برابر است با:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{z-0}{3} = \frac{y-0}{5}$$

■ وضعیت دو خط نسبت به هم

اگر بردارهای هادی دو خط با هم موازی باشند آنگاه دو خط موازی و اگر بردارهای هادی آنها بر هم عمود باشند آنگاه دو خط بر هم عمودند. اگر دو خط همدیگر را قطع نکنند و موازی نباشند آنها را دو خط متنافر می گوئیم. توجه داشته باشید که دو خط متنافر نمی توانند در یک صفحه قرار گیرند.

دو خط متنافر

مثال ۳

نشان می دهیم که دو خط L_1 و L_2 با معادله پارامتری زیر متنافر هستند:

$$L_1: x = 1 + t, \quad y = -2 + 3t, \quad z = 4 - t,$$

$$L_2: x = 2s, \quad y = 3 + s, \quad z = -3 + 4s$$

حل: دو خط موازی نمی باشند، چون بردارهای نرمال $\mathbf{n}_1 = \langle 1, 3, -1 \rangle$ و $\mathbf{n}_2 = \langle 2, 1, 4 \rangle$ با هم موازی نمی باشند. همچنین با توجه به اینکه دستگاه زیر دارای جوابی برای t و s نمی باشد، بنابراین دو خط همدیگر را قطع نمی کنند، بنابراین متنافر هستند.

$$1 + t = 2s$$

$$-2 + 3t = 3 + s$$

$$4 - t = -3 + 4s$$

معادله صفحه

برای تعیین معادله صفحه به یک نقطه p_0 و بردار نرمال n نیاز داریم. بردار عمود بر صفحه را بردار نرمال صفحه می نامیم. فرض کنیم صفحه مکان هندسی تمام نقاط $p(x, y, z)$ و شامل نقطه معلوم $p_0(x_0, y_0, z_0)$ باشد که دارای بردار نرمال $n = \langle a, b, c \rangle$ باشد در آن صورت با توجه به اینکه $\vec{p_0p}$ بر n عمود است لذا $\vec{p_0p} \cdot n = 0$ یعنی

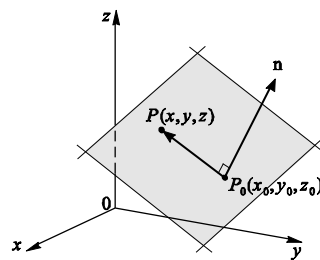
$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$

پس نتیجه می گیریم:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (2)$$

معمولاً معادله صفحه فوق را پس از دسته بندی به صورت زیر می نویسیم که در آن $d = ax_0 + by_0 + cz_0$

$$ax + by + cz = d$$



شکل ۲- معادله صفحه با نقطه معلوم
 p_0 و بردار نرمال n

معادله صفحه

مثال ۴

معادله صفحه‌ای که از نقطه p_0 گذشته و بردار نرمال آن $n = \langle 3, 5, 2 \rangle$ باشد را می‌یابیم.

حل: معادله صفحه عبارت است از:

$$3x - 1 + 5y - 2 + 2z - 3 = 0$$

$$3x + 5y + 2z = -1$$

معادله صفحه گذرنده از سه نقطه

مثال ۵

معادله صفحه‌ای که از سه نقطه $A(1, 0, -1)$ و $B(1, 2, 1)$ و $C(-3, 2, 4)$ بگذرد را می‌یابیم.

حل: ابتدا به کمک نقاط فوق دو بردار $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ را که در صفحه مورد نظر قرار دارند می‌یابیم.

$$\vec{AB} = \langle 0, 2, 2 \rangle, \quad \vec{AC} = \langle -4, 2, 5 \rangle$$

چون بردار نرمال صفحه مورد نظر بر صفحه عمود است لذا بر هر بردار داخل صفحه نیز عمود است. با توجه به خاصیت ضرب خارجی دو بردار (که بر هم عمود است) داریم:

$$n = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 6i + 8j + 8k$$

با توجه به بردار نرمال فوق و یکی از نقاط داده شده معادله صفحه به صورت زیر می‌باشد:

$$6x - 1 + 8y - 0 + 8z - -1 = 0$$

یعنی

$$6x + 8y + 8z = -2$$

معادله صفحه شامل نقطه و خط

مثال ۶

معادله صفحه شامل نقطه $A(1, 2, 3)$ و خط $d: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$ را به دست می‌آوریم.

