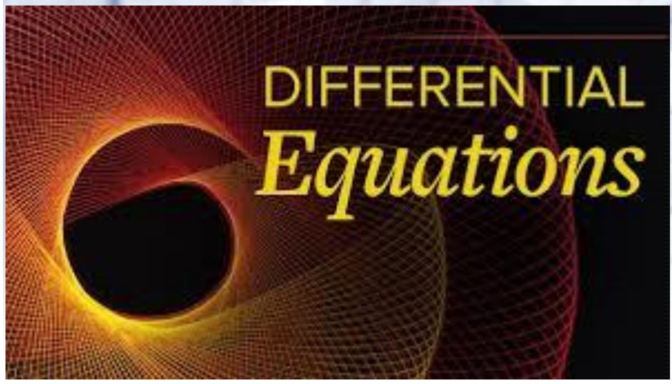


سرفصل ها

Saturday, April 18, 2020 2:59 PM

۱. معادلات دیفرانسیل مرتبه اول
   ۱) جدایی پذیر
   ۲) همگن
   ۳) کامل
   ۴) خطی
   ۵) هزلولی
۲. معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتر
۳. تبدیلات لاپلاس

Written by M.Golemeshki

مشتق و انتگرال

3:26 PM Saturday, April 18, 2020

- u و v توابعی از x اند.

(1) $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ $\xrightarrow{\text{عکس}}$ (1) $\int u'u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

I) $(x)' = 1$

II) $(x^5)' = 5x^4$

III) $\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c$

IV) $\int \underbrace{3x^2}_{u'}\underbrace{(x^3+4)}_{u}{}^{17} dx = \frac{(x^3+4)^{18}}{18} + c$

V) $\int 5x^2(x^3+4)^{17}dx = \frac{5}{3}\int 3x^2(x^3+4)^{17}dx = \frac{5}{3} \times \frac{(x^3+4)^{18}}{18} + c$

VI) $\int 3(x^3+4)^7 dx = ?$

چون نمی توان x را از انتگرال خارج کنیم ، از این روش غیرقابل حل است.

---

(2) $\begin{cases} (u \pm v)' = u' \pm v' \\ (u.v)' = u'.v \pm v'.u \\ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2} \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{نکته}}$ $\int \left(f_{(x)} \pm g_{(x)}\right) \mathrm{d}x = \int f_{(x)}\, dx \pm g_{(x)} dx$

I) $(x^3 - x^2)' = 3x^2 - 2x$

II) $\int (x^3 + x^2)dx = \int x^3 dx + \int x^2 dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + c$

Written by M.Golemeshki

مشتق و انتگرال

10:03 PM Saturday, April 18, 2020

(1) $\left(\sqrt[n]{u^m}\right)' = \dfrac{m.u'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$ $\xrightarrow{\text{نکته}}$ $\displaystyle\int \sqrt[5]{(5x+2)^2}\,dx = \frac{1}{5}\int \underbrace{5}_{u'}\underbrace{(5x+2)}_{u}^{\frac{2}{5}}\,dx$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{(5x+2)^{\frac{2}{5}+1}}{\frac{2}{5}+1}$$

I) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

II) $\left(\sqrt[5]{(x^2+5x)^2}\right)' = \dfrac{2(2x+5)}{5\sqrt[5]{(x^2+5x)^3}}$

III) $\displaystyle\int (6x+4)\sqrt{3x^2+4x}\,dx = \int \underbrace{(6x+4)}_{u'}\underbrace{(3x^2+4x)}_{u}^{\frac{1}{2}} = \frac{(3x^2+4x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$

- $(a.u')' = a.u'$
- $(7x^2)' = 7 \times 2x$

I) $\left(\dfrac{7x^3}{6}\right)' = \dfrac{7}{6} \times 3x^2$

II) $\left(\dfrac{7x^3+1}{6}\right)' = \dfrac{1}{6}(21x^2+0)$

- $\log A = \log_{10}^{A}$
- $\log_B^A = C \Rightarrow A = B^C$
- $\log_{10}^{100} = 2$
- $\log_e^A = \ln A$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \cong 2.7182 = e(\text{exponential})$

Written by M.Golemeshki

مشتق و انتگرال

1:16 AM Sunday, April 19, 2020

$$(4)\quad \begin{cases} (e^u)' = u'.e^u \\ (ln\, u)' = \dfrac{u'}{u} \end{cases} \longrightarrow (2)\quad \begin{cases} \displaystyle\int u' e^u\, dx = e^u + c \\ \displaystyle\int \frac{u'}{u} dx = ln|u| + c \end{cases}$$

$$I)\quad \left(e^{x^2}\right)' = 2x \times e^{x^2}$$

$$II)\quad \left(e^{\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$$

$$III)\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$IV)\quad \left(\ln e^{x^2}\right)' = \frac{2xe^{x^2}}{e^{x^2}}$$

$$V)\quad \int 7x^2\, e^{x^3}\, dx = \frac{7}{3}\int 3x^2\, e^{x^3}\, dx = \frac{7}{3} e^{x^3} + c$$

$$VI)\quad \int \frac{2x}{x^2+5} dx = \ln|x^2+5| + c$$

$$(5)\quad \begin{cases} (\sin u)' = u' \cos u \\ (\cos u)' = -u' \sin u \\ (\tan u)' = u'(1+\tan^2 u) \\ (\cot u)' = -u'(1+\cot^2 u) \end{cases} \longrightarrow (3)\quad \begin{cases} \displaystyle\int u'.cos\, u\, dx = sin\, u + c \\ \displaystyle\int u'.sin\, u\, dx = -\, cos\, u + c \\ \displaystyle\int u'\,(1+tan^2\, u)\, dx = tan\, u + c \\ \displaystyle\int u'\,(1+cot^2\, u)\, dx = -\, cot\, u + c \end{cases}$$

Written by M.Golemeshki

مشتق و انتگرال

1:41 AM Sunday, April 19, 2020

$$I)\ \left(\tan e^{x^3}\right)' = 3x^2 . e^{x^3}\left(1+\tan^2 e^{x^3}\right)$$

$$II)\ (\sin\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$$

$$IV)\ \int \tan x\, dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$III)\ \int \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{u'} cos\, \underbrace{\sqrt{x}}_{u}\, dx = \sin u + c$$

$$IV)\ \int tan^2\, x^2\, dx = (1+\tan^2 x) - 1\, dx = \tan x - x + c$$

$$(4)\ \begin{cases} \displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c \\ \displaystyle\int \frac{u'}{a^2+u^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c \end{cases}$$

$$* \int xe^{cx}dx = \frac{e^{cx}}{c^2}(cx-1) *$$

Written by M.Golemeshki

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

Wednesday, June 24, 2020 8:26 AM

معادله دیفرانسیل چیست؟

معادله ای که دست کم شامل یک مشتق است و بسته به شماره مشتق، شماره مرتبه معادله دیفرانسیل تعیین می شود. برای رسیدن به جواب معادله دیفرانسیل، باید انتگرال بگیریم تا مشتق حذف شود.

معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم $y^4 = 2x^2$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول $2xy' + 5y = x$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $2xy'' + x^2y = 0$

بنابراین منظور از معادله دیفرانسیل مرتبه اول، معادله ای است که در آن مشتق اول y وجود دارد.
یک معادله دیفرانسیل را می توان به صورت های زیر نوشت:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$M_{(x,y)}dx + N_{(x,y)}dy = 0$$

$$M_{(x,y)} + N_{(x,y)}y' = 0$$

تعداد متغیر های معادله دیفرانسیل مرتبه n:

یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n، دارای n+2 متغیر مستقل می باشد و رابطه ای بین متغیر مستقل x و تابع y(x) و n مشتق آن است.

جواب های معادله دیفرانسیل :

جوابهای معادله دیفرانسیل $y'' - 5y' + 6y = 0$ به صورت $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$ می باشد. زیرا اگر قرار دهیم $y = e^{2x}$ آنگاه داریم: $y' = 2e^{2x}$ و $y'' = 4e^{2x}$. اگر در معادله قرار دهیم می بینیم که :

$$4e^{2x} - 10e^{2x} + 6e^{2x} = 0, \forall x$$

به همین صورت $y = e^{3x}$ نیز جواب معادله است. به طور کلی می توان نشان داد که هر یک از توابع $y = c_1e^{2x}$ و $y = c_2e^{3x}$ که در آنها c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه هستند، جواب معادله می باشند. علاوه براین تابع $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$ جواب معادله است که به ان جواب عمومی معادله دیفرانسیل می گوییم.

یک معادله دیفرانسیل، بینهایت جواب دارد که به آن ها جواب عمومی می گویند.

