

بخش ۲.۱ ماتریس و دترمینان

ماتریس

ماتریس آرایش مرتبی است از اعداد حقیقی که در سطرها و ستون‌ها تنظیم شده‌اند. هر ماتریس با مرتبه‌اش یعنی تعداد سطرها و ستون‌ها مشخص می‌شود. مرتبه هر ماتریس با دو اندیس مشخص می‌شود که اندیس سمت چپ تعداد سطرها و اندیس سمت راست تعداد ستون‌ها را نشان می‌دهد. مانند $A_{2 \times 3}$ که یک ماتریس شامل ۲ سطر و ۳ ستون می‌باشد. در حالت کلی عنصر (درایه یا مولفه) مربوط به سطر i و ستون j در ماتریس A را با a_{ij} نشان می‌دهیم که درایه نامیده می‌شوند.

■ تساوی دو ماتریس

دو ماتریس $A_{m \times n}$ و $B_{m \times n}$ که هم مرتبه هستند هنگامی برابرند که هر عضو متناظر آنها (درایه‌های نظیر به نظیر) با هم برابر باشند یعنی

$$\forall i, j, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad a_{ij} = b_{ij}$$

■ جمع دو ماتریس هم مرتبه

مجموع دو ماتریس هم مرتبه $A_{m \times n}$ و $B_{m \times n}$ ، ماتریس جدید $C_{m \times n}$ است اگر هر عضو آن از جمع دو عضو متناظر در ماتریس‌های A و B به دست آید یعنی

$$\forall i, j, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

نیز تفاضل دو ماتریس به طور مشابه محاسبه می‌گردد. قرینه ماتریس A برابر ماتریس $-A$ است که تمام مولفه‌های آن قرینه مولفه‌های ماتریس A هستند. لازم به ذکر است که ماتریس‌های غیر هم رتبه جمع یا تفریق نمی‌شوند.

■ خواص جمع ماتریس

اگر A و B و C ماتریس هم مرتبه باشند آنگاه داریم:

$$A + B = B + A \quad (\text{i})$$

$$A + B + C = A + B + C \quad (\text{ii})$$

$$A + O = O + A = A \quad (\text{iii}) \quad (O \text{ ماتریس صفر که همه درایه‌های آن صفر است و هم مرتبه ماتریس } A \text{ است})$$

$$A + (-A) = (-A) + A = O \quad (\text{iv})$$

■ ضرب ماتریس‌ها

ضرب در ماتریس‌ها به دو صورت ضرب یک اسکالر در ماتریس و ضرب دو ماتریس امکان پذیر می‌باشد.

۱. ضرب اسکالر در ماتریس

ضرب اسکالر دلخواه $k \in \mathbb{R}$ در ماتریس A عبارت است از حاصل ضرب اسکالر k در همه درایه‌های ماتریس A .

عملیات روی ماتریس

مثال ۱

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ ، آنگاه حاصل $-2A + 3B$ را به دست می‌آوریم.

حل:

$$\begin{aligned} -2A + 3B &= -2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 12 & 14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

۲. ضرب دو ماتریس

ضرب دو ماتریس در صورتی تعریف می‌شود که تعداد ستون‌های ماتریس سمت چپ با تعداد سطرهای ماتریس سمت راست برابر باشند یعنی:

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

که حاصلضرب آنها ماتریسی است که از تعداد سطرهای ماتریس سمت چپ و تعداد ستون‌های ماتریس سمت راست تشکیل شده است و عنصر واقع در سطر i -ام و ستون j -ام ماتریس حاصل از مجموع عناصر به دست آمده از حاصلضرب سطر i -ام ماتریس سمت چپ در ستون j -ام ماتریس سمت راست به دست می‌آید. یعنی:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj} \\ \text{ستون } j \text{ - ام} & \quad \text{ستون } i \text{ - ام} \\ \vdots & \quad \vdots = [c_{ij}] \end{aligned}$$

ضرب دو ماتریس

مثال ۲

$$\text{حاصلضرب دو ماتریس } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ را به دست می‌آوریم.}$$

حل: با توجه به مرتبه ماتریس‌ها AB ، امکان‌پذیر نیست و فقط می‌توان BA را به دست آورد.

