

بردارها و هندسه تحلیلی

۱.۱ بردار

۲.۱ ماتریس و دترمینان

۳.۱ معادلات خط و صفحه

۴.۱ رویه های فضایی

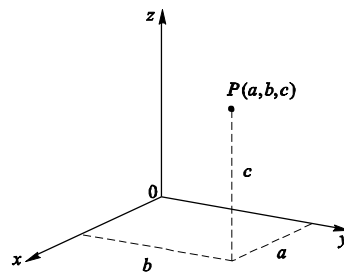
مقدمه

در بسیاری از مطالعات علمی اعم از علوم و مهندسی با کمیت هایی برخورد می کنیم که دارای بعد، بزرگی و جهت هستند. به عنوان مثال در فیزیک با مفاهیمی چون نیرو و سرعت آشنا می شویم. این مفاهیم می توانند در صفحه دوبعدی و یا فضای سه بعدی مورد بحث قرار گیرند. در حالت کلی به ابزاری برای معرفی و کار در مورد کمیت های مختلف نیاز داریم. این ابزار پاره خط های جهت داری هستند که بردار نام دارند. در این فصل به معرفی و تحلیل بردارها می پردازیم و نشان می دهیم که بردارها یک توصیف ساده از خطوط و صفحات را به دست می دهند.

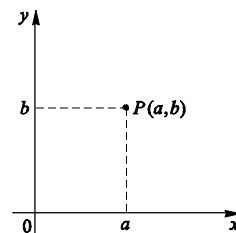
بخش ۱.۱ بردارها

■ دستگاه مختصات فضایی

به یاد می آوریم که نقطه p در صفحه را می توان با زوج مرتب a, b از اعداد حقیقی به نام مختصات دکارتی نمایش داد. اگر دو خط عمود بر هم کشیده و آنها را محورهای x (طول) و y (عرض) بنامیم، می توان عمودهایی از نقطه p بر این محورها (شکل ۱) رسم کرد. a مولفه طول و b مولفه عرض نقطه p می باشند. به همین صورت نقاط در فضا را می توان با سه تایی هایی مرتب از اعداد حقیقی نمایش داد. برای ساختن چنین نمایشی، سه بردار دو به دو متعامد که در نقطه ای از فضا تلاقی دارند را اختیار می کنیم. این خطوط را محور x ، محور y و محور z ، و نقطه تلاقی را مبدا می نامیم.

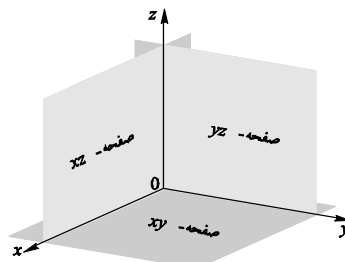


شکل ۲- مختصات دکارتی در فضا



شکل ۱- مکان یک نقطه در صفحه

لذا مکان p در فضای سه بعدی xyz که از قانون دست راست استفاده می کند، با سه تایی مرتب a, b, c نمایش داده می شود. به این صورت که ابتدا مکان زوج مرتب a, b را پیدا نموده، سپس به اندازه c واحد در امتداد محور z انتقال داده می شود (شکل ۲). یک دستگاه مختصات دکارتی سه بعدی از سه صفحه مختصات xy ، xz و yz تشکیل می شود که فضا را به هشت ناحیه تقسیم می کند. (شکل ۳) و برای به دست آوردن مختصات یک نقطه در فضا مانند مشخص نمودن مختصات یک نقطه در صفحه عمل می کنیم به این ترتیب که از آن نقطه سه صفحه عمود بر محورهای xy ، xz و yz رسم نموده و فاصله محل تلاقی را تا مبدا مختصات به دست می آوریم که همان مختصات نقطه p می باشد.



شکل ۳- سه صفحه مختصات

■ فاصله بین دو نقطه در فضا

فاصله بین دو نقطه $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ در فضا با رابطه زیر تعیین می شود.

