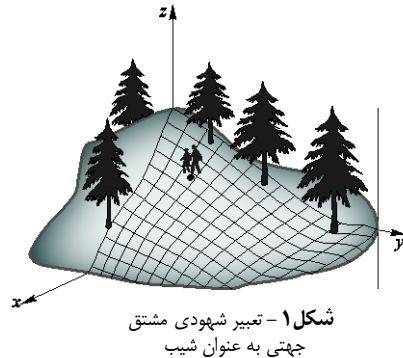


## بخش ۳.۴ مشتق های جهتی (سویی) و معادلات خطوط مماس و قائم بر رویه

فرض کنید که در دامنه یک تپه ایستاده اید (شکل ۱)، دوست شما از شما می پرسد، "در اینجا که ایستاده ایم وضعیت شیب چگونه است؟" به احتمال یقین شما به اطراف نگاه می کنید، ناخود آگاه سؤال را اصلاح می کنید و به دوست خود برمی گردانید، که "در چه جهتی اند/زه شیب را می خواهید؟" با این دو پرسش زمینه معرفی مفهوم مشتق جهتی ایجاد شده است.



قبل از تعریف مشتق جهتی، گرادیان را تعریف نموده و به کمک آن مشتق جهتی را تعریف می نماییم.

## تعریف ۶.۴

## بردار گرادیان

گرادیان تابع  $f(x, y)$  در نقطه  $x_0, y_0$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \mathbf{i} + f_y(x_0, y_0) \mathbf{j} \quad (1)$$

بردار گرادیان با نماد  $\nabla f(x_0, y_0)$  نیز نمایش داده می شود.

## مثال ۱

## محاسبه بردار گرادیان

بردار گرادیان توابع داده شده زیر را در نقطه مورد نظر می یابیم.

$$(a) \quad f(x, y) = xy^2 + e^{xy} \quad \text{در } (0, 1) \quad (b) \quad g(x, y, z) = xy \sin z \quad \text{در } (1, 2, 0)$$

**حل:** (a) با توجه به رابطه (۱) بردار گرادیان  $f$  در صفحه، داریم:

$$\nabla f(x, y) = f_x \mathbf{i} + f_y \mathbf{j} = y^2 + ye^{xy} \mathbf{i} + (2xy + xe^{xy}) \mathbf{j}$$

پس در نقطه  $(0, 1)$  نتیجه می شود  $\nabla f(0, 1) = 2\mathbf{i}$ .

(b) بردار گرادیان  $g$  در فضا عبارت است از:

$$\nabla g(x, y, z) = g_x \mathbf{i} + g_y \mathbf{j} + g_z \mathbf{k} = (y \sin z) \mathbf{i} + (x \sin z) \mathbf{j} + (xy \cos z) \mathbf{k}$$

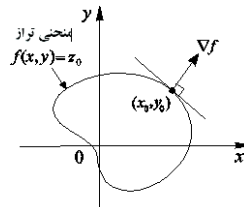
پس در نقطه  $(1, 3, 0)$  داریم  $\nabla g(1, 2, 0) = 2\mathbf{k}$ .

### تعبیر هندسی بردار گرادیان

معادله صفحه مماس بر نمودار تابع  $z = f(x, y)$  در نقطه  $(x_0, y_0)$  را در نظر بگیرید، بردار قایم این صفحه بر خود رویه  $z = f(x, y)$  عمود است. از طرفی تصویر این بردار در صفحه  $xy$  همان بردار گرادیان  $(1)$  می‌باشد که از آن یک نتیجه جالب حاصل می‌شود، به این صورت که بردار گرادیان  $\nabla f(x_0, y_0)$  بر منحنی تراز  $f(x, y)$  در نقطه  $(x_0, y_0)$  عمود است. لذا خط مماس بر منحنی تراز  $C$  در نقطه  $(x_0, y_0)$  از صفحه  $xy$  با معادله دکارتی زیر مشخص می‌شود:

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0 \quad (2)$$

که همان خط تراز صفحه مماس در نقطه  $(x_0, y_0)$  می‌باشد. (شکل ۲)