Written by M.Golemeshki

معادله دیفرانسیل جدایی پذیر، مثال

9:14 AM   Wednesday, June 24, 2020

معادله دیفرانسیل جدایی پذیر :

معادله دیفرانسیل مرتبه اول $M(x)+N(y)y'=0$ که پس از تبدیل y' به $\frac{dy}{dx}$ و ضرب آن در dx به صورت زیر در می آید

$$M(x)dx+N(y)dy=0 \qquad (۳)$$

را معادله دیفرانسیل مرتبه اول جدایی پذیر می نامیم.

۱. هر جا y' وجود داشت، بجای آن $\frac{dy}{dx}$ قرار می دهیم.
۲. طرفین وسطین می کنیم و x ها را به همراه dx یک طرف و y ها را به همراه dy یک طرف قرار می دهیم.

★ **کلید حل جدایی پذیر، ضرب بین x و y است. پس هر جا بین x و y جمع و تفریق بود، می گوییم جدا پذیر نیست.**

؟ مثال:

جواب عمومی معادله $y'=e^{x+y}$ را به دست آورده، سپس یک جواب خصوصی که در شرط $y(0)=0$ صدق می کند، برای آن تعیین می کنیم.

$$y'=e^{x+y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^{x+y} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=e^x.e^y \Rightarrow \frac{dy}{e^y}=e^x\,dx \Rightarrow e^{-y}dy=e^x\,dx$$

$$\Rightarrow \int e^{-y}dy=\int e^x\,dx \quad * \; (e^u)'=u'.e^u \,, \int u'e^u\,dx=e^u+c \; *$$

$$\Rightarrow -\int -e^{-y}dy=\int e^x\,dx \Rightarrow -e^{-y}+c=e^x+c \Rightarrow e^x+e^{-y}=c \quad \text{جواب عمومی}$$

c شامل هر عددی است و منفی، مثبت و هر وضعیتی از آن را همان عبارت c می نویسیم.

شرط جواب خصوصی یک معادله دیفرانسیل عبارت است از: $y_{(x_0)}=y_0$

برای نوشتن جواب خصوصی این سوال c را طوری تعیین می کنیم که شرط $y_{(0)}=0$ برقرار شود.

$$e^x+e^{-y}=c \Rightarrow e^0+e^{-0}=c \Rightarrow 1+1=c \Rightarrow 2=c \Rightarrow e^x+e^{-y}=2 \quad \text{جواب خصوصی}$$

Written by M.Golemeshki

مثال

12:47 PM Wednesday, June 24, 2020

مثال: جواب عمومی معادله $y' = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$ را بدست آورید.

$$y' = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$$

ابتدا از y^2 فاکتور می گیریم.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + x^2 + y^2(1 + x^2)$$

سپس از $1+x^2$ فاکتور می گیریم.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (1 + x^2)(1 + y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{1 + y^2} = (1 + x^2)\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int (1 + x^2)\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{1 + y^2} = \int 1\,dx + \int x^2\,dx \quad * \int \frac{u'}{a^2 + u^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c \, *$$

$$\Rightarrow \tan^{-1} y + c = x + \frac{x^3}{3} + c \Rightarrow y = \tan\left(x + \frac{x^3}{3} + c\right)$$

مثال: جواب عمومی معادله $3x^2(y + 3)dx + (x^3 + 2)dy = 0$ را بدست آورید.

$$3x^2(y + 3)dx + (x^3 + 2)dy = 0 \Rightarrow 3x^2(y + 3)dx = -(x^3 + 2)dy$$

طرفین وسطین می کنیم با این شرط که dx و dy همیشه باید در صورت کسر باشند.

$$\Rightarrow \frac{3x^2}{x^3 + 2}dx = -\frac{dy}{y + 3} \Rightarrow \int \frac{3x^2}{x^3 + 2}dx = -\int \frac{dy}{y + 3}$$

در انتگرال گیری عبارات کسری، اول مشتق مخرج را بدست می آوریم؛ اگر مشتق مخرج در صورت بود از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$* \int \frac{u'}{u}dx = ln|u| + c \, * \Rightarrow \ln|(x^3 + 2)| + c = -\ln|(y + 3)| + c$$

$$\Rightarrow \ln|(x^3 + 2)| + \ln|(y + 3)| = c$$

Written by M.Golemeshki

معادله دیفرانسیل همگن

2:53 PM Wednesday, June 24, 2020

تابع همگن :

تابع دو متغیره $f(x,y)$ را همگن و از درجه n مینامیم، هر گاه به ازای هر $\lambda \neq 0$ و به ازای زوج مرتب (x,y) و $(\lambda x, \lambda y)$ که در حوزه تعریف تابع باشند، داشته باشیم:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$$

روش مرسوم برای بررسی همگن بودن یک تابع، بدین صورت است که در کنار x و y یک ضریب λ قرار می دهیم و سپس آن را فاکتور می گیریم. اگر درجه λ با تابع اول برابر بود، می گوییم همگن است.

★ **برای همگن بودن یک تابع باید توان تمام جملات آن تابع شامل جملاتی که ضریب x، y و یا هر دو را دارند بدون در نظر گرفتن تفاوت، ضرایب، یا عمل ریاضی انجام شده بر روی آن ها، با یکدیگر برابر باشند، در غیر این صورت تابع همگن نیست.**

? مثال:

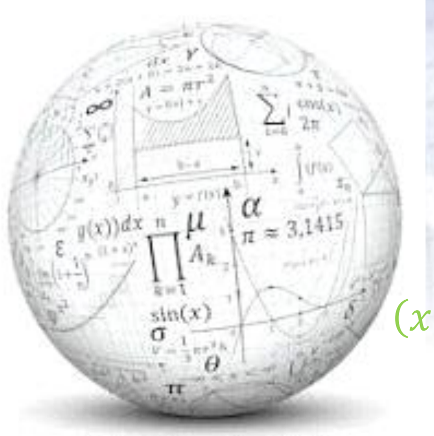
نشان می دهیم که تابع $f(x,y) = x^3 + 2xy^2$ همگن و از درجه ۳ و تابع $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ همگن و از درجه صفر، ولی تابع $f(x,y) = x^2 + y$ همگن نیست.

معادله دیفرانسیل همگن :

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ را همگن گوییم هر گاه دو تابع $M(x,y)$ و $N(x,y)$ هر دو همگن از **یک درجه** باشند.

? مثال: معادله $(x^2+y^2)dx + 2xydy = 0$ یک معادله دیفرانسیل همگن و از درجه ۲ می باشد زیرا توابع $M_{(x,y)} = x^2 + y^2$ و $N_{(x,y)} = 2xy$ هر دو همگن و هر دو درجه ۲ می باشند.

Written by M.Golemeshki



مثال

4:44 PM Wednesday, June 24, 2020

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $(x^2+y^2)dx+2xydy=0$ را بدست آورید.

$$(x^2+y^2)dx+2xydy=0 \Rightarrow (x^2+y^2)dx=-2xydy$$

همیشه اول $y'=\frac{dy}{dx}$ را می یابیم.

$$\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{-2xy}=\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{xy}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{xy}+\frac{y^2}{xy}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

سپس برای تمام معادلات همگن مرحله زیر را انجام می دهیم:

$$y=xv \Rightarrow y'=1.v+x\frac{dv}{dx} \Rightarrow y'=v+x\frac{dv}{dx}$$

بنابراین بجای عبارت $\frac{dy}{dx}$ مقدار $v+x\frac{dv}{dx}$ و بجای عبارت $\frac{y}{x}$ مقدار v را قرار می دهیم. همچنین $\frac{x}{y}$ برابر $\frac{1}{v}$ خواهد بود.

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) \Rightarrow v+x\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{v}+v\right) \Rightarrow v+x\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1+v^2}{v}\right)$$

تمام ضرایب v را به یک طرف معادله منتقل کرده، مخرج مشترک گرفته و عبارت را ساده می کنیم.

$$\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1+v^2}{v}\right)-v \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=-\frac{1+v^2+2v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=-\frac{1+3v^2}{2v}$$

حالا باید عبارات v و عبارات x را از یکدیگر جدا کنیم. اینکار را به طرفین وسطین کردن انجام می دهیم. در نهایت از طرفین انتگرال می گیریم.

$$\Rightarrow -\frac{2v}{1+3v^2}dv=\frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{1}{3}\int\frac{3\times 2v}{1+3v^2}dv=\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}\ln|(1+3v^2)|+c=\ln|x|+c \Rightarrow c=\ln|x|+\frac{1}{3}\ln|(1+3v^2)|$$

مثال

2:17 AM Thursday, June 25, 2020

? مثال:

جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x\cos(\frac{y}{x})y' = x\sin(\frac{y}{x}) + y\cos(\frac{y}{x})$ را می یابیم.