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

بردارها

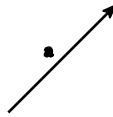
کمیت هایی مانند دما، زمان، جمعیت و طول که فقط مقدار دارند، به کمیت های اسکالر معروف هستند. ولی کمیت هایی مانند سرعت، نیرو و تغییر مکان که در مشخص کردن آنها علاوه بر مقدار، جهت نیز لازم است، بردار نامید می شوند.

بردار

تعریف ۱.۱

کمیتی که علاوه بر مقدار، جهت نیز داشته باشد، بردار نامیده می شود.

بردارها معمولاً با یک پاره خط جهت دار، و نام آنها به صورت (شکل ۴) نمایش داده می شوند.



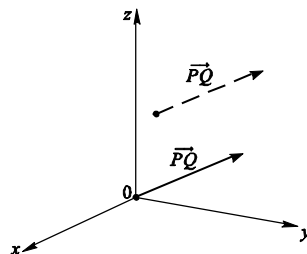
شکل ۴-نمایش یک بردار

بردارهایی که دارای اندازه و جهت یکسان با بردار می باشند، همسنگ a نامیده می شوند.

■ نمایش بردار

یک بردار را در یک صفحه به وسیله یک زوج مرتب از اعداد حقیقی $\langle a_1, a_2 \rangle$ و یک بردار در فضای $\mathbb{R}^3$ را با سه تایی مرتب $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و در حالت کلی یک بردار در فضای $\mathbb{R}^n$ را با n -تایی مرتب $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ نمایش می دهند. a_i ها مولفه های بردار می باشند. اغلب یک بردار که نقطه ابتدای آن P x_1, y_1 و نقطه انتهای آن Q x_2, y_2 باشد، به صورت همسنگ آن به صورت زیر نمایش داده می شود (شکل ۵). این بدان معنی است که نقاط ابتدا و انتهای بردار مهم نیستند. در واقع طول و جهت بردار مشخصات اصلی آن هستند.

$$\vec{PQ} = x_2 - x_1, y_2 - y_1$$



شکل ۵- بردار مستقل از مکان است

■ عملیات جبری روی بردارها

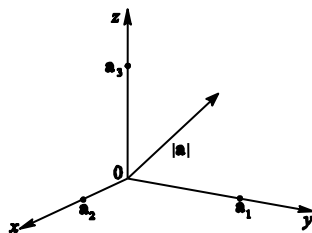
۱. طول بردار

طول یا مقدار یک بردار مانند a را معمولاً *اندازه* یا *نرم* آن می نامند و با علامت $|a|$ یا $\|a\|$ نمایش داده می شود. طول بردار $\vec{PQ}$ با نقاط ابتدایی P x_1, y_1 و انتهای Q x_2, y_2 عبارت است از:

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1)$$

و طول بردار $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ در $\mathbb{R}^3$ مطابق شکل (۶) به صورت زیر است:

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (2)$$



شکل ۶-اندازه بردار در فضا

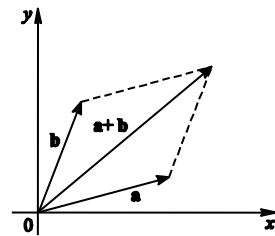
برداري که طول آن یک باشد، یعنی $|a| = 1$ ، بردار واحد یا *بردار یکانی* نامیده می شود.

۲. جمع دو بردار :

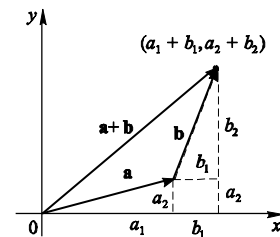
اگر $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ دو بردار در فضای $\mathbb{R}^3$ باشند، بردار $a + b$ به صورت زیر تعریف می شود :

$$a + b = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle \quad (۳)$$

جمع دو بردار به صورت مثلثی یا به صورت متوازی الاضلاع در شکل های (۷) و (۸) نمایش داده شده است.