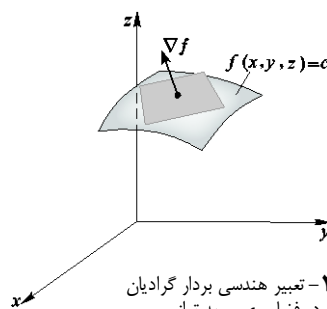


شکل ۲- تعبیر هندسی بردار گرادیان در صفحه روی منحنی تراز رویه

حال رویه تراز  $f(x, y, z) = C$  را در نظر بگیرید که از نقطه  $(x_0, y_0, z_0)$  می‌گذرد، مطابق بحث بالا بردار گرادیان تابع  $w = f(x, y, z)$  برابر است با:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j} + f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}$$

که در نقطه  $(x_0, y_0, z_0)$  بر رویه تراز  $f(x, y, z) = C$  عمود است. (شکل ۳)



شکل ۳- تعبیر هندسی بردار گرادیان در فضا روی رویه تراز

در نتیجه بردار گرادیان همان بردار نرمال صفحه و بردار هادی خط قایم بر رویه تراز  $f(x, y, z) = C$  می‌باشد. لذا معادله صفحه مماس و خط قایم بر رویه به صورت زیر است:

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

نقطه  $(x_0, y_0, z_0)$

$$\text{معادله خط قایم بر رویه: } \frac{(x - x_0)}{f_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(y - y_0)}{f_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{(z - z_0)}{f_z(x_0, y_0, z_0)} \quad (3)$$

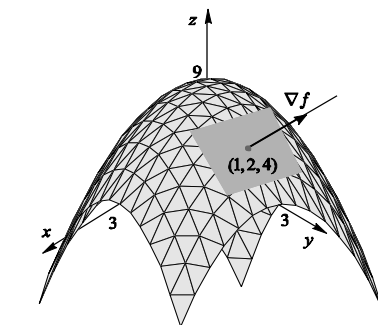
## مثال ۲

## محاسبه صفحه مماس و خط قائم بر رویه

معادلات صفحه مماس و خط قائم بر رویه زیر را در نقطه  $p_0 = 1, 2, 4$  می یابیم.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0$$

**حل:** نمودار رویه فوق سهمی گون دایره ای است که در شکل (۴) نشان داده شده است. ابتدا بردار گرادیان را در نقطه  $P_0$  می یابیم که عمود بر سهمی گون در نقطه فوق است.



شکل ۴- تعبیر هندسی صفحه مماس و خط قائم

$$\nabla f|_{P_0} = 2xi + 2yj + k|_{1,2,4} = 2i + 4j + k$$

پس معادله صفحه مماس عبارت است از:

$$2(x - 1) + 4(y - 2) + (z - 4) = 0 \Rightarrow 2x + 4y + z = 14$$

همچنین معادله خط قائم بر رویه در نقطه  $P_0$  با بردار هادی  $\nabla f|_{P_0}$  عبارت است از:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

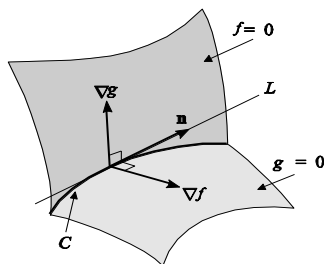
## مثال ۳

## خط مماس بر فصل مشترک دو رویه

معادله پارامتری خط مماس بر منحنی فصل مشترک سطح های  $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$  و  $z = x^2 + y^2$  را در نقطه  $-1, 1, 2$  می یابیم.

**حل:** محل تقاطع دو رویه همانند شکل (۵)، منحنی زیر می باشد:

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0 \\ g(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \end{cases}$$



شکل ۵- منحنی حاصل از محل تقاطع دو رویه

یک نقطه از منحنی  $C$ ،  $-1, 1, 2$  می‌باشد. اکنون کافی است برداری موازی با خط مماس در این نقطه را بیابیم. این بردار  $\mathbf{n} = \nabla f \times \nabla g$  می‌باشد. بنابراین با توجه به:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_1 &= \nabla f_{-1,1,2} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \\ \mathbf{n}_2 &= \nabla g_{-1,1,2} = -8\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.\end{aligned}$$

بردار موازی با خط مماس بر فصل مشترک در نقطه  $P_0$  به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 2 & -1 \\ -8 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 10\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$$

