فصل

۲ دستگاه‌های مختصات دیگر

۱.۲ دستگاه مختصات قطبی

۲.۲ دستگاه مختصات استوانه ای

۳.۲ دستگاه مختصات کروی

مقـدمـه

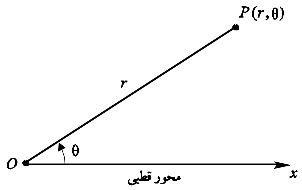
به کمک دستگاه مختصات قطبی می توان برخی از منحنی ها و ناحیه های ویژه را در صفحه راحت تر توصیف کرد. پدید آمده است. معادلات قطبی خم‌های جالبی تولید می‌کنند، همچنین به کمک انتگرال قطبی می‌توان مساحت نواحی محدود به معادلات قطبی و طول قوس آن‌ها را محاسبه نمود.

در فضای سه بعدی دستگاه‌های مختصات دیگری از قبیل دستگاه مختصات استوانه‌ای و کروی وجود دارند که به کمک آن‌ها می‌توان بعضی از رویه‌ها و نواحی در فضا را آسان‌تر توصیف نمود.

بخش ۲. ۱ دستگاه مختصات قطبی

این دستگاه شامل یک محور اعداد به نام محور قطبی می‌باشد که حول نقطه‌ای به نام مبدا O یا قطب می‌چرخد و جهت آن به سمت راست نشان داده می‌شود.

هر نقطه P در صفحه می‌تواند توسط مختصات قطبی r,θ نمایش داده شود که در آن r فاصله جهت‌دار از مبدا O تا نقطه P است و θ زاویه جهت‌دار از محور قطبی تا پاره‌خط oP در جهت مثبت محور (خلاف جهت عقربه ساعت) می‌باشد.



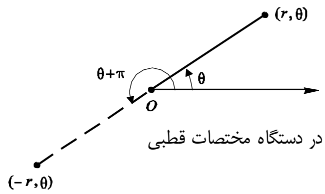
شکل ۱-مختصات قطبی $P\ \ r,\theta$

لازم به ذکر است که در مختصات دکارتی هر نقطه $P\ \ x,y$ به صورت یکتا نمایش داده می‌شود ولی این خاصیت در مختصات قطبی برقرار نمی‌باشد، زیرا زاویه‌های زیر نقطه پایانی یکسانی دارند

$$\theta + 2n\pi \qquad\qquad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots.$$

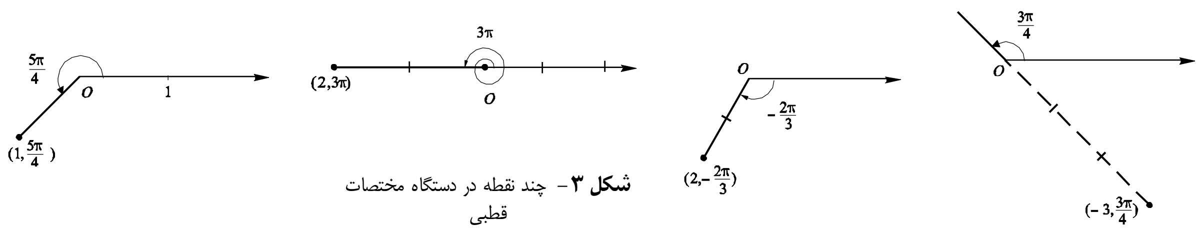
برای آنکه دستگاه کامل باشد گاهی لازم است که فاصله منفی تعریف شده باشد، یعنی $r < 0$، که نمایش فاصله مثبت $-r$ در جهت مخالف یعنی $\theta + \pi$ می‌باشد. (شکل ۲)

$$-r,\theta \ = \ r,\theta+\pi$$



شکل ۲- فاصله منفی در دستگاه مختصات قطبی

برای آنکه با نقاط در دستگاه مختصات قطبی بیشتر آشنا شوید، در شکل(۳) چند نقطه در مختصات قطبی نشان داده شده است.

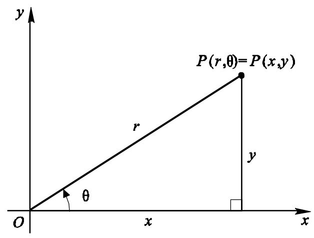


شکل ۳- چند نقطه در دستگاه مختصات قطبی

■ رابطه بین دستگاه مختصات قطبی و دکارتی

اگر بخواهیم دستگاه مختصات د کارتی و دستگاه مختصات قطبی را در یک دستگاه نشان دهیم محور قطبی را محور مثبت $x-$ انتخاب می‌نماییم، در این صورت با توجه به شکل۴ رابطه بین مختصات قطبی و د کارتی حاصل می‌گردد.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases} \qquad (۱)$$



شکل۴ – ارتباط دستگاه مختصات دکارتی با قطبی

با استفاده از معادلات فوق می توان معادلات در مختصات د کارتی را به معادلات در مختصات قطبی و برعکس تبدیل نمود.