حل: معادله فوق همگن و از درجه ۱ می باشد زیرا توابع $M(x,y) = x\cos(\frac{y}{x})$ و $N(x,y) = x\sin(\frac{y}{x}) + y\cos(\frac{y}{x})$

هر دو همگن از درجه ۱ می باشند.

$$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)y' = x\sin\left(\frac{y}{x}\right) + y\cos\left(\frac{y}{x}\right) \Longrightarrow x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = x\sin\left(\frac{y}{x}\right) + y\cos\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x\sin\left(\frac{y}{x}\right)/x + y\cos\left(\frac{y}{x}\right)/x}{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)/x} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)}{\cos\left(\frac{y}{x}\right)}$$

بجای عبارت $\frac{dy}{dx}$ مقدار $v + x\frac{dv}{dx}$ و بجای عبارت $\frac{y}{x}$ مقدار v را قرار می دهیم.

$$\Longrightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{\sin v + v\cos v}{\cos v} \Longrightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{\sin v}{\cos v} + \frac{v\cos v}{\cos v}$$

$$\Longrightarrow v + x\frac{dv}{dx} = \frac{\sin v}{\cos v} + v \Longrightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{\sin v}{\cos v}$$

حالا باید عبارات v و عبارات x را از یکدیگر جدا کنیم. اینکار را به طرفین وسطین کردن انجام می دهیم.
در نهایت از طرفین انتگرال می گیریم.

$$\Longrightarrow \frac{\cos v}{\sin v}dv = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} \Longrightarrow \int \frac{\cos v}{\sin v}dv = \int \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} \Longrightarrow \ln|\sin x| + c = \ln|x| + c$$

$$\Longrightarrow \ln|\sin x| - \ln|x| = \mathrm{c}$$

★ در جملات مثلثاتی، اگر ضریب λ را کنار متغیر داخل مثلثات که تحت عنوان کمان از آن یاد می شود قرار دهیم، **نمی توانیم آن را با λ کنار x و y خارج از مثلثات فاکتور بگیریم.** در مثال فوق با توجه به اینکه ضریب داخل مثلثات بصورت تقسیم دو متغیر بود، λ صورت و مخرج با یکدیگر ساده شدند. بنابراین باید در نظر داشت که معادلات مثلثاتی را معمولاً نمی توان با روش همگن حل کرد.

Written by M.Golemeshki

معادله دیفرانسیل کامل

11:21 AM Thursday, June 25, 2020

معادله دیفرانسیل کامل:

معادله دیفرانسیل مرتبه اول $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ را کامل گوییم، هر گاه تابع دو متغیره $f(x,y)$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$df = M(x,y)dx + N(x,y)dy \qquad (۵)$$

اگر بتوانیم تابعی را بیابیم که مشتق آن برابر صورت مسئله معادله دیفرانسیل باشد، در این صورت تابع پیدا شده جواب معادله دیفرانسیل است و این معادله دیفرانسیل کامل است.

شرط لازم و کافی برای کامل بودن یک معادله دیفرانسیل:

معادله دیفرانسیل $M_{(x,y)}dx + N_{(x,y)}dy = 0$ مفروض است. اگر از عبارت نسبت به معکوس ضریبش مشتق بگیریم، یعنی از M نسبت به y و از N نسبت به x و مقدار این دو با یکدیگر برابر باشد، این یک معادله دیفرانسیل کامل است.

$$M_y(x,y) = N_x(x,y)$$

برای مشتق گیری از یک تابع یک متغیره از نماد پریم استفاده می شود (f'). اما مشتق گیری از یک تابع دو متغیره را بدین صورت نمایش می دهیم: $\frac{\partial M}{\partial x} = M_{x(x,y)}$

Written by M.Golemeshki

مثال

12:42 PM Thursday, June 25, 2020

مثال: نشان دهید که معادله دیفرانسیل داده شده کامل است و جواب عمومی آن را بیابید.

$$(3x^2+4xy)dx+(2x^2+2y)dy=0$$

$$\begin{cases} M(x,y)=3x^2+4xy \\ N(x,y)=2x^2+2y \end{cases} \Rightarrow M_y=4x=N_x$$

پس معادله دیفرانسل بالا کامل است.

از M نسبت به x و از N نسبت به y انتگرال می گیریم.

$$\int M_{(x,y)}dx=\int 3x^2+4xydx=3\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}y+c=x^3+2x^2y+c$$

$$\int N_{(x,y)}dy=\int 2x^2+2ydy=2x^2y+2\frac{y^2}{2}+c=2x^2y+y^2+c$$

برای نوشتن جواب ابتدا جمله مشترک دو انتگرال را یکبار نوشته و سپس باقی جملات را به ترتیب می نویسیم و برابر c قرار می دهیم.

$$\Longrightarrow 2x^2y+x^3+y^2=\mathrm{c}$$

مثال: نشان دهید که معادله دیفرانسیل داده شده کامل است و جواب عمومی آن را بیابید.

$$(y+\cos x)dx+(x+\sin y)dy=0$$

$$\begin{cases} M(x,y)=y+\cos x \\ N(x,y)=x+\sin y \end{cases} \Rightarrow M_y=1=N_x$$

پس معادله دیفرانسل بالا کامل است. برای حل آن به دنبال تابعی مانند $f(x,y)$ هستیم که

$$\int M_{(x,y)}dx=\int y+\cos x\,dx=yx+\sin x+c$$

$$\int N_{(x,y)}dy=\int x+\sin y\,dy=xy-\cos y+c$$

$$\Longrightarrow f_{(x,y)}=xy+\sin x-\cos y=\mathrm{c}$$

عامل انتگرال ساز

4:00 PM Thursday, June 25, 2020

با معادله ای که کامل نیست چه باید کرد؟

اگر یک معادله دیفرانسیل کامل نبود، باید آن را کامل کنیم!

با چه روشی؟ با استفاده از عامل انتگرال ساز.

عامل انتگرال ساز:

عامل انتگرال ساز آن جمله ای است که اگر در طرفین معادله ضرب کنیم، معادله دیفرانسیل کامل می شود.

عامل انتگرال ساز را با حرف مو (μ) نشان می دهند.

? مثال:

معادله دیفرانسیل $2ydx+xdy=0$ کامل نیست، ولی با ضرب $\mu(x)=x$ معادله کامل می شود. یعنی معادله $2xydx+x^2dy=0$ کامل است.

تعیین عامل انتگرال ساز:

اگر در معادله دیفرانسیل $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ داشته باشیم $M_y \neq N_x$، آنگاه عامل انتگرال ساز را به دو صورت زیر می توان یافت:

۱- اگر $g(x)=\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}$ تابعی از x باشد آنگاه عامل انتگرال ساز برابر است با: $\mu=e^{\int g(x)dx}$ (y حذف می شود.)

۲- اگر $h(y)=\dfrac{\dfrac{\partial N}{\partial x}-\dfrac{\partial M}{\partial y}}{M}$ تابعی از x باشد آنگاه عامل انتگرال ساز برابر است با: $\mu=e^{\int h(y)dy}$. (x حذف می شود.)

مثال

4:23 PM Thursday, June 25, 2020

? **مثال:** عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کرده، معادله را کامل کرده و آن را محاسبه کنید.

$$(x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0$$

حل(a): در مثال فوق داریم : $M(x,y) = x^4 + y^4$ و $N(x,y) = -xy^3$ که $M_y = 4y^3 \neq N_x = -y^3$.

برای پیدا کردن عامل انتگرال ساز، ابتدا باید تفاضل $M_y = \frac{\partial M}{\partial y}$ و $N_x = \frac{\partial N}{\partial x}$ را حساب کنیم.

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 4y^3 - (-y^3) = 4y^3 + y^3 = 5y^3$$

حالا باید دقت کنیم که کدام یک از عبارات M یا N می تواند این مقدار را ساده کند. در این مثال عبارت N می تواند صورت کسر ما را ساده کند چراکه بین عبارات آن ضرب است.

$$g_{(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{5y^3}{-xy^3} = -\frac{5}{x}$$

پس عامل انتگرال ساز برابر است با:

$$\mu_{(x)} = e^{\int g_{(x)}dx} = e^{\int -\frac{5}{x}dx} = e^{-5\int \frac{1}{x}dx} = e^{-5\ln x} = e^{\ln x^{-5}}$$

$$* \; e^{\ln a} = e^{\log_e a} = a \; * \Longrightarrow \mu_{(x)} = x^{-5}$$

عامل انتگرال ساز را در معادله ضرب می کنیم:

$$x^{-5} \times \left((x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0\right) \Longrightarrow (x^{-1} + x^{-5}y^4)dx - x^{-4}y^3dy = 0$$

$$\begin{cases} M_{(x,y)=x^{-1}+x^{-5}y^4} \\ N_{(x,y)=-x^{-4}y^3} \end{cases} \Longrightarrow M_y = 4x^{-5}y^3 = N_x$$

اکنون معادله کامل است؛ پس می توانیم انتگرال بگیریم.

$$\int M_{(x,y)}dx = \int x^{-1} + x^{-5}y^4dx = \int \frac{1}{x}dx + y^4\int x^{-5}dx = \ln x + \frac{y^4x^{-4}}{-4} + c$$

$$\int N_{(x,y)}dy = \int -x^{-4}y^3dy = -x^{-4}\int y^3dy = \frac{x^{-4}y^4}{-4} + c$$

$$\Longrightarrow \frac{x^{-4}y^4}{-4} + \ln x = c$$

این مثال را با روش همگن نیز می توانستیم حل کنیم.