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 1 & 1 \times -1 + 2 \times 2 & 1 \times 0 + 2 \times 1 \\ -1 \times 1 + 1 \times 1 & -1 \times -1 + 1 \times 2 & -1 \times 0 + 1 \times 1 \end{bmatrix}$$

■

نکته ۱

با توجه به مثال فوق نتیجه می‌گیریم که حاصلضرب دو ماتریس خاصیت جابجایی ندارد یعنی

$$AB \neq BA$$

■ خواص ضرب ماتریس‌ها

اگر A و B و C سه ماتریس دلخواه باشند آنگاه داریم:

$$AB \ C = A \ BC \quad \text{(i)}$$

$$A \ B + C = AB + BC \quad \text{(ii)}$$

(iii) قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها برقرار نیست یعنی اگر $AB = AC$ ، نمی‌توان نتیجه گرفت که $B = C$. البته در صورتی می‌توان به آن نتیجه رسید که $0 \neq |A|$ (دترمینان A)

ماتریس‌های خاص

۱. ماتریس مربعی

اگر تعداد سطرها و ستون‌ها در ماتریس برابر باشند آن ماتریس را **ماتریس مربعی** می‌نامیم این ماتریس دارای قطر اصلی و قطر فرعی می‌باشد که قطر اصلی آن شامل تمام درایه‌هایی از ماتریس است که هر دو اندیس با هم برابر باشند.

ماتریس مربعی

مثال ۳

در ماتریس مربعی زیر عناصر قطر اصلی و قطر فرعی را می‌یابیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

حل: عناصر قطر اصلی عبارتند از 1، 5 و 9 عناصر قطر فرعی عبارتند از: 3، 5 و 7.

۲. ماتریس همانی یا واحد:

ماتریس مربعی است که تمام درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر با یک و بقیه صفر است معمولاً ماتریس همانی را با I نمایش می‌دهیم. واضح است که حاصلضرب هر ماتریس در ماتریس همانی خود آن ماتریس می‌باشد (چرا؟) یعنی ماتریس همانی عضو خنثی عمل ضرب در ماتریس‌ها است.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ماتریس همانی } 3 \times 3$$

۳. ماتریس قطری

ماتریس مربعی است که تمام درایه‌های غیر از قطر اصلی آن صفر است (درایه‌های قطر اصلی می‌توانند صفر یا غیر صفر باشند).

ماتریس قطری

مثال ۴

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ یک ماتریس قطری است که درایه‌های قطر اصلی آن 2، 1 و 0 می‌باشند.}$$

۴. ماتریس متقارن

یک ماتریس مربعی است که در آن

$$\forall i, j, a_{i,j} = a_{j,i}$$

ماتریس متقارن

مثال ۵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ یک ماتریس متقارن است.}$$

۵. ماتریس مثلثی

ماتریسی که تمام درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفر باشد، ماتریس بالا مثلثی و ماتریسی که تمام درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشد، ماتریس پایین مثلثی نامیده می‌شود. ماتریسی که بالا مثلثی یا پایین مثلثی باشد، ماتریس مثلثی نامیده می‌شود.

ماتریس بالا و پایین مثلثی

مثال ۶

$$\text{ماتریس } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ یک ماتریس بالا مثلثی و ماتریس } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ یک ماتریس پایین مثلثی است.}$$

۶. ماتریس صفر

ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشد ماتریس صفر است.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ترانهاد ماتریس

اگر در یک ماتریس جای سطرها و ستون‌ها را عوض کنیم ماتریس حاصل را ترانهاد ماتریس اول می‌نامیم. یعنی اگر ماتریس A دارای درایه‌های a_{ij} و ترانهاد آن یعنی A^T دارای درایه‌های a_{ji}^T باشد آنگاه داریم:

$$\forall i, j, a_{ij}^T = a_{ji}$$

نکته ۲: اگر ترانهاد یک ماتریس با خود ماتریس برابر باشد آن ماتریس ماتریس متقارن است.