شکل ۸- جمع دو بردار با متوازی الاضلاع



شکل ۷- جمع دو بردار به صورت مثلثی

۳. ضرب اسکالر در بردار :

اگر $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ یک بردار دلخواه و k یک عدد حقیقی (اسکالر) مفروض باشند، حاصلضرب آنها عبارت است از :

$$ka = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$$

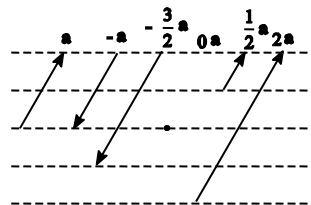
که اندازه آن $|k|$ برابر طول بردار a می باشد :

$$|ka| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2 + (ka_3)^2} = \sqrt{k^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} = |k| \cdot |a|$$

و جهت آن به علامت k بستگی دارد :

۱. اگر $k > 0$ آنگاه با a هم جهت است.

۲. اگر $k < 0$ آنگاه مخالف جهت a است.



شکل ۹- ضرب اسکالر در بردار

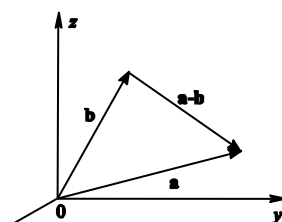
■ تفاضل دو بردار :

تفاضل دو بردار $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ عبارت است از :

$$a - b = a + (-b) = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle + \langle -b_1, -b_2, -b_3 \rangle$$

$$= \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle \quad (۴)$$

ملاحظه گردید که تفاضل دو بردار a و b ، جمع بردار a با قرینه بردار یعنی $-b$ است (شکل ۱۰).



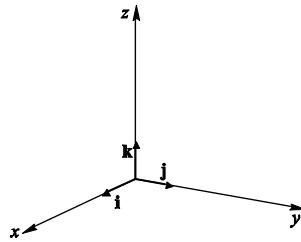
شکل ۱۰- تفاضل دو بردار

■ بردارهای واحد (یکه) :

در فضای $\mathbb{R}^3$ به بردارهای $i = \langle 1, 0, 0 \rangle$ و $j = \langle 0, 1, 0 \rangle$ و $k = \langle 0, 0, 1 \rangle$ که به ترتیب در جهت مثبت محور x ، y و z قرار دارند، بردارهای یکه گفته می‌شود. که طول آنها برابر واحد می‌باشد (شکل ۱۱). اگر $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ یک بردار دلخواه باشد داریم:

$$\begin{aligned} a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle &= \langle a_1, 0, 0 \rangle + \langle 0, a_2, 0 \rangle + \langle 0, 0, a_3 \rangle \\ &= a_1 \langle 1, 0, 0 \rangle + a_2 \langle 0, 1, 0 \rangle + a_3 \langle 0, 0, 1 \rangle \\ &= a_1 i + a_2 j + a_3 k \end{aligned} \quad (5)$$

که نمایش جدیدی از بردار v می‌باشد.



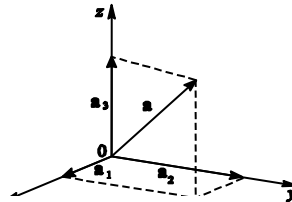
شکل ۱۱ - بردارهای واحد

■ بردار جهت :

هر بردار غیر صفر $a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ با تقسیم بر اندازه‌اش، یعنی $|a|$ به بردار واحد تبدیل می‌شود (شکل ۱۲)، یعنی

$$b = \frac{a}{|a|} = \frac{a_1 i + a_2 j + a_3 k}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

بردار u به بردار جهت یا بردار نرمال بردار v معروف است.



شکل ۱۲ - تجزیه یک بردار

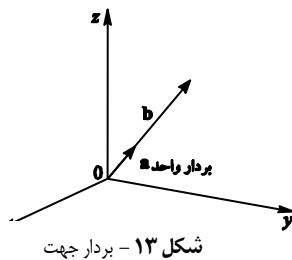
جهت یا راستای بردار $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ به وسیله زاویه‌های α و β و γ که بردار با محورهای مختصات می‌سازد، مشخص می‌شود. کسینوس‌های این زوایا را کسینوس‌های هادی بردار می‌نامیم که از فرمول‌های زیر محاسبه می‌شوند.