Written by M.Golemeshki

مثال

6:40 PM Thursday, June 25, 2020

مثال: عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کرده، معادله را کامل کرده و آن را محاسبه کنید.

$$(\sin y + \cos y)dx + 2x\cos y\, dy = 0$$

حل(b): در مثال فوق داریم: $M(x,y) = \sin y + \cos y$ و $N(x,y) = 2x\cos y$ که $M_y = \cos y - \sin y \neq N_x = 2\cos y$.

برای پیدا کردن عامل انتگرال ساز، ابتدا باید تفاضل $M_y = \frac{\partial M}{\partial y}$ و $N_x = \frac{\partial N}{\partial x}$ را حساب کنیم.

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 2\cos y - (\cos y - \sin y) = 2\cos y - \cos y + \sin y = \cos y + \sin y$$

$$h_{(y)} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{\cos y + \sin y}{\sin y + \cos y} = 1$$

پس عامل انتگرال ساز برابر است با:

$$\mu_{(y)} = e^{\int h_{(y)}dy} = e^{\int 1dy} \Longrightarrow \mu_{(y)} = e^y$$

عامل انتگرال ساز را در معادله ضرب می کنیم:

$$e^y \times \left((\sin y + \cos y)dx + 2x\cos y\, dy = 0\right)$$
$$\Longrightarrow (\sin y e^y + \cos y\, e^y)dx + 2x\cos y\, e^y dy = 0$$
$$\begin{cases} M_{(x,y)} = \sin y e^y + \cos y e^y \\ N_{(x,y)} = 2x\cos y e^y \end{cases}$$
$$\Longrightarrow M_y = \cos y e^y + e^y \sin y - \sin y e^y + e^y \cos y = 2\cos y\, e^y = N_x$$

اکنون معادله کامل است؛ پس می توانیم انتگرال بگیریم.

ادامه صفحه بعد

ادامه مثال قبل

8:46 PM Thursday, June 25, 2020

اکنون معادله کامل است؛ پس می توانیم انتگرال بگیریم.

$$\int M_{(x,y)} dx = \int \sin y e^{y} + \cos y\, e^{y} dx = \int \sin y e^{y}\, dx + \int \cos y\, e^{y} dx$$

$$\Longrightarrow \sin y e^{y} \int dx + \cos y\, e^{y} \int dx \Longrightarrow \sin y e^{y} x + \cos y\, e^{y} x + c$$

$$\int N_{(x,y)} dy = \int 2x \cos y\, e^{y} dy = 2x \int \cos y\, e^{y} dy$$

$$* \int e^{x} \cos x\, dx = \frac{e^{x}(\cos x + \sin x)}{2} + c \; *$$

$$\Longrightarrow 2x \left[\frac{e^{y}(\cos y + \sin y)}{2}\right] + c = x[e^{y}(\cos y + \sin y)] + c$$

$$= x[\cos y\, e^{y} + \sin y\, e^{y}] + c = \cos y\, e^{y} x + \sin y\, e^{y} x + c$$

$$\Longrightarrow \sin y e^{y} x + \cos y\, e^{y} x = c$$

این مثال را با روش جدایی پذیر نیز می توانستیم حل کنیم.

Written by M.Golemeshki

معادله دیفرانسیل خطی

11:15 AM Friday, June 26, 2020

معادله دیفرانسیل خطی:

این معادله در حالت کلی به صورت (۷) $y' + p(x)y = q(x)$ می باشد که در آن $p(x)$ و $q(x)$ توابعی پیوسته از x می باشند.

در حالت عادی معادله $y = ax + b$ را معادله یک خط می نامیم. اگر عملی نظیر توان، نمایی، مثلثات، قرار گرفتن در مخرج و ... بر روی x اعمال شود، دیگر یک خط نبوده و آنگاه آن را منحنی می نامیم.
در دیفرانسیل این تعریف را بر روی y و مشتقات آن انجام می دهیم. یعنی معادله دیفرانسیلی که y و مشتق آن توان، نمایی، مثلثات، قرار گرفتن در مخرج و ... نداشته باشد، یک معادله دیفرانسیل خطی می نامیم.

۱. معادله دیفرانسیل خطی را بصورت $y' + p(x)y = q(x)$ می باشد که در آن ضریب y' حتما می بایست یک باشد و اگر جز این باشد باید تمام معادله بر ضریبش تقسیم شود تا به این صورت در بیاید.
۲. عامل انتگرال ساز $\mu_{(x)} = e^{\int p(x)dx}$ را حساب می کنیم.
۳. جواب را با استفاده از رابطه $y = \frac{1}{\mu_{(x)}}\left(\int \mu_{(x)}.q(x)dx + c\right)$ حساب می کنیم.

? **مثال:** جواب عمومی معادله دیفرانسیل خطی مقابل را بیابید؛ $y' = y + 3x^2 + e^x$

$$y' = y + 3x^2e^x \Longrightarrow y' - y = 3x^2e^x$$

با مقایسه این معادله با صورت کلی معادله دیفرانسیل خطی داریم:

$p(x) = -1$ (ضریب y)

$q(x) = 3x^2e^x$ (تمام آنچه در طرف دیگر معادله است)

عامل انتگرال ساز را حساب می کنیم:

$$\mu_{(x)} = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -1dx} = e^{-1\int dx} = e^{-x}$$

جواب را با استفاده از رابطه $y = \frac{1}{\mu_{(x)}}\left(\int \mu_{(x)}.q(x)dx + c\right)$ حساب می کنیم.

$$y = \frac{1}{\mu_{(x)}}\left(\int \mu_{(x)}.q(x)dx + c\right) = \frac{1}{e^{-x}}\left(\int e^{-x}.3x^2e^xdx + c\right)$$

$$= \frac{1}{e^{-x}}\left(3\int e^0.x^2dx + c\right) = \frac{1}{e^{-x}}\left(3\left((1)\frac{x^3}{3}\right) + c\right)$$

$$\Longrightarrow y = \frac{1}{e^{-x}}(x^3 + c)$$ جواب عمومی

Written by M.Golemeshki

مثال

4:15 PM Friday, June 26, 2020

مثال: معادله دیفرانسیل داده شده را به روش خطی حل کنید.

$$xy' + y = 3x^2$$

$$xy' + y = 3x^2 \Longrightarrow (xy' + y = 3x^2) \div x \Longrightarrow y' + \frac{1}{x}y = \frac{3x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}$$

$$p(x) = \frac{1}{x}\,, q(x) = 3x$$

$$\mu_{(x)} = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

$$y = \frac{1}{\mu_{(x)}}\left(\int \mu_{(x)}.\,q(x)dx + c\right) = \frac{1}{x}\left(\int x.\,3xdx + c\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(3\int x^3dx + c\right) = \frac{1}{x}\left(3\left(\frac{x^3}{3}\right) + c\right)$$

$\Longrightarrow y = \frac{1}{x}(x^3 + c)$ جواب عمومی

Written by M.Golemeshki

معادله دیفرانسیل برنولی، مثال

Friday, June 26, 2020 4:42 PM

معادله دیفرانسیل خطی:

مشابه معادله دیفرانسیل خطی است با این تفاوت که در کنار ضریب $q(x)$، مقدار y^n نیز ضرب شده است.

این معادله در حالت کلی به صورت (۸) $y' + p(x)y = q(x)y^n$ می باشد که در آن $p(x)$ و $q(x)$ توابعی پیوسته از x می باشند و $n \in \mathbb{R}$.

باید به روشی معادله را به معادله دیفرانسیل خطی تبدیل کرده، y^n را حذف کنیم و سپس با استفاده از روش خطی آن را حل کنیم.