حل: برای یافتن صفحه نیاز به یک نقطه و بردار نرمال صفحه (که بر صفحه عمود است) داریم. روی خط d نقطه $B(0, 1, 0)$ را اختیار

نموده و از دو نقطه A و B بردار $\vec{AB} = \langle 0 - 1, 1 - 2, 0 - 3 \rangle = \langle -1, -1, -3 \rangle$ را می‌یابیم. همچنین خط d دارای بردار هادی $n = \langle 2, 3, 1 \rangle$ موازی با خط d ، داخل صفحه می‌باشد. اکنون با توجه به این نکته که بردار نرمال صفحه بر صفحه عمود است لذا

بر هر بردار داخل آن نیز عمود است، (از جمله دو بردار $\vec{AB}$ و n) در میابیم که حاصلضرب خارجی این دو بردار، بردار نرمال صفحه مورد نظر می باشد:

$$m = \vec{AB} \times n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8i - 5j - k$$

با توجه به بردار نرمال فوق و نقطه $B(0, 1, 0)$ ، معادله صفحه به صورت زیر می باشد:

$$8x - 5y - z - 0 = 0$$

یعنی

$$8x - 5y - z = -5$$

■ وضعیت دو صفحه نسبت به هم

دو صفحه یا با هم موازی اند یا بر هم عمودند و یا متقاطعند. اگر بردارهای نرمال دو صفحه با هم موازی باشند، آن دو صفحه با هم موازی و اگر بردارهای نرمال دو صفحه بر هم عمود باشند آنگاه آن دو صفحه بر هم عمودند.

■ فاصله یک نقطه از صفحه

فاصله نقطه $A(x_0, y_0, z_0)$ از صفحه $p: ax + by + cz = d$ عبارت است از:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (۳)$$

مثال ۷ فاصله نقطه از صفحه

فاصله نقطه $A(1, 2, 3)$ از صفحه $p: 2x + y + 3z = 1$ را می یابیم.

$$d = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{12}{\sqrt{14}} \quad \text{حل:}$$

مثال ۸ زاویه بین دو صفحه

زاویه بین دو صفحه $2x + y - 2z = 1$ و $3x + 2y + z = 2$ را می یابیم.

حل: زاویه بین دو صفحه همان زاویه بین بردارهای نرمال آنها می باشد:

$$n_1 = \langle 2, 1, -2 \rangle, \quad n_2 = \langle 3, 2, 1 \rangle$$

$$\cos \theta = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

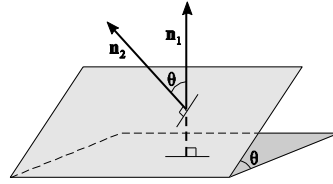
پس $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$ می باشد.

مثال ۹

زاویه و خط فصل مشترک بین دو صفحه

زاویه بین دو صفحه $x + y + z = 1$ و $x - 2y + 3z = 1$ و معادله خط فصل مشترک آنها را به دست می آوریم.

حل: مطابق شکل (۹) زاویه بین دو صفحه همان زاویه بین بردارهای نرمال آنها می باشد،



شکل ۳- زاویه بین دو صفحه

بردارهای نرمال دو صفحه برابر است:

$$\mathbf{n}_1 = \langle 1, 1, 1 \rangle, \quad \mathbf{n}_2 = \langle 1, -2, -3 \rangle$$

بنابراین زاویه بین دو صفحه برابر است با:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{1+1+1} \sqrt{1+4+9}} = \frac{2}{\sqrt{42}}$$

پس $\theta = \cos^{-1} \frac{2}{\sqrt{42}} \simeq 72^\circ$ می باشد.

برای تعیین خط فصل مشترک دو صفحه، به یک نقطه از خط نیاز داریم، که با حل دستگاه:

$$E_1: x + y + z = 1,$$

$$E_2: x - 2y + 3z = 1.$$

بی نهایت جواب روی خط به دست می آید، که با انتخاب اختیاری $z = 0$ ، از حل دستگاه 2×2 باقیمانده، نقطه $(1, 0, 0)$ حاصل می شود. اکنون به بردار موازی با خط فصل مشترک نیاز است که با توجه به شکل (۹) بردار $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ موازی فصل مشترک می باشد، یعنی،

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

پس معادله دکارتی خط عبارت است از،

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{-3}$$

■

مثال ۱۰

معادله خط عمود بر یک خط و موازی با صفحه دیگر

معادله خطی که از نقطه $1, -1, 1$ بگذرد و بر $3x = 2y = z$ عمود و با صفحه $x + y - z = 0$ موازی باشد را می یابیم.