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|a|}, \quad \cos \beta = \frac{a_2}{|a|}, \quad \cos \gamma = \frac{a_3}{|a|}$$

$$b = \frac{a}{|a|} = \cos \alpha \, i + \cos \beta \, j + \cos \gamma \, k$$

از یکانی بودن b رابطه بین کسینوس‌های هادی برای هر بردار به صورت زیر نتیجه می‌گردد (چرا؟):

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (6)$$



عملیات روی بردارها

مثال ۱

اگر $a = \langle 1, 0, -1 \rangle$ و $b = \langle -4, 2, 4 \rangle$ دو بردار باشند آنگاه حاصل $|b|$ و $a+b$ و $2a$ و بردار جهت متناظر با بردار b را به دست می آوریم.

حل: ابتدا بردارها را بر حسب بردار واحد می نویسیم تا عملیات جبری ساده تر انجام گیرد:

$$a = \langle 1, 0, -1 \rangle = i - k$$

$$b = \langle -4, 2, 4 \rangle = -4i + 2j + 4k$$

لذا داریم:

$$|b| = \sqrt{-4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$a + a = i - k + -4i + 2j + 4k = -3i + 2j + 3k$$

$$2a = 2i - 2k$$

$$b \text{ بردار جهت متناظر با } b = \frac{b}{|b|} = \frac{-4i + 2j + 4k}{6} = -\frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k$$

ضرب بردارها:

دو نوع ضرب بین بردارها وجود دارد، ضرب داخلی (یا نقطه ای) و ضرب خارجی (یا متقاطع) که در ادامه به معرفی آنها می پردازیم.

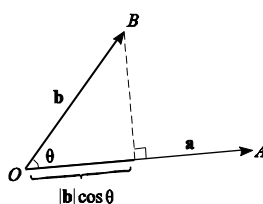
ضرب داخلی:

حاصلضرب داخلی دو بردار برابر است با اندازه یکی در تصویر دیگری روی بردار اول. توجه شود که حاصلضرب داخلی دو بردار یک عدد حقیقی است و به همین دلیل به آن ضرب نقطه ای یا ضرب اسکالر نیز گفته می شود.

تعریف ۲.۱ ضرب داخلی (ضرب نقطه ای)

اگر $a = a_1i + a_2j + a_3k$ و $b = b_1i + b_2j + b_3k$ دو بردار باشند **ضرب نقطه ای** a در b عبارت است از اندازه یکی در تصویر دیگری روی خودش.

$$a \cdot b = |a||b|\cos\theta \quad (۷)$$



شکل ۱۴ - تصویر اسکالر

خواص ضرب داخلی

اگر a و b و c سه بردار در $\mathbb{R}^3$ و k یک اسکالر باشند آنگاه داریم:

$$a \cdot a = |a|^2 \quad \text{(i)} \quad a \cdot b = b \cdot a \quad \text{(ii)} \quad 0 \cdot a = 0 \quad \text{(iii)}$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{(v)} \quad (ka) \cdot b = k(a \cdot b) = a \cdot (kb) \quad \text{(iv)}$$

نکته ۱

اگر $a = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و $b = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ دو بردار باشند ضرب نقطه‌ای a در b عدد ab می باشد که به صورت زیر داده می شود:

$$ab = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad (۸)$$

■ زاویه بین دو بردار:

اگر θ زاویه بین دو بردار a و b باشد آنگاه

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} \quad (۹)$$

دو بردار غیر صفر a و b متعامد نامیده می شوند، هرگاه زاویه بین دو بردار 90° باشد. و در نتیجه اگر $\theta = \frac{\pi}{2}$ آنگاه داریم:

$$a \cdot b = |a||b| \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

به طور خلاصه نتیجه می گردد:

$$a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0 \quad (۱۰)$$

زاویه بین دو بردار

مثال ۲

زاویه بین دو بردار $a = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ و $b = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ را می یابیم.

حل: داریم $|b| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3$ و $|a| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 4^2} = 6$ از طرفی

$$a \cdot b = -4 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = -8$$

لذا خواهیم داشت:

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{-8}{6 \cdot 3} \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \left(-\frac{4}{9} \right)$$

محیط و زوایای مثلث

مثال ۳

محیط و زاویه های داخلی مثلثی که دارای رئوس $A(-1, 1, 2)$ و $B(1, -1, -3)$ و $C(0, 1, -2)$ می باشند را می یابیم.