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل مقابل را بیابید؛ $xy' + y = 3x^2y^3$

۱. ابتدا طرفین معادله را بر y^n تقسیم می کنیم. سپس در صورت نیاز بر ضریب y' نیز تقسیم می کنیم.

$$xy' + y = 3x^2y^3 \Longrightarrow (xy' + y = 3x^2y^3) \div y^3 \quad * \frac{a}{y^n} = a \times y^{-n} *$$

$$\Longrightarrow (xy'y^{-3}) + (y^1y^{-3}) = 3x^2y^3y^{-3} \Longrightarrow xy'y^{-3} + y^{-2} = 3x^2$$

$$\Longrightarrow (xy'y^{-3} + y^{-2} = 3x^2) \div x \Longrightarrow \frac{xy'y^{-3}}{x} + \frac{y^{-2}}{x} = \frac{3x^2}{x} \Longrightarrow y'y^{-3} + \frac{y^{-2}}{x} = 3x$$

۲. عبارت y^{-2} که همواره برابر y^{1-n} است را برابر یک پارامتر دلخواه قرار داده و سپس مشتق می گیریم. باید **دقت کنید** که از y نسبت به x مشتق می گیریم نه از x نسبت به x $\quad * \frac{dx}{dx} = 1 , \frac{dy}{dx} = y' *$

$$y^{-2} = u \longrightarrow u' = -2y'y^{-3} \Longrightarrow \frac{u'}{-2} = y'y^{-3}$$

۳. قطعاً جمله اول که در این مثال $y'y^{-3}$ بود، به نحوی ظاهر شده است. اکنون معادله را برحسب u بازنویسی می کنیم. حالا یک معادله خطی بر حسب u داریم.

$$\Longrightarrow -\frac{u'}{2} + \frac{u}{x} = 3x \Longrightarrow \left(-\frac{u'}{2} + \frac{u}{x} = 3x\right) \times (-2) \Longrightarrow u' - \frac{2}{x}u = -6x \qquad p(x) = -\frac{2}{x}, q(x) = -6x$$

$$\mu_{(x)} = e^{\int p(x)dx} = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\int \frac{1}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$$

$$u = \frac{1}{\mu_{(x)}}\left(\int \mu_{(x)}.q(x)dx + c\right) = \frac{1}{x^{-2}}\left(\int x^{-2}.(-6x)dx + c\right)$$

$$= \frac{1}{x^{-2}}\left(-6\int x^{-\cancel{2}}.\cancel{x}dx + c\right) = \frac{1}{x^{-2}}\left(-6\int \frac{1}{x}dx + c\right) \Longrightarrow u = y^{-2} = \frac{1}{x^{-2}}(-6\ln x + c)$$

Written by M.Golemeshki

مثال

7:54 PM Friday, June 26, 2020

مثال: جواب عمومی معادله دیفرانسیل داده شده را بدست آورید.

$$xy' - \frac{y}{2\ln x} = y^2$$

ابتدا طرفین معادله را بر y^n تقسیم می کنیم.

$$xy' - \frac{y}{2\ln x} = y^2 \Longrightarrow \left(xy' - \frac{y}{2\ln x} = y^2\right) \div y^2$$

سپس طرفین را بر ضریب y' نیز تقسیم می کنیم.

$$\Longrightarrow \frac{xy'}{y^2} - \frac{\cancel{y}}{2\ln x\, y^{\cancel{2}}} = 1 \Longrightarrow \left(xy'y^{-2} - \frac{1}{2\ln x}y^{-1} = 1\right) \div x$$

$$\Longrightarrow y'y^{-2} - \frac{1}{2x\ln x}y^{-1} = \frac{1}{x}$$

عبارت y^{-1} را که همواره برابر y^{1-n} است، برابر u قرار داده و مشتق می گیریم.

$$\Longrightarrow y^{-1} = u \longrightarrow u' = -y'y^{-2} \Longrightarrow -u' = y'y^{-2}$$

معادله را برحسب u بازنویسی می کنیم.

$$\Longrightarrow \left(-u' - \frac{1}{2x\ln x}u = \frac{1}{x}\right) \times (-1) \Longrightarrow u' + \frac{1}{2x\ln x}u = -\frac{1}{x}$$

$$p(x) = \frac{1}{2x\ln x}\,, q(x) = -\frac{1}{x}\,, \mu_{(x)} = e^{\int p(x)dx} = e^{\int \frac{1}{2x\ln x}dx}$$

این انتگرال را از روش تغییر متغیر حل می کنیم. برای اینکار عبارت $\ln x$ را برابر پارامتری بنام t قرار می دهیم.

$$\int \frac{1}{2x\ln x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x\ln x}dx$$

$$\ln x = t \Longrightarrow \left(\text{از طرفین مشتق می گیریم}\right) \Longrightarrow \frac{1}{x}dx = 1dt$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t = \frac{1}{2}\ln(\ln x)$$

ادامه صفحه بعد

ادامه مثال قبل

10:14 PM Friday, June 26, 2020

$$\Rightarrow \mu_{(x)} = e^{\frac{1}{2}\ln(\ln x)} = e^{\ln(\ln x)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \mu_{(x)} = (\ln x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{\mu_{(x)}}\left(\int \mu_{(x)}.\, q(x)dx + c\right) = \frac{1}{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}\left(\int (\ln x)^{\frac{1}{2}}.\left(-\frac{1}{x}\right)dx + c\right)$$

$$= \frac{1}{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}\left(-\int (\ln x)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{x}dx + c\right)$$

هر کجا که داخل انتگرال با عبارت $\ln x$ مواجه شدیم، سراغ تغییر متغیر می رویم.

$$\int (\ln x)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{x}dx + c$$

$\ln x = t \Rightarrow$ (از طرفین مشتق می گیریم) $\Rightarrow \frac{1}{x}dx = 1dt$

$$\Rightarrow \int (t)^{\frac{1}{2}}.\, dt + c \; * \int u'u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \; * \Rightarrow \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + c$$

حالا مقدار t را جایگذاری می کنیم.

$$\Rightarrow u = \frac{1}{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}\left(-\int (\ln x)^{\frac{1}{2}}.\frac{1}{x}dx + c\right) = \frac{1}{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}\left(-\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} + c\right)$$

$$\Rightarrow u = y^{-1} = \frac{1}{(\ln x)^{\frac{1}{2}}}\left(-\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} + c\right)$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

Monday, July 6, 2020 9:05 AM

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم:

معادله دیفرانسیل زیر را مرتبه دوم گویند. وجود y'' الزامی است.

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت همگن:

معادله دیفرانسیل زیر را مرتبه دوم با ضرایب ثابت گویند هرگاه ضریب y'' برابر یک و سایر ضرایب اعداد ثابت باشند. هرگاه یک سمت تساوی برابر صفر باشد، این معادله را همگن می نامیم.

$$y'' + ay' + by = 0$$

جواب های معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت همگن :

اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب همگن (۱۳) باشند آنگاه $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ نیز جواب (۱۳) می باشند که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه اند.

جواب $y_1(x)$ و $y_2(x)$، از رابطه مقابل بدست می آید: $y = e^{\lambda x}$

از معادله فوق مشتق می گیریم تا عبارات y' و y'' بدست آید:

$$y = e^{\lambda x} \longrightarrow y' = \lambda e^{\lambda x} \longrightarrow y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

عبارات فوق را در معادله اول قرار می دهیم:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a(\lambda e^{\lambda x}) + b(e^{\lambda x}) = 0 \longrightarrow (\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} = 0$$

چون عبارت $e^{\lambda x} \neq 0$ است بنابراین:

$$(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

معادله بدست آمده را معادله مشخصه گویند. برای رسیدن به جواب نهایی تنها باید یک معادله درجه دو را حل کنیم. سه حالت برای حل این معادله وجود دارد که شرح داده می شود.

Written by M.Golemeshki

حالت اول، مثال

11:51 AM Monday, July 6, 2020

حالت اول :

- اگر $\Delta > 0$ باشد.

معادله مشخصه دارای دو ریشه حقیقی متمایز λ_1 و λ_2 باشد. در این حالت:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

جوابهای معادله (۱۳) هستند. پس جواب عمومی برابر است با:

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

? **مثال:** معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y'' - 5y' + 6y = 0$ را حل کنید.

$$y'' - 5y' + 6y = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

از اتحاد یک جمله مشترک استفاده می کنیم:

$$\Longrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda - 2 = 0 \\ \lambda - 3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \Longrightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$$

ریشه های این مثال را با روش دلتا نیز می توانستیم بدست آوریم.

حالت دوم، مثال

12:08 PM Monday, July 6, 2020

حالت دوم:

- اگر $\Delta = 0$ باشد.

معادله مشخصه دارای ریشه مضاعف $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ باشد. در این حالت:

$$y_1 = e^{\lambda x}$$

یک جواب معادله (۱۳) است. پس جواب عمومی برابر است با:

$$y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$$

? **مثال:** معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y'' - 4y' + 4y = 0$ را حل کنید.