بنابراین معادله پارامتری خط عبارت است از:

$$x = 10t - 1, \quad y = 16t + 1, \quad z = 12t + 2$$

■

### مشتق جهتی (سویی)

به یاد دارید که  $f_x, f_y, f_z$  میزان تغییرات تابع  $f$  نسبت به  $x, y, z$  می‌باشد و یا اینکه مشتقات جزئی فوق را می‌توان به عنوان میزان تغییرات تابع  $f(x, y, z)$  به ترتیب در جهت  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  تصور نمود. حال می‌خواهیم این مفهوم را در هر جهت دلخواه عمومیت دهیم، بدین معنی که اگر  $\mathbf{v}$  یک بردار دلخواه باشد، میزان تغییرات تابع  $f(x, y, z)$  را در امتداد بردار  $\mathbf{v}$  در نقطه دلخواه  $(x_0, y_0, z_0)$  را به دست آوریم (مشتق سویی). برای این منظور ابتدا بردار یکه  $\mathbf{u}$  را هم جهت با بردار  $\mathbf{v}$  به دست آورده سپس  $\mathbf{u} \cdot \nabla f(x_0, y_0, z_0)$  را حساب کرده که به آن مشتق سویی تابع  $f$  در جهت مورد نظر گفته می‌شود.

### قضیه ۴.۴ رابطه بین مشتق سویی با مشتق پذیری

هر گاه  $f$  یک تابع مشتق‌پذیر در نقطه  $x_0$  باشد، آنگاه مشتق سویی تابع  $f$  در نقطه  $x_0$  در هر جهت بردار یکه  $\mathbf{u}$  وجود دارد و داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{x}_0 = \nabla f \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{u} \quad (۴)$$

## محاسبه مشتق سویی به کمک بردار گرادیان

## مثال ۴

مشتق سویی تابع  $f(x, y, z) = z - e^x \cos(y + z)$  در نقطه  $\left(0, 0, \frac{\pi}{6}\right)$  را در جهت بردار  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  می یابیم.

**حل:** برای محاسبه ابتدا بردار گرادیان را می یابیم:

$$\begin{aligned}\nabla f\left(0, 0, \frac{\pi}{6}\right) &= \left\langle f_x, f_y, f_z \right\rangle \bigg|_{\left(0, 0, \frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \left\langle e^x \cos(y + z), e^x \sin(y + z), 1 + e^x \sin(y + z) \right\rangle \bigg|_{\left(0, 0, \frac{\pi}{6}\right)} = \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle\end{aligned}$$

چون تعریف مشتق سویی در جهت بردار واحد است، پس بردار یکانی متناظر  $\mathbf{v}$  را می سازیم:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{8}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{8}}\mathbf{k}$$

پس با توجه به (۴) داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\left(0, 0, \frac{\pi}{6}\right) &= \nabla f\left(0, 0, \frac{\pi}{6}\right) \cdot \mathbf{u} \\ &= \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{8}} \right\rangle = \frac{3}{\sqrt{8}}\end{aligned}$$

■

## مشتق جهتی در امتداد منحنی

## مثال ۵

مشتق جهتی تابع  $f(x, y) = x^2 - 3xy$  را در امتداد سهمی  $y = x^2 - x + 2$  در نقطه  $1, 2$  می یابیم.

**حل:** در نقطه دلخواه  $x, y$ ، بردار گرادیان عبارت است از:

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = 2x - 3y\mathbf{i} - 3x\mathbf{j}$$

پس در نقطه  $1, 2$  داریم  $\nabla f(1, 2) = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ . سهمی فوق را می توان به صورت پارامتری با معادله برداری زیر نمایش داد:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2 - t + 2\mathbf{j}$$

بنابراین  $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$  و  $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t - 1\mathbf{j}$ . لذا بردار واحد مماس بر منحنی  $C$  در نقطه  $1, 2$

بردار  $\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \mathbf{j}$  می باشد. پس مشتق سویی مطلوب با توجه به رابطه (۴) برابر است با:

$$\nabla f(1, 2) \cdot \mathbf{T}(1) = \frac{-7}{\sqrt{2}}$$

## مشتق جهتی

## مثال ۶

مشتق تابع دو متغیره  $f(x, y)$  در نقطه  $p_1(2, 3)$  و در جهت  $v_1 = i + j$  برابر است با  $2\sqrt{2}$  و در جهت  $v_2 = -2j$  برابر است با  $-3$ . مشتق تابع  $f(x, y)$  را در جهت  $v_3 = -i - 2j$  می‌یابیم.