حل: معادله خط مورد نظر $\frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{b} = \frac{z-1}{c}$ می باشد. این خط بر خط $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ عمود است پس بردارهای هادی آن دو

نیز بر هم عمودند یعنی:

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1 \rangle = 0 \Rightarrow \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0 \Rightarrow 2a + 3b + 6c = 0 \quad (۱)$$

از طرفی خط مورد نظر با صفحه $x + y - z = 0$ موازی است یعنی بردار نرمال صفحه بر بردار هادی خط عمود است پس :

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle 1, 1, -1 \rangle = 0 \Rightarrow a + b - c = 0 \quad (2)$$

با محاسبه a و b در روابط (۱) و (۲) و ثابت در نظر گرفتن c ، معادله خط مورد نظر به دست می آید :

$$-2 \begin{cases} a + b - c = 0 \\ 2a + 3b + 6c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a - 2b + 2c = 0 \\ 2a + 3b + 6c = 0 \end{cases}$$

$$b + 8c = 0 \Rightarrow b = -8c$$

همچنین داریم :

$$a + b - c = 0 \Rightarrow a - 8c - c = 0 \Rightarrow a = 9c$$

لذا معادله خط عبارت است از :

$$\frac{x-1}{9c} = \frac{y+1}{8c} = \frac{z-1}{c} \Rightarrow \frac{x-1}{9} = \frac{y+1}{8} = \frac{z-1}{1}$$

معادله صفحه شامل خط و موازی با خط دیگر

مثال ۱۱

معادله صفحه ای که از خط $\frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-4}{-2}$ بگذرد و با خط $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{1}$ موازی باشد را می یابیم.

حل : بردار نرمال صفحه از حاصلضرب خارجی بردارهای هادی دو خط به دست می آید:

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -6i - 7j - 16k$$

پس صفحه مورد نظر که از نقطه $1, 4, 4$ می گذرد، برابر است با:

$$-6(x-1) - 7(y-4) - 16(z-4) = 0 \Rightarrow 6x + 7y + 16z = 98$$

معادله صفحه گذرنده از فصل مشترک دو صفحه و عمود بر صفحه دیگر

مثال ۱۲

معادله صفحه ای که از فصل مشترک دو صفحه زیر می گذرد و عمود بر صفحه $x - y - 2z + 5 = 0$ می باشد را می یابیم.

$$\begin{cases} 7x - 4y + 7z + 16 = 0 \\ 4x + 3y - 2z + 13 = 0 \end{cases}$$

حل : ابتدا فصل مشترک دو صفحه را می یابیم. با فرض $z = t$ داریم:

$$\begin{cases} 7x - 4y = 7 - 7t - 16 \\ 4x + 3y = 2t - 13 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{13}{37}t - \frac{100}{37}, y = \frac{42}{37}t - \frac{27}{37}$$

بردار نرمال صفحه (عمود بر صفحه)، از ضرب خارجی بردار نرمال صفحه $x - y - 2z + 5 = 0$ و بردار $\vec{A} = -\frac{13}{37}\vec{i} + \frac{42}{37}\vec{j} + \vec{k}$ به دست می آید:

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -2 \\ -\frac{13}{37} & \frac{42}{37} & 1 \end{vmatrix} = \frac{47}{37}i - \frac{11}{37}j + \frac{29}{37}k$$

صفحه مورد نظر از نقطه $(-\frac{100}{37}, \frac{42}{37}, 0)$ می گذرد، لذا برابر است با:

$$47\left(x + \frac{100}{37}\right) - 11\left(y + \frac{27}{37}\right) + 29z - 0 = 0 \Rightarrow 47x - 11y + 29z + 119 = 0$$

■

معادله خط گذرنده از یک نقطه و موازی با دو صفحه

مثال ۱۳

معادله خط گذرنده از نقطه $-2, 3, 4$ و موازی با صفحات زیر را می یابیم.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 3x + 4y + 5z = 6 \end{cases}$$

حل: خط مورد نظر باید موازی با فصل مشترک دو صفحه باشد. یعنی با حاصلضرب خارجی بردارهای نرمال دو صفحه موازی است. لذا بردار هادی خط عبارت است از:

$$n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = i - 2j + k$$

پس معادله خط برابر است با:

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-4}{1}$$

■

مجموعه تمرین‌های بخش ۳.۱

۱. (درست یا غلط) تعیین کنید کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک غلط است.

a. دو خط که با خط سوم موازی هستند، با هم نیز موازی هستند.

b. دو خط که به خط سوم عمود هستند، با هم موازی هستند.

c. دو صفحه که با صفحه سوم موازی هستند با هم موازی هستند.

d. دو صفحه که به صفحه سوم عمود هستند با هم موازی هستند.