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$$

عبارت $(\lambda - a)^n$، n تعداد ریشه برابر با $\lambda = a$ دارد.

$$\Longrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$$

$$\Longrightarrow y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x} \Longrightarrow y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

ریشه های این مثال را با روش دلتا نیز می توانستیم بدست آوریم.

حالت سوم، اعداد مختلط

12:17 PM Monday, July 6, 2020

حالت سوم:

- اگر $\Delta < 0$ باشد.

در این حالت معادله دارای ریشه های مختلط یا مزدوج زیر است:

$$\lambda_1 = \alpha + \beta_i \quad \text{و} \quad \lambda_2 = \alpha - \beta_i$$

جواب عمومی این معادله بصورت زیر است:

$$y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 i \sin \beta x) \quad \text{یا} \quad y = c_1 e^{(\alpha+\beta_i)x} + c_2 e^{(\alpha-\beta_i)x}$$

اعداد مختلط:

اعداد مختلط را بصورت $\alpha + \beta i$ نمایش می دهند که در آن α عدد حقیقی و βi عدد موهومی است.
هر عدد حقیقی را می توان بصورت یک عدد مختلط نمایش داد. در این اعداد اعمال ریاضی مختلفی تعریف می شود. بعنوان مثال در جمع اعداد مختلط، حقیقی ها با هم و مختلط ها نیز با یکدیگر جمع می شوند. به اعداد زیر توجه کنید:

$2 + 3i$

حقیقی ← 2 ، مختلط ← $3i$

عدد مختلطی که موهومی آن صفر است. $\quad 5 = 5 + 0i$

عدد مختلطی که حقیقی آن صفر است. $\quad 3i = 0 + 3i$

به دو مثال زیر توجه کنید.

$$* \; a^2 = b^2 \Longrightarrow a = \pm b \; *$$

$$x^2 - 1 = 0 \longrightarrow x^2 = 1 \longrightarrow x = \pm 1$$

$$x^2 + 4 = 0 \longrightarrow x^2 = -4 \longrightarrow x = ?$$

با توجه به چیزی که تاکنون از قواعد ریاضی آموختیم، مثال اول دارای دو ریشه حقیقی است و مثال دوم ریشه حقیقی ندارد و جواب آن را تعریف نشده می نوشتیم؛ اما اکنون می گوییم معادله دوم دو ریشه دارد و جنس آن ها از ریشه های مختلط است.

$$x^2 = -4 \longrightarrow x = \pm\sqrt{-4} \longrightarrow x = \pm 2i$$

هر معادله درجه n، صد در صد n ریشه دارد که می تواند هر دو حقیقی، مختلط یا یکی حقیقی و دیگری مختلط باشد.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \quad (\text{مجموعه اعداد مختلط})$$

معادله $x^3 + x = 0$ سه ریشه دارد که یکی از آن ها حقیقی و دو ریشه دیگر مختلط هستند.

$$x(x^2+1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \longrightarrow x^2 = -1 \longrightarrow x = \pm i \end{cases}$$

Written by M.Golemeshki

مثال

Monday, July 6, 2020 9:13 PM

مطابق استاندارد اعداد مختلط، مقدار $\sqrt{-1}$ را معادل i در نظر می گیریم.

مثال: مقدار عبارات زیر را برحسب اعداد مختلط نشان دهید.

$$\sqrt{-5} = \sqrt{-1}\sqrt{5} = \sqrt{5}i \qquad \sqrt{-16} = \sqrt{-1}\sqrt{16} = 4i \qquad \sqrt{-4} = \sqrt{-1}\sqrt{4} = 2i$$

مثال: معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $y'' + 4y = 0$ را حل کنید.

$$y'' + 4y = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 = -4 \Longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{-4} \Longrightarrow \lambda = \pm 2i$$

$$\Longrightarrow y = c_1 e^{+2ix} + c_2 e^{-2ix}$$

ریشه های این مثال را با روش دلتا نیز می توانستیم بدست آوریم.

لاپلاس

Monday, July 6, 2020 9:40 PM

تبدیلات لاپلاس:

یک عملگر انتقالی است که برای حل معادلات دیفرانسیل با ضریب ثابت مورد استفاده است، قرار می گیرد.

اگر f(t) برای t>0 تعریف شده باشد، تعریف لاپلاس برابر است با:

$$F(s) = L\big(f(t)\big) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

تابع قطعه قطعه پیوسته:

تابعی که در بازه 0 تا $+\infty$ حداکثر دارای تعداد متناهی نقاط ناپیوسته باشد و در این نقاط دارای حد چپ و حد راست نیز باشد. تابع سینوس اینگونه است اما تابع جزء صحیح چنین نیست.

تابع مرتبه نمایی:

تابع f در $[0, +\infty]$ مرتبه نمایی است هرگاه $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{e^{\propto t}} = 0$ و $\propto > 0$.

هر تابعی که قطعه قطعه پیوسته و مرتبه نمایی باشد، لاپلاس دارد.

Written by M.Golemeshki

تابع گاما و ویژگی های آن

8:05 PM Wednesday, July 8, 2020

تابع گاما:

$$\Gamma(p+1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{p}dt \qquad , \qquad P>-1$$

ویژگی های تابع گاما:

1. $\Gamma(1)=1$
2. $\Gamma(n+1)=n!$
3. $\Gamma(1+p)=p\Gamma(p)$
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

? **مثال:** مقادیر زیر را بیابید.

$$\Gamma(5)=\Gamma(4+1)=4!=24 \qquad \Gamma(3)=\Gamma(2+1)=2!=2$$

$$\Gamma(24)=\Gamma(23+1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{23}dt=23!$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi} \qquad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

گامای هر عددی که بر ۲ تقسیم شود، اگر زوج باشد، آن را ساده کرده و از قانون یک و دو استفاده می کنیم. اگر فرد باشد، از قانون سه و چهار بهره می گیریم. به روش حل اعداد کسری توجه کنید.

$$\Gamma\left(\frac{13}{2}\right)=\frac{11}{2}\times\frac{9}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

? **مثال:** مقدار $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ را بیابید.

از مقدار $\sqrt{\pi}$، $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ و از آن عبارت $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$ را استخراج و مثال را بصورت یک معادله حل می کنیم.

$$\sqrt{\pi}=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\sqrt{\pi}=-\frac{1}{2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\sqrt{\pi}$$

Written by M.Golemeshki

جداول لاپلاس

8:48 AM Thursday, July 9, 2020

ردیف	تابع تبدیل	تبدیل لاپلاس
۱	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{s-\alpha}$
۲	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$
۳	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
۴	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
۵	1	$\frac{1}{s}$
۶	t	$\frac{1}{s^2}$
۷	t^p	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
۸	$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
۹	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
۱۰	$\sin h\ at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
۱۱	$\cos h\ at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

ضرایب داخل لاپلاس را می توان از آن خارج کرد. همچنین در جمع لاپلاس دو عبارت خاصیت جدایی پذیری وجود دارد و می توان بصورت تک به تک از آن ها لاپلاس گرفت. این خصوصیات برای لاپلاس معکوس نیز صادق است.

1. $L(af(t)+g(t)) = aL(f(t)) + L(g(t))$
2. $L^{-1}(af(t)+g(t)) = aL^{-1}(f(t)) + L^{-1}(g(t))$

$$\mathrm{L}(2\sin 3t + \cos 5t) = 2\mathrm{L}(\sin 3t) + L(\cos 5t)$$

Written by M.Golemeshki

مثال

5:24 PM Sunday, July 12, 2020

؟ مثال: لاپلاس عبارات زیر را حساب کنید.

$$L(e^{2t})=\frac{1}{s-2}\qquad L(e^{-3t})=\frac{1}{s+3}\qquad L(1)=L(t^0)=\frac{0!}{s^{0+1}}=\frac{1}{s}$$

$$L(t^5)=\frac{5!}{s^6}\qquad L(3t^2-2t+1)=\left(3\times\frac{2!}{s^3}\right)-\left(2\times\frac{1}{s^2}\right)+\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$L\left(\sqrt{t^3}\right)=L\left(t^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}{s^{\frac{3}{2}+1}}=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{(s)^{\frac{5}{2}}}=\frac{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}}{s^{\frac{5}{2}}}$$

$$L\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)=\frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{s^{-\frac{1}{2}+1}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}}$$

در مثلثات روابط زیر صادق است:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\quad,\qquad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$L(2\cos^2 t)=L(1+\cos 2t)=\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+4}$$

$$L(2\sin^2 5t)=L(1-\cos 10t)=\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+100}$$

؟ مثال: حاصل انتگرال های زیر را بیابید.