**حل:** چون تعریف مشتق سویی در جهت بردار واحد است، پس بردار یکانی متناظر با  $v_1$  و  $v_2$  را می‌یابیم:

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

$$u_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = -\frac{2}{\sqrt{2}}\mathbf{j} = -\mathbf{j}$$

با استفاده از مفروضات مسأله، ابتدا گرادیان تابع مجهول  $f(x, y)$  را می‌یابیم:

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

$$\nabla f(x, y) \cdot u_1 = (a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\nabla f(x, y) \cdot u_2 = (a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{j}) = -b = -3 \quad (2)$$

از (۱) و (۲) در می‌یابیم:  $a = 1, b = 3$ . پس گرادیان تابع برابر است با:

$$\nabla f(x, y) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

حال بردار یکانی متناظر با بردار  $v_3$  را می‌یابیم:

$$u_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \frac{-1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{-2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$$

اکنون مشتق سویی برابر است با:

$$\nabla f(x, y) \cdot u_3 = (\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{-2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}\right) = \frac{-7}{\sqrt{5}}$$

## بازه تغییرات مشتق سویی

با توجه به خاصیت ضرب داخلی داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) &= \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u} \\ &= |\nabla f(\mathbf{x}_0)| |\mathbf{u}| \cos \theta = |\nabla f(\mathbf{x}_0)| \cos \theta \end{aligned}$$

بنابراین ماکزیمم مقدار مشتق جهتی  $f$  در نقطه  $x_0$  زمانی رخ می‌دهد که  $\cos \theta = 1$  باشد، یعنی بیشترین تغییرات در جهت بردار گرادیان است، و با بختی مشابه می‌نیم مقدار مشتق جهتی  $f$  در نقطه  $x_0$  در جهت قرینه بردار گرادیان رخ می‌دهد و مقدار آن  $-\|\nabla f(x_0)\|$  است. پس بازه تغییرات مشتق سویی  $f$  در نقطه  $x_0$  فاصله بسته  $[-\|\nabla f(x_0)\|, \|\nabla f(x_0)\|]$  می‌باشد.

### مثال ۷ تعیین جهت و میزان سریعترین افزایش دما

دما در هر نقطه  $x, y, z$  از یک جسم جامد در فضای سه بعدی،  $T = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$  درجه می‌باشد، میزان تغییر دما در نقطه  $1, 1, 1$  در جهتی که گرما سریعترین افزایش را دارد و مقدار آن را به دست می‌آوریم.

**حل :** تابع  $T(x, y, z)$  در نقطه  $1, 1, 1$  مشتق‌پذیر است، پس در همه جهات مشتق سویی دارد، به خصوص در جهت بردار گرادیان که بیشترین تغییر دما را دارد:

$$\nabla T = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}} \mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 1}} \mathbf{k}$$

در نتیجه در نقطه  $1, 1, 1$  داریم:

$$\nabla T|_{1,1,1} = \frac{1}{\sqrt{4}} \mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{4}} \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{4}} \mathbf{k} = \frac{1}{2} \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

پس بیشترین تغییر دما مقدار زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}}|_{1,1,1} &= \nabla f|_{1,1,1} \cdot \mathbf{u} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

■

### مثال ۸ کاربرد مشتق جهتی

معادله سطح یک کوه به صورت  $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$  می‌باشد به طوری که محور  $x$  ها به سمت شرق و محور  $y$  ها به سمت شمال باشد، به سوالات زیر جواب می‌دهیم:

- (a). در نقطه  $-10, 5$  جهت بیشترین شیب کدام است؟  
 (b). اگر یک کوهنورد به سمت مشرق حرکت کند از کوه بالا می‌رود یا پایین می‌آید؟  
 (c). اگر کوهنورد به سمت جنوب غربی حرکت کند از کوه بالا می‌رود یا پایین می‌آید؟ سرعت او چقدر است؟  
 (d). در چه جهتی یک منحنی تراز می‌پیماید؟

**حل (a) :** ابتدا گرادیان تابع  $z = 1200 - 3x^2 - 2y^2$  را در نقطه  $-10, 5$  می‌یابیم:

$$\begin{aligned} \nabla z &= \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} = -6x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j} \\ \nabla z(-10, 5) &= 60\mathbf{i} - 20\mathbf{j} \end{aligned}$$