مثال۱ تبدیل مختصات قطبی به دکارتی

مختصات قطبی نقطه‌ای که مختصات د کارتی آن $\sqrt{2},\sqrt{2}$ می‌باشد را تعیین می کنیم.

حل :

$$x=\sqrt{2}\ ,y=\sqrt{2}\Rightarrow r^2=x^2+y^2=\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2=4\Rightarrow r=\pm 2$$

$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$$

پس این نقطه دارای دو مختصات قطبی $\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$ می‌باشد.

■

مثال۲ تبدیل مختصات دکارتی به قطبی

مختصات دکارتی نقطه $\left(-6,\frac{7\pi}{4}\right)$ را تعیین می نماییم.

حل :

$$x=r\cos\theta=-6\cos\frac{7\pi}{4}=-6.\frac{\sqrt{2}}{2}=-3\sqrt{2}$$

$$y=r\sin\theta=-6\sin\frac{7\pi}{4}=-6.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}$$

پس این نقطه دارای مختصات دکارتی $-3\sqrt{2},3\sqrt{2}$ می‌باشد.

■

مثال۳ تبدیل معادله قطبی به دکارتی

معادله قطبی نموداری بصورت $r=2a\cos\theta$ است. معادله دکارتی آن را می یابیم.

حل : باید مختصات قطبی را به مختصات دکارتی تبدیل نماییم، ابتدا طرفین را در r ضرب می‌نماییم :

$$r^2 = 2ar.cos\theta$$

لذا با توجه به رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$x^2 + y^2 = 2ax$$

که این معادله دایره $x - a\ ^2 + y^2 = a^2$ به مرکز $a, 0$ و شعاع a می‌باشد.

■

مثال۴ تبدیل معادله دکارتی به قطبی

معادله دکارتی نموداری بصورت $x^2 + y^2 - 4x = 0$ است.معادله قطبی آن را می یابیم.

حل: $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ را در معاله فوق جایگزین می‌نماییم:

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 4r\cos\theta = 0 \Rightarrow r^2 - 4r\cos\theta = 0 \Rightarrow r\ \ r - 4\cos\theta\ \ = 0$$

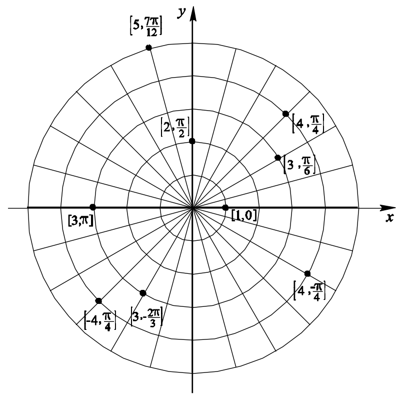
$$\Rightarrow r = 0 \text{ یا } r = 4\cos\theta$$

وقتی که $\theta = \frac{\pi}{2}$ در $r = 4\cos\theta$ داریم $r = 0$. لذا $r = 0$ بر نمودار $r = 4\cos\theta$ واقع است. بنابراین معادله قطبی بصورت $r = 4\cos\theta$ می‌باشد.

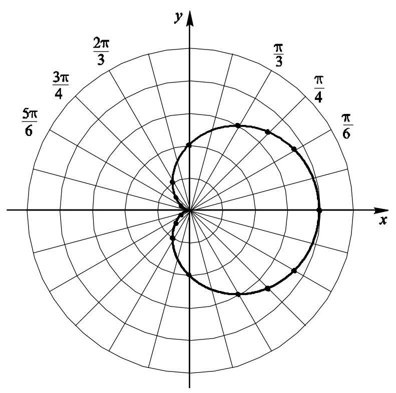
■

■ رسم نمودار معادلات در دستگاه قطبی

نخستین گام برای رسم معادله قطبی $r = f\ \ \theta$ همانند رسم منحنی‌ها در دستگاه مختصات دکارتی، تعیین چند نقطه روی منحنی قطبی $r = f\ \ \theta$ سپس اتصال این نقاط توسط یک منحنی به یکدیگر می‌باشد توصیه ما این است که ابتدا یک شبکه‌بندی با مقیاس مناسب بر حسب r, θ در صفحه قطبی ایجاد نمایید به طوری که بتوانید مکان نقطه را از روی شبکه به آسانی تعیین کنید (شکل 5). برای نمونه توسط نقطه‌یابی منحنی نمودار معادله $r = 2 + 2\cos\theta$ با طول گام‌های $\frac{\pi}{2}$ و 1 