$s=1$

$$\int_0^{+\infty}e^{-t}.\cos 4t\,dt=L(\cos 4t)=\frac{s}{s^2+16}\xrightarrow{s=1}\frac{1}{17}$$

$$\int_0^{+\infty}e^{2t}.\sin 5t\,dt=L(\sin 5t)=\frac{5}{s^2+25}\xrightarrow{s=-2}\frac{5}{29}$$

$$\int_0^{+\infty}t^2e^{-3t}\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-3t}t^2\,dt=L(t^2)=\frac{2!}{s^3}\xrightarrow{s=3}\frac{2}{27}$$

$$\int_0^{+\infty}e^{\sqrt{5}t}t^3\,dt=L(t^3)=\frac{3!}{s^4}\xrightarrow{s=-\sqrt{5}}\frac{6}{25}$$

تابع هیپربولیک، معکوس لاپلاس، مثال

5:59 PM Sunday, July 12, 2020

تابع هیپربولیک سینوس و کسینوس:

$$\cosh t=\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}\quad,\quad \sinh t=\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}$$

مشتق تابع هیپربولیک سینوس، برابر تابع هیپربولیک کسینوس است و بالعکس.

معکوس لاپلاس:

جدول لاپلاس را در نظر بگیرید. لاپلاس عبارات سمت چپ برابر با جملات سمت راست است و معکوس لاپلاس جملات سمت راست، توابع سمت چپ است. به مثال های زیر توجه کنید.

مثال: معکوس لاپلاس عبارات زیر را حساب کنید.

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s-5}\right)=e^{5t}\qquad L^{-1}\left(\frac{1}{s+4}\right)=e^{-4t}\qquad L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)=1$$

$$*\ L^{-1}\left(\frac{n!}{s^{n+1}}\right)=t^{n}\quad\equiv\quad L^{-1}\left(\frac{1}{s^{n+1}}\right)=\frac{t^{n}}{n!}\ *$$

$$L^{-1}\left(\frac{5}{s^{3}}\right)=5\times\frac{t^{2}}{2!}\qquad L^{-1}\left(\frac{1}{s^{8}}\right)=\frac{t^{7}}{7!}$$

$$*\ L^{-1}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}\right)=t^{p}\quad\equiv\quad L^{-1}\left(\frac{1}{s^{p+1}}\right)=\frac{t^{p}}{\Gamma(p+1)}\ *$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}=\frac{\sqrt{t}}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\qquad L^{-1}\left(\frac{1}{s^{\frac{5}{2}}}\right)=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}=\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}}$$

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^{\frac{9}{2}}}\right)=\frac{t^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}}$$

$$L^{-1}\left(\frac{s}{s^{2}+8}\right)=\cos\sqrt{8}t\qquad L^{-1}\left(\frac{4}{s^{2}-16}\right)=\sinh 4t$$

Written by M.Golemeshki

تفکیک کسر ها، مثال

12:53 PM   Monday, July 13, 2020

تفکیک کسر چیست؟

در عمل جمع و تفریق چند کسر با مخرج های متفاوت، ابتدا مخرج مشترک گرفته و سپس آن را بر مخرج هر کسر تقسیم و مقدار حاصله را در صورت ضرب می کردیم. با این روش می توانستیم برای چندین کسر یک مخرج مشترک نوشته و صورت ها را با یکدیگر جمع کنیم. تفکیک کسر معکوس این عمل است؛ یعنی می خواهیم یک کسر مشخص را به حاصل جمع چندین کسر مجزا تبدیل کنیم. تنها نکته آنکه صورت این کسر ها برای ما معلوم نیست که باید محاسبه گردد.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{6+3+4}{12}=\frac{13}{12}\Leftrightarrow\frac{13}{12}=\frac{A}{2}+\frac{B}{4}+\frac{C}{3}$$

مثال: عبارت زیر را تفکیک کسر کرده و معکوس لاپلاس آن را حساب کنید.

$$\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{C}{(s+1)}=\frac{[A(s(s+1))]+[B(s+1)]+[C(s^2)]}{s^2(s+1)}$$
$$\Rightarrow\frac{As^2+As+Bs+B+Cs^2}{s^2(s+1)}$$

برای تفکیک این کسر راه دیگری نیز وجود دارد:

$$\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{As+B}{s^2}+\frac{C}{(s+1)}=\frac{[(As+B)(s+1)]+[C(s^2)]}{s^2(s+1)}$$
$$\Rightarrow\frac{As^2+As+Bs+B+Cs^2}{s^2(s+1)}$$

حالا که مخرج این کسر با سؤال برابر است، صورت آن نیز باید با سؤال برابر باشد. برای اینکار باید از جملات ضرایب s^2 و s فاکتور گرفته و آن ها را جداگانه و باقی جملات را نیز جداگانه بنویسیم.

$$\Rightarrow As^2+As+Bs+B+Cs^2=1\Rightarrow(A+C)s^2+(A+B)s+B=1$$
$$\Rightarrow\begin{cases}A+C=0\\A+B=0\\B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=1\\A=-1\\C=1\end{cases}$$

حالا مقادیر بدست آمده را در معادله اول جایگذاری می کنیم.

$$\Rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+1)}\right)=L^{-1}\left(\frac{-1}{s}\right)+L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right)+L^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$
$$\Rightarrow L^{-1}(F(s))=-1+t+e^{-t}$$

مثال

2:14 PM Monday, July 13, 2020

مثال: تبدیل لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید.

$$\frac{3s^2-8s+3}{s^3-4s^2+3s}$$

ابتدا از مخرج یک s فاکتور می گیریم.

$$\frac{3s^2-8s+3}{s^3-4s^2+3s}=\frac{3s^2-8s+3}{s(s^2-4s+3)}$$

از اتحاد یک جمله مشترک استفاده کرده و سپس کسر را تفکیک می کنیم.

$$\Rightarrow \frac{3s^2-8s+3}{s(s-1)(s-3)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{s-3}$$

$$\Rightarrow \frac{[A(s-1)(s-3)]+[B(s)(s-3)]+[C(s)(s-1)]}{s(s-1)(s-3)}$$

$$\Rightarrow \frac{[(As-A)(s-3)]+[(Bs)(s-3)]+[(Cs)(s-1)]}{s(s-1)(s-3)}$$

$$\Rightarrow \frac{As^2-3As-As+3A+Bs^2-3Bs+Cs^2-Cs}{s(s-1)(s-3)}$$

$$\Rightarrow \frac{(A+B+C)s^2+(-4A-3B-C)s+3A}{s(s-1)(s-3)}$$

$$\Rightarrow (A+B+C)s^2+(-4A-3B-C)s+3A=3s^2-8s+3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B+C=3 \\ -4A-3B-C=-8 \\ 3A=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A=3\longrightarrow A=1 \\ 1+B+C=3\longrightarrow B=2-C \\ -4-6+3C-C=-8\longrightarrow C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left(\frac{3s^2-8s+3}{s(s-1)(s-3)}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)+L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)+L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\big(F(s)\big)=1+e^{t}+e^{3t}$$

قائده انتقال، مثال

3:41 PM Monday, July 13, 2020

قائده انتقال:

e^{at} را تابع انتقال گوییم و اثر آن در تابع لاپلاس را چنین نشان می دهیم:

1. $L(e^{at}f(t)) = F(s-a)$
2. $L^{-1}\big(F(s-a)\big) = e^{at}L^{-1}(F(s))$

مثال: لاپلاس عبارات زیر را حساب کنید.

$$L(e^{2t}\,t^3) = \frac{3!}{(s-2)^4}$$

$$L\left(e^{-3t}\,t^{\frac{5}{2}}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)}{(s+3)^{\frac{5}{2}+1}} = \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{(s+3)^{\frac{7}{2}}} = \frac{\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{\pi}}{(s+3)^{\frac{7}{2}}}$$

$$L(e^{7t}\ \sin 5t) = \frac{5}{(s-7)^2+25}$$

$$L\left(\sqrt{t}e^{5t}\right) = L\left(\sqrt{t}\right) = L\left(t^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{s^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}} \longrightarrow L\left(e^{5t}.\sqrt{t}\right) = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}{(s-5)^{\frac{3}{2}}}$$

$$L(e^{5t}\ \cos 2t) = \frac{s-5}{(s-5)^2+4}$$

مثال: لاپلاس $2\cosh t\,.\cos t$ را حساب کنید.