پس جهت بیشترین شیب برابر است با:

$$\vec{u} = \frac{\nabla z}{|\nabla z|} = \frac{60i - 20j}{\sqrt{4000}} = \frac{3}{\sqrt{10}}i - \frac{1}{\sqrt{10}}j$$

**حل (b):** اگر کوهنورد به سمت مشرق حرکت کند یعنی در جهت  $\vec{v}_1 = i$  حرکت می‌کند. لذا کافی است مشتق جهتی  $z$  را در این جهت بیابیم:

$$\nabla z(-10, 5) \cdot \vec{v}_1 = (60i - 20j) \cdot i = 60 \times 1 - 20 \times 0 = 60$$

یعنی کوهنورد با سرعت 60 بالا می‌رود.

**حل (c):** اگر کوهنورد به سمت جنوب غربی حرکت کند، در جهت  $\vec{v}_2 = \cos \frac{5\pi}{4}i + \sin \frac{5\pi}{4}j$  حرکت کرده است. لذا:

$$\nabla z(-10, 5) \cdot \vec{v}_2 = (60i - 20j) \cdot \left( \cos \frac{5\pi}{4}i + \sin \frac{5\pi}{4}j \right) = -20\sqrt{2}$$

چون سرعت (مشتق جهتی) منفی است پس کوهنورد با سرعت  $-20\sqrt{2}$  از کوه پایین می‌آید.

**حل (d):** باید در جهتی حرکت کند که مشتق جهتی صفر باشد یعنی:

$$\nabla z \cdot \vec{v}_3 = 0 \Rightarrow (60i - 20j) \cdot (\cos \theta i + \sin \theta j) = 0$$

$$\Rightarrow 60 \cos \theta - 20 \sin \theta = 0 \Rightarrow \tan \theta = 3 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}, \sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

در نتیجه جهتی که یک منحنی تراز را می‌پیماید عبارت است از:

$$\vec{v}_3 = -\frac{1}{\sqrt{10}}i - \frac{3}{\sqrt{10}}j \quad \text{یا} \quad \vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{10}}i + \frac{3}{\sqrt{10}}j$$

■

### استفاده از CAS

 **صفحه مماس** برای تعیین و رسم صفحه مماس بر رویه  $z = f(x, y)$  می‌توان با ترکیب دستورات در Maple

یا Mathematica از فرمول معادله صفحه مماس استفاده نمود.

(در Maple)

> tangplan := a, b -> f a, b + D 1 f a, b \* x - a + D 2 f a, b \* y - b :

> f := x, y -> 9 - x<sup>2</sup> - y<sup>2</sup> :

> plotf := plot3d f x, y , x = -3..3, y = -3..3 :

> display3d plotf, tangplan 1, 2 ;

با انجام این دستورات مشابه شکل (۴) این بخش ایجاد می‌شود.

( در Mathematica )

```

tangplan a_,b_ = f a,b + D f x,y ,x x-a + D f x,y ,y x-b ;
f x_,y_ = 9-x^2-y^2;
plotf = Plot3D f x,y , {x,-1,1} , {y,-1,1} ;
plotz = Plot3D tangplan 1,2 , {x,-1,1},{y,-1,1} ;
show plotf,plotz

```

 **بردارگرادیان** محاسبه گرادیان می توان از تعریف گرادیان یا دستورات مستقیم استفاده نمود.

> with linalg : ( در Maple )

```
> grad 3x^2+2*y*z, x,y ;
```

$$6x, 2z, 2y$$

```
>> Calculus `VectorAnalysis` ;
```

( در Mathematica )

```
Grad 3x^2+2*y*z
```

$$6x, 2z, 2y$$

 **مشتق سویی** مشتق سویی را می توان از روش گرادیان تعیین نمود. برای نمونه برنامه مشتق سویی تابع سه متغیره  $f$  را در نقطه  $(a,b,c)$  در جهت بردار  $\mathbf{v}$  ارایه می دهیم ( در Mathematica ).

```
gradf[x_,y_,z_] = Grad f[x,y,z] ;
```

```
u = v / Sqrt[v.v];
```

```
ddriv=gradf[a,b,c].u
```