۲. (معادله خط) در تمرین‌های زیر معادله دکارتی و پارامتری خطوط را به دست آورید.

a. خطی که از نقطه $2, 1, 3$ بگذرد و موازی بردار $\langle 2, 3, -1 \rangle$ باشد.

b. خطی که از مبدا بگذرد و موازی با خط $x = t$ و $y = 1 - t$ و $z = 2 + 3t$ باشد.

c. خطی که از نقطه $0, 1, 0$ بگذرد و بر صفحه $2 - 2x + y + 3z = 0$ عمود باشد.

d. معادله خطی را بنویسید که از نقطه $2, 1, 3$ بگذرد، خط $\begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}$ را قطع کند و با صفحه $x + y + z = 0$ موازی باشد.

e. معادله خطی را بنویسید که در صفحه $5x - 5y + 5z = 15$ واقع باشد و دو خط زیر را قطع کند.

$$l_1 : x = 1 + t, y = -3 + 2t, z = 2 - t \quad l_2 : x = 2t, y = 4t, z = 3 + 3t$$

f. معادله خطی که از نقطه $2, 3, 0$ بگذرد و بر بردارهای $a = i + 2j + 3k$ و $b = 3i + 4j + 5k$ عمود باشد.

۳. (وضعیت دو خط نسبت به هم) در تمرین‌های زیر تعیین کنید که دو خط داده شده موازی، متقاطع یا متناظر هستند.

$$\begin{aligned} l_1 : x = -6t, y = 1 + 9t, z = -3t & \quad l_2 : x = 1 + 2s, y = 4 - 3s, z = s \\ \text{b.} & \quad l_1 : \frac{x-4}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{-3} \\ & \quad l_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{2} \end{aligned}$$

۴. (معادله صفحه) در تمرین‌های زیر معادله صفحه را بیابید.

a. صفحه‌ای که از نقطه $1, 2, 3$ گذشته و بر $\langle -1, 1, 2 \rangle$ عمود به آن باشد.

b. صفحه‌ای که از سه نقطه $1, 0, 0$ و $0, 1, 0$ و $0, 0, 1$ عبور می‌کند.

c. صفحه‌ای که از نقطه $-2, 8, 10$ گذشته و عمود بر خط $z = 4 - 3t$ و $y = 2t$ و $x = 1$ باشد.

d. صفحه‌ای که از مبدا گذشته و موازی صفحه $2x - y + z = 2$ باشد.

e. صفحه‌ای که از فصل مشترک صفحات $x - z = 1$ و $y + 2z = 3$ عبور کند و عمود بر صفحه $x + y - 2z = 1$ باشد.

f. صفحه‌ای که از نقطه $2, 1, -1$ گذشته و عمود بر فصل مشترک دو صفحه $2x + y - z = 3$ و $x + 2y + z = 2$ باشد.

g. صفحه‌ای که از دو نقطه $(1, 0, -1)$ و $(-1, 2, 1)$ گذشته و با فصل مشترک دو صفحه $3x + y - 2z = 6$ و $4x - y + 3z = 0$ موازی باشد.

۵. (وضعیت دو صفحه نسبت به هم) در تمرین‌های زیر تعیین کنید که دو صفحه موازی، عمود یا متقاطع هستند. اگر متقاطع هستند زاویه بین آنها را بیابید.

$$3x + 6y + 7z = 0, x + 4y - 3z = 1 \quad \text{b.} \quad y + z = 1, x + z = 1$$

$$-3x - 6y + 3z = 0, 2x + 4y - 2z = 1 \quad \text{c.}$$

۶. (فاصله نقطه از صفحه) فاصله نقطه $1, -1, 2$ را از صفحه $x - 2y - z = 4$ بیابید.