حل: ابتدا سه بردار $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ و $\vec{BC}$ را با کمک نقاط انتها و ابتدا محاسبه می کنیم:

$$\vec{AB} = 2, -2, -5 \quad , \quad \vec{AC} = 1, 0, -4 \quad , \quad \vec{BC} = -1, 2, 1$$

اکنون طول بردارهای فوق که همان اضلاع مثلث می باشد، را می یابیم:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{33}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{17}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

پس محیط مثلث برابر است با:

$$\sqrt{33} + \sqrt{17} + \sqrt{6}$$

زاویه بین بردارهای $\vec{AB}$ ، $\vec{AC}$ و $\vec{BC}$ همان زوایای مثلث می باشد.

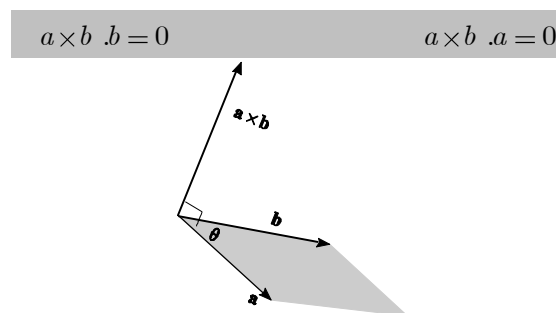
تعریف ۳.۱

ضرب خارجی (ضرب برداری)

اگر $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ دو بردار باشند حاصلضرب خارجی دو بردار a و b که با علامت $a \times b$ نمایش داده می شود به صورت زیر تعریف می گردد:

$$a \times b = a_2 b_3 - a_3 b_2 \ i - a_1 b_3 - a_3 b_1 \ j + a_1 b_2 - a_2 b_1 \ k \quad (۱۱)$$

یکی از مهم ترین خواص ضرب خارجی آن است که حاصلضرب خارجی دو بردار a و b هم به a و هم به b و به عبارت دیگر به صفحه تشکیل دهنده a و b عمود است (شکل ۱۵). یعنی



شکل ۱۵-ماهیت ضرب خارجی

نکته ۲

حاصلضرب خارجی دو بردار را به کمک دترمینان می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k$$

نکته ۳

با توجه به اینکه حاصلضرب خارجی دو بردار، یک بردار است، به آن حاصلضرب برداری نیز گفته می شود.

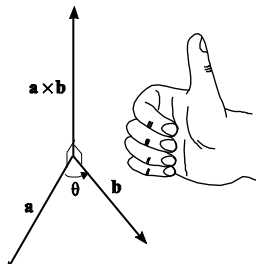
خواص ضرب خارجی

اگر k یک اسکالر و a و b و c سه بردار باشند داریم:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \quad \text{(iii)} \quad a \times a = 0 \quad \text{(ii)} \quad a \times b = -b \times a \quad \text{(i)}$$

$$ka \times b = k(a \times b) = a \times kb \quad \text{(v)} \quad (a + b) \times c = a \times c + b \times c \quad \text{(iv)}$$

دقت کنید که جهت $a \times b$ در $\mathbb{R}^3$ از قانون دست راست پیروی می کند (شکل ۱۶). به این صورت که هرگاه انگشت های دست راست از سمت بردار a به سمت بردار b تا شوند، انگشت شست جهت بردار $a \times b$ را نشان خواهد داد.



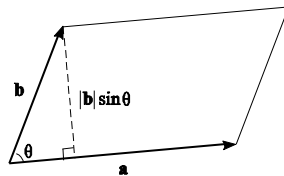
شکل ۱۶- ترتیب ضرب خارجی

با توجه به تعریف ضرب خارجی، اندازه $a \times b$ به صورت زیر می‌باشد:

$$|a \times b| = |a||b|\sin\theta \quad (12)$$

با توجه به شکل (۱۷)، عبارت $|b|\sin\theta$ مولفه عمودی بردار b در امتداد بردار a می‌باشد، پس مساحت متوازی الاضلاع حاصل از بردارهای a و b عبارت است از:

$$S = \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = |a| \times |b|\sin\theta = |a \times b|$$



شکل ۱۷- مساحت متوازی الاضلاع به کمک ضرب خارجی دو بردار

که نصف مساحت متوازی الاضلاع فوق، مساحت مثلث تشکیل دهنده خواهد بود.

مساحت مثلث

مثال ۴

مساحت مثلث با رئوس $A -1, 1, 2$ و $B 1, -1, -3$ و $C 0, 1, -2$ را به دست می‌آوریم.

حل: ابتدا دو بردار $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ را با کمک نقاط انتها و ابتدا محاسبه می‌کنیم:

$$\vec{AB} = 2, -2, -5 \quad , \quad \vec{AC} = 1, 0, -4$$

اکنون ضرب خارجی $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AC} &= 8 - 0i - 8 + 5j + 0 + 2k \\ &= 8i + 3j + 2k \end{aligned}$$

چون مساحت مثلث ABC نصف مساحت متوازی الاضلاع تشکیل شده از $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ می‌باشد، لذا داریم:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{8^2 + 3^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{77}}{2}$$

■ دو بردار موازی

دو بردار a و b موازی هستند هرگاه یکی از آنها مضرب اسکالر بردار دیگر باشد یعنی اگر $k \in \mathbb{R}$ موجود باشد به طوری که $b = ka$. بنابراین

$$\begin{aligned} a \times b &= a_2ka_3 - a_3ka_2 \quad i - a_1ka_3 - a_3ka_1 \quad + a_1ka_2 - a_2ka_1 \\ &= k \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

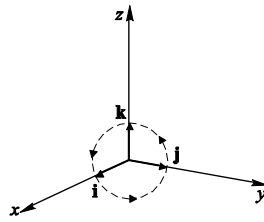
لذا اگر دو بردار a و b موازی باشند آنگاه $a \times b = 0$ و بالعکس.

$$a \parallel b \Leftrightarrow a \times b = 0 \quad (۱۳)$$

با توجه به جهت ضرب خارجی که از قانون دست راست استفاده می کند در مورد بردارهای واحد خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} i \times j &= k, & j \times k &= i, & k \times i &= j \\ j \times i &= -k, & k \times j &= -i, & i \times k &= -j \\ i \times i &= 0, & j \times j &= 0, & k \times k &= 0 \end{aligned}$$

در واقع جهت ضرب بردارهای واحد به طوریکه علامت مثبت بماند از جهت های موجود در دایره زیر تبعیت می کند.



شکل ۱۸- ترتیب ضرب خارجی بردارهای واحد

ضرب مختلط

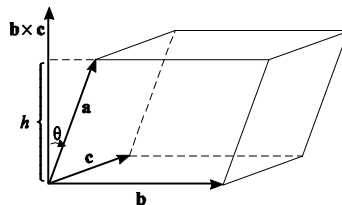
اگر ضرب داخلی و ضرب خارجی سه بردار a و b و c را ترکیب کنیم، ضرب دیگری به صورت $a \cdot b \times c$ به وجود می آید که به آن ضرب اسکالر سه گانه گفته می شود. ضرب اسکالر سه گانه را می توان به صورت زیر به دست آورد:

$$a \cdot b \times c = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (۱۴)$$

تعیین حجم متوازی السطوح

متوازی السطوحی را در فضا در نظر بگیرید (شش وجهی که هر دو وجه مقابل هم با هم موازی باشند) (شکل ۱۹) هرگاه یکی از نقاط گوشه ای آن را انتخاب کرده و سه پاره خط (یال) هم رأس در آن نقطه را به عنوان سه بردار در نظر بگیریم، حجم متوازی السطوح از ضرب اسکالر سه گانه بردارها به دست می آید:

$$v = |a \cdot b \times c| = |a| |b \times c| \cos \theta = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} \quad (۱۲)$$



شکل ۱۹- تعبیر هندسی ضرب سه گانه

هرگاه سه بردار a و b و c در یک صفحه باشند، حاصل ضرب خارجی دو بردار a و b برداری عمود بر هر سه بردار خواهد بود لذا حاصل ضرب داخلی بردار جدید در c برابر صفر می گردد و بالعکس.

تکته ۴

شرط آنکه سه بردار در یک صفحه قرار گیرند آن است که ضرب مختلط آنها برابر صفر شود.

$$a \cdot b \times c = 0$$

حجم متوازی السطوح

مثال ۵

حجم متوازی السطوح که از بردارهای $a = \langle 1, 4, -7 \rangle$ و $b = \langle 2, -1, 4 \rangle$ و $c = \langle 0, -9, 18 \rangle$ تشکیل شده است را به دست می آوریم.

حل: با استفاده از رابطه (۱۱) داریم:

$$a \cdot b \times c = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -9 & 18 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -9 & 18 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 18 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -9 \end{vmatrix} \\ = 1 \cdot 18 - 4 \cdot 36 - 7 \cdot (-18) = 0$$

پس سه بردار هم صفحه می باشند.

■ شرط عمود بودن (تعامد) و موازی بودن (توازی) دو بردار

اگر دو بردار $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ بر هم عمود باشند در آن صورت $\theta = \frac{\pi}{2}$ لذا $\cos \theta = 0$ پس $\cos \theta = \frac{ab}{|a||b|} = 0$ یعنی $a \cdot b = 0$ در نتیجه

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

اگر دو بردار $a = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ و $b = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ با هم موازی باشند در آن صورت $a = kb$ که در آن $k \in \mathbb{R}$ یعنی $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle kb_1, kb_2, kb_3 \rangle$ پس $a_1 = kb_1$ و $a_2 = kb_2$ و $a_3 = kb_3$ لذا $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$ در نتیجه

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

استفاده از CAS

امروزه استفاده از سیستم های جبری کامپیوتری (Computer Algebra Systems)، مانند Maple و Mathematica آموزش و فهم حساب دیفرانسیل و انتگرال به خصوص چند متغیره که تجسم مشکلی دارند، را ساده نموده است. در این بخش ما توانایی های این دو سیستم نمادی را برای معرفی بردارها و عملیات روی آنها بیان می نماییم، همچنین در ادامه، هر بخش که نیاز باشد دستورات آنها را بیان می نماییم.

■ **بسته بردارها** چون اغلب بحث این کتاب به جبر بردارها مربوط می شود، قبل از استفاده از بیشتر دستورها باید بسته مربوطه بار سازی شود، در غیر این صورت ممکن است که دستورات شما اجرا نشوند. چگونگی بار کردن این بسته ها در این دو سیستم عبارتند از:

> with linalg :

(در Maple)

>> Calculus `VectorAnalysis` ; (در Mathematica)

📌 **معرفی بردارها** در اولین گام باید بردار را در محیط CAS معرفی نمود، برای نمونه چگونگی معرفی بردار $u = \langle 2, -2, 1 \rangle$ را ملاحظه نمایید :

> u := 2,-2,1 ; (در Maple)

u = 2,-2,1 (در Mathematica)

📌 **عملیات برداری** برای ضرب اسکالر در بردار داریم :

6,-6,3 > v := 3*u ; (در Maple)

v = 3*u (در Mathematica)

6,-6,3

برای جمع و تفریق دو بردار از علامت + و - بین بردارها در هر دو سیستم جبری فوق استفاده می شود.

📌 **طول بردار** طول بردار و بردار یکانی را می توان با یک دستور یا ترکیبی از چند دستور تعیین نمود .

> len 2,1,-2 ; unitv 2,1,-2 ; (در Maple)

3

$\left[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3} \right]$

norm 2,1,-2 (در Mathematica)

3

📌 **ضرب بردارها** ضرب داخلی و خارجی به صورت زیر انجام می شود .

(در Maple)

> u&. a,b,c ; u&x a,b,c

$2a - 2b + c$

$-2c - b, a - 2c, 2b + 2a$

u. a,b,c (در Mathematica)

$2a - 2b + c$

CrossProduct u, a,b,c

$-2c - b, a - 2c, 2b + 2a$

با ترکیب دستورات ارایه شده در این بخش می توان اغلب اعمال برداری مورد نیاز برای حل یک مساله را انجام داد.

مجموعه تمرین‌های بخش ۱.۱

۱. (فاصله نقاط از صفحات مختصات) کدام یک از نقاط P 6,2,3 و Q -5,-1,4 و R 0,3,8 به صفحه xyz نزدیک‌تر است. کدام نقطه در صفحه yz قرار دارد.

۲. تصویر نقطه 1,2,4 در صفحات xy ، xz و yz چیست؟

۳. (عملیات جبری روی بردارها) در تمرین‌های زیر مطلوب است:

$$2a + 3b, 3a, a - b, a + b, |a|$$

و بردارهای واحد متناظر a را بیابید.

$$b = 2i + 3j, a = 3i - 2j \quad \mathbf{b} \quad b = \langle 5, 1 \rangle, a = \langle -2, 4 \rangle \quad \mathbf{a}$$

$$b = j + 3k, a = i + 2j + 3k \quad \mathbf{d} \quad b = \langle 6.2, -3 \rangle, a = \langle -2, -3.3 \rangle \quad \mathbf{c}$$

۴. ضرب داخلی بردارها با مشخصات داده شده در تمرین‌های زیر را بیابید.

$$b = \langle -2, -3 \rangle, a = \langle 2, 1 \rangle \quad \mathbf{a}$$

$$b = 3i + 4j, a = i + 2j - 3k \quad \mathbf{b}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \quad \mathbf{c} \quad |b| = 15, |a| = 12$$

۵. (یک کاربرد از بردارها) شخصی روی عرشه کشتی به سمت غرب با سرعت 3 mi/h و کشتی به سمت شمال با سرعت 22 mi/h در حرکت است، جهت و اندازه سرعت شخص را نسبت به سطح آب بیابید.

۶. (شرط متعامد) پارامتر b را طوری بیابید که دو بردار $\langle -6, b, 2 \rangle$ و $\langle b, b^2, b \rangle$ بر هم عمود باشند.

۷. (کاربرد هندسی) به کمک بردارها نشان دهید.

$\mathbf{a}$. قطرهای یک لوزی بر هم عمود هستند. $\mathbf{b}$. قطرهای یک متوازی‌الضلاع بر هم عمود هستند.

۸. ضرب خارجی بردارها را در تمرین‌های زیر بیابید.

$$b = j + 3k, a = 2i + 3j - k \quad \mathbf{b} \quad b = \langle 0, 2, 3 \rangle, a = \langle 1, -1, 0 \rangle \quad \mathbf{a}$$

۹. (تعبیر هندسی ضرب خارجی) در مسایل زیر a, b و $a \times b$ را همراه با محورهای مختصات رسم کنید.

$$a = i + 2j + 3k, b = k \quad \mathbf{a} \quad a = i + 2j, b = j - k \quad \mathbf{b}$$

۱۰. (بردار متعامد دو بردار) برداری بیابید که بر $a = i + j + k$ و $b = i + k$ عمود باشد.

۱۱. (قانون سینوس‌ها) نشان دهید در مثلث $\hat{ABC}$ که:

$$|AB| = c, |AC| = B, |BC| = a$$

داریم:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

۱۲. مساحت متوازی‌الاضلاع با رأس‌های A 0,0,0، B 5,0,0، C 2,6,6 و D 7,6,6 را بیابید.

۱۳. حجم متوازی السطوح با بردارهای داده شده زیر را بیابید.

$$c = \langle 8, -5, 6 \rangle, \quad b = \langle 2, 3, -8 \rangle, \quad a = \langle 1, 0, 6 \rangle$$

۱۴. مساحت مثلثی که $A = \langle -1, -2, 3 \rangle$ و $B = \langle 4, 1, -5 \rangle$ و $C = \langle 1, 2, 3 \rangle$ سه رأس آن می باشند را به دست آورید.

۱۵. (خاصیت شرکت پذیری ضرب برداری سه گانه) نشان دهید که

$$u \times (v \times w) = v \times (w \times u) = w \times (u \times v)$$

۱۶. (تعبیر مجموع صفر سه بردار) نشان دهید که اگر $u + v + w = 0$ آنگاه داریم،

$$u \times v = v \times w = w \times u$$

تعبیر هندسی این مساله را بیان نمایید.