اکنون با وارد کردن تابع  $f = x^2 + y^2 + z^2$ ، نقطه  $a, b, c$  و بردار  $\mathbf{v} = \langle 2, 1, 2 \rangle$  با اجرای دستورات بالا جواب های زیر به دست می آیند.

$$2x, 2y, 2z$$

$$\frac{20}{3}$$

## مجموعه تمرین‌های بخش ۳.۴

۱. (محاسبه مشتق جهتی) مشتق جهتی توابع زیر را در نقطه و جهت داده شده محاسبه کنید.

a.  $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$  در نقطه  $(1, -1, 3)$  و در جهت  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

b.  $f(x, y, z) = 2xy^3 e^{yz}$  در نقطه  $(1, 1, 0)$  و در جهت  $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

c.  $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  در نقطه  $(1, 1, 1)$  و در جهت  $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

۲. (تعیین بردار گرادیان از مشتق‌های جهتی) مقدار مشتق جهتی تابع  $f(x, y, z)$  در نقطه  $a, b$ ، در جهت  $\mathbf{i} + \mathbf{j} / \sqrt{2}$ ، عدد  $3\sqrt{2}$  و در جهت  $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} / 5$ ، عدد 5 است،  $\nabla f$  را بیابید.

۳. (ماکزیمم مشتق جهتی) ثابت‌های  $a, b, c$  را طوری بیابید که مشتق جهتی در نقطه  $1, 2, -1$  دارای ماکزیمم 64 در

جهتی موازی محور  $z$  باشد.  $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$

۴. (کاربرد بردار گرادیان) کاپیتان رالف خود را سمت آفتابی مریخ یافته و متوجه می‌شود که لباس فضایی‌اش در حال ذوب شدن است. دمای اطراف وی در دستگاه مختصات قایم عبارت است از:

$$T(x, y, z) = e^{-x} + e^{-2y} + e^{-3z}$$

اگر او در نقطه  $1, 1, 1$  باشد، در چه جهتی باید شروع به حرکت کند که سریع‌تر خنک شود.

۵. (کاربرد بردار گرادیان) یک حشره که خود را در محیطی که توسط ماده شیمیایی  $AEF$  مسموم شده می‌یابد، تصمیم می‌گیرد در جهتی که در کوتاهترین مدت غلظت کاهش می‌یابد، حرکت نماید. اگر غلظت  $AEF$  با

$$\sigma(x, y, z) = e^{-3x} + \sin(yz) + e^{-z^2}$$

۶. (کاربرد بردار گرادیان) توزیع ولتاژ بر روی صفحه ای فلزی به صورت  $v(x, y) = 500 - x^2 - 4y^2$  می‌باشد. مطلوب است:

a. در نقطه  $(1, -2)$  جهتی را تعیین کنید که در آن جهت حرکت ولتاژ بیشترین افزایش را داشته باشد.

b. جهت بیشترین کاهش ولتاژ را در نقطه  $(1, -2)$  تعیین کنید.

c. مقدار این بیشترین افزایش و کاهش را بیابید.

d. مسیری را تعیین کنید که در طول آن ذره ای از نقطه  $(1, -2)$  حرکت کرده و در جهت بیشترین افزایش ولتاژ پیش رود.

۷. معادلات صفحه مماس و خط قایم بر رویه‌های زیر را در نقاط داده شده بیابید.

a.  $1, 0, 1$  ،  $\mathbf{b.} \quad x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 4xz = 4$  ،  $1, 0, 0$  ،  $z + 1 = xe^y \cos z$

c.  $0, 0, 1$  ،  $z = e^{-x} \cos y$  ،  $1, 0, 2$  ،  $\mathbf{d.} \quad z = x^2y^2 + 2xe^y$

۸. (خط مماس بر فصل مشترک دو رویه) معادله پارامتری خط مماس بر منحنی فصل مشترک سطوح  $z = 2x^2 + 3y^2$  و  $2x^2 - y^2 + z^2 = 3$  در نقطه  $-1, -2, 3$  را بیابید.

۹. (دو رویه مماس بر هم) نشان دهید که سطوح  $z = e^{2x+y+4}$  و  $z = xy - y^2 + 8y - 5$  در نقطه  $(-3, 2, 1)$  بر هم مماس هستند، صفحه مماس مشترک را بیابید.