با توجه به فرمول $\cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ ، خواهیم داشت: $2\cosh t = e^t + e^{-t}$

$$2\cosh t\,.\cos t = (e^t+e^{-t}).\cos t = e^t\cos t + e^{-t}\cos t$$

$$\longrightarrow L(2\cosh t\,.\cos t) = L(e^t\cos t) + L(e^{-t}\cos t)$$

$$L(F(t)) = \frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

Written by M.Golemeshki

مثال، مربع کامل

7:56 PM Monday, July 13, 2020

مثال: معکوس تبدیل لاپلاس زیر را حساب کنید.

$$\frac{1}{\sqrt{9s-1}}$$

در ابتدا در مخرج از ۹ فاکتور می گیریم.

$$L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{9s-1}}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{9\left(s-\frac{1}{9}\right)}}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{3\sqrt{s-\frac{1}{9}}}\right)$$

حالا آنچه که از s کم شده است را بجای توان e قرار می دهیم و آن را از زیر رادیکال حذف می کنیم.

$$\Rightarrow \frac{1}{3}e^{\frac{1}{9}t}\,L^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right)=\frac{1}{3}e^{\frac{1}{9}t}\,L^{-1}\left(\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\right)$$

با توجه به رابطه $L(t^p)=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$ و $s^{\frac{1}{2}}=s^{-\frac{1}{2}+1}$، مقدار $p=-\frac{1}{2}$ بدست آمده و با طرفین وسطین به پاسخ زیر می رسیم.

$$\Rightarrow L^{-1}\left(\frac{1}{s^{\frac{1}{2}}}\right)=\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\Rightarrow L^{-1}\big(F(s)\big)=\frac{1}{3}e^{\frac{1}{9}t}.\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

استفاده از مربع کامل:

مثال: مربع کامل جملات زیر را حساب کنید.

داخل پرانتز، جمله اول s، جمله دوم نصف ضریب s، **بیرون پرانتز** مربع نصف ضریب s را کم کرده و در نهایت مقدار عددی که باقی مانده با حفظ علامت اضافه می کنیم.

$$s^2+6s-3\xrightarrow{\text{مربع کامل}}(s+3)^2-9-3$$

$$s^2-5s-2\xrightarrow{\text{مربع کامل}}\left(s-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-2$$

$$s^2+8s-5\xrightarrow{\text{مربع کامل}}(s+4)^2-16-5$$

مثال

8:39 PM Monday, July 13, 2020

مثال: معکوس تابع لاپلاس $\frac{s+1}{s^2+4s+5}$ را حساب کنید.

برای حل چنین عباراتی، باید ابتدا مخرج را به مربع کامل تبدیل کنیم. در این حالت معمولاً جمله آخر نسبت به پاسخ مربع کامل، مقداری کم یا زیاد دارد که خارج از مربع کامل آن را لحاظ می کنیم.

$$L^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2+4s+5}\right)\xrightarrow{\text{مربع کامل}} L^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+2)^2-4+5}\right)$$

مقدار کنار s در مخرج، باید کنار s صورت نیز ظاهر شود. بدین منظور خودمان آن مقدار را اضافه و برای خنثی شدن آن، همان را از جمله کم می کنیم. سپس عدد کنار s را خارج کرده و در توان e قرار می دهیم.

$$\Rightarrow L^{-1}\left(\frac{(s+2)-2+1}{(s+2)^2-4+5}\right)=e^{-2t}\,L^{-1}\left(\frac{s-1}{s^2+1}\right)$$

تفکیک کسر می کنیم:

$$\Rightarrow e^{-2t}\,L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+1}\right)=e^{-2t}\,L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)-e^{-2t}\,L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\big(F(s)\big)=e^{-2t}(\cos t-\sin t)$$

مثال: معکوس تابع لاپلاس $\frac{s-2}{s^2+6s-3}$ را حساب کنید.

$$L^{-1}\left(\frac{s-2}{s^2+6s-3}\right)\xrightarrow{\text{مربع کامل}} L^{-1}\left(\frac{s-2}{(s+3)^2-9-3}\right)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left(\frac{(s+3)-3-2}{(s+3)^2-12}\right)=e^{-3t}\,L^{-1}\left(\frac{s-5}{s^2-12}\right)$$

تفکیک کسر می کنیم:

$$\Rightarrow e^{-3t}\,L^{-1}\left(\frac{s}{s^2-12}-\frac{5}{s^2-12}\right)$$

$$=e^{-3t}\,L^{-1}\left(\frac{s}{s^2-\sqrt{12}^2}-\left(\frac{5}{\sqrt{12}}\right)\times\frac{\sqrt{12}}{s^2-\sqrt{12}^2}\right)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\big(F(s)\big)=e^{-3t}\left(\cosh\sqrt{12}\,t-\frac{5}{\sqrt{12}}\sinh\sqrt{12}\,t\right)$$

Written by M.Golemeshki

تبدیل لاپلاس مشتق، مقادیر اولیه، مثال

9:12 PM Monday, July 13, 2020

تبدیل لاپلاس مشتقات تابع:

$$L\big(f'(t)\big) = sL(f(t)) - f(0)$$

$$L\big(f''(t)\big) = s^2L(f(t)) - sf(0) - f'(0)$$

$$L\big(f'''(t)\big) = s^3L(f(t)) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

$$L\left(f^{(n)}(t)\right) = s^nL(f(t)) - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) \ldots - f^{(n-1)}(0)$$

? مثال: مقدار y در معادله زیر را بیابید.

$$y'' + 2y' + y = te^{-t} \xrightarrow{\text{با شرایط}} y(0) = 0 \qquad , \qquad y'(0) = 1$$

ابتدا از طرفین لاپلاس می گیریم:

$$\Rightarrow L(y'') + 2L(y') + L(y) = L(te^{-t})$$

$$\Rightarrow \big(s^2L(y) - sy(0) - y'(0)\big) + 2\big(sL(y) - y(0)\big) + L(y) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

شرایط اولیه داده شده را جایگذاری می کنیم. سپس عباراتی که $L(y)$ را فاکتور گرفته و در یک طرف تساوی و سایر عبارات را در طرف دیگر تساوی قرار می دهیم.

$$\Rightarrow s^2L(y) - 0 - 1 + 2sL(y) - 0 + L(y) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\Rightarrow (s^2 + 2s + 1)L(y) = \frac{1}{(s+1)^2} + 1 \Rightarrow \big((s+1)^2\big)L(y) = \frac{1}{(s+1)^2} + 1$$

مقدار $L(y)$ را حساب می کنیم:

$$\Rightarrow L(y) = \frac{\left(\frac{1}{(s+1)^2} + 1\right)}{(s+1)^2} \Rightarrow L(y) = \frac{1}{(s+1)^4} + \frac{1}{(s+1)^2}$$

با استفاده از لاپلاس معکوس، مقدار y را محاسبه می کنیم.

$$\Rightarrow y = L^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^4} + \frac{1}{(s+1)^2}\right) = e^{-t}L^{-1}\left(\frac{1}{s^4} + \frac{1}{s^2}\right) = e^{-t}L^{-1}\left(\frac{t^3}{3!} + t\right)$$

$$\Rightarrow y = e^{-t}\left(\frac{t^3}{6} + t\right)$$

Written by M.Golemeshki

مثال

10:36 PM Monday, July 13, 2020

? **مثال:** مقدار y در معادله زیر را با استفاده از لاپلاس بیابید.

$$y'' - 2y' + y = xe^x + e^x \xrightarrow{\text{با شرایط}} y(0) = y'(0) = 1$$

ابتدا از طرفین لاپلاس می گیریم:

$$\Longrightarrow L(y'') - 2L(y') + L(y) = L(xe^x + e^x)$$

$$\longrightarrow L(xe^x + e^x) = L(x.e^x) + L(e^x) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1}$$

$$\Longrightarrow \left(s^2L(y) - sy(0) - y'(0)\right) - 2\left(sL(y) - y(0)\right) + L(y) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1}$$

شرایط اولیه داده شده را جایگذاری می کنیم. سپس عباراتی که $L(y)$ را فاکتور گرفته و در یک طرف تساوی و سایر عبارات را در طرف دیگر تساوی قرار می دهیم.

$$\Longrightarrow s^2L(y) - s - 1 - 2sL(y) + 2 + L(y) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1}$$

$$\Longrightarrow (s^2 - 2s + 1)L(y) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1} + s + 1 - 2$$

$$\Longrightarrow \left((s-1)^2\right)L(y) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1} + s - 1$$

مقدار $L(y)$ را حساب می کنیم:

$$\Longrightarrow L(y) = \frac{\left(\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1} + s - 1\right)}{(s-1)^2} \Longrightarrow L(y) = \frac{1}{(s-1)^4} + \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{s-1}$$

با استفاده از لاپلاس معکوس، مقدار y را محاسبه می کنیم.

$$\Longrightarrow y = L^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^4} + \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{s-1}\right) = e^tL^{-1}\left(\frac{1}{s^4} + \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s}\right)$$

$$\Longrightarrow e^tL^{-1}\left(\frac{t^3}{3!} + \frac{t^2}{2!} + 1\right)$$

$$\Longrightarrow y = e^t\left(\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + 1\right)$$

Written by M.Golemeshki