ترانهاد ماتریس

مثال ۷

$$\text{ترانهاد ماتریس } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ماتریس } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ می‌باشد.}$$

■ خواص ترانهاد ماتریس

اگر A و B دو ماتریس و k اسکالر دلخواه باشند آنگاه داریم:

$$A^T{}^T = A \quad \text{(i)} \quad A \pm B^T = A^T \pm B^T \quad \text{(ii)}$$

$$AB^T = B^T A^T \quad \text{(iv)} \quad \forall k \in \mathbb{R}: kA^T = kA^T \quad \text{(iii)}$$

$$A^n{}^T = A^T{}^n \quad n \in N \quad \text{(v)}$$

دترمینان

دترمینان تابعی است از ماتریس های مربع به مجموعه اعداد حقیقی که این تابع پوششی است ولی یک به یک نیست. دترمینان ماتریس A را با $|A|$ نمایش داده و دترمینان ماتریس 2×2 را به صورت زیر محاسبه می نماییم:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

دترمینان ماتریس 3×3 و مراتب بالاتر به کمک بسط توسط یک سطر یا یک ستون به شکل زیر محاسبه می گردید:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 - b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - b_2 c_1$$

لازم به ذکر است که علامت ضرایب دترمینان های 2×2 فوق از رابطه 1^{i+j} محاسبه می گردد که در آن i و j به ترتیب موقعیت سطر و ستون آن ضریب می باشد.

■ خواص دترمینان

- دترمینان هر ماتریس با دترمینان ترانهاده آن برابر است یعنی $|A| = |A^T|$
- اگر جای دو سطر یا دو ستون دترمینان تغییر کند علامت دترمینان تغییر می کند.
- اگر همه درایه ای یک سطر یا یک ستون صفر باشد حاصل دترمینان صفر است.
- اگر همه درایه های یک سطر یا یک ستون دترمینان را در یک عدد غیر صفر ضرب کنیم حاصل دترمینان در آن عدد ضرب می گردد.
- دترمینان هر ماتریس قطری و مثلثی برابر است با حاصل ضرب درایه های روی قطر اصلی آن
- اگر A و B دو ماتریس مربع هم مرتبه باشند آنگاه $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

مجموعه تمرین‌های بخش ۲.۱

۱. اگر A و B به صورت زیر داده شده باشد، عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a. $B + A, A + B$ **b.** $2B + 3A, 3A - 2B$

c. $A^T + B^T, A + B^T$ **d.** $B^T, A + A^T, A - A^T$

e. آیا A و B متقارن هستند؟

۲. (ضرب ماتریس‌ها) اگر A و B و C به صورت زیر داده شده باشند

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, C = 2, 1$$

آنگاه حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

a. CAB, BAC **b.** CA, ABC

c. BC, CB, AC **d.** BA, AB, CA

(در مورد ضرب‌هایی که ممکن نیست توضیح دهید)

۳. دترمینان‌های زیر را حساب کنید.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} k & -2 & 1 \\ 1 & 0 & k+2 \\ 1 & k^2 & 2 \end{vmatrix}$$

۴. مقدار k را طوری بیابید که $\det A \neq 0$

b. $A = \begin{vmatrix} k-1 & 0 & 0 \\ 0 & k-2 & 0 \\ 0 & 0 & k+4 \end{vmatrix}$

a. $A = \begin{vmatrix} -1+k & 3 \\ 3 & k-1 \end{vmatrix}$

۵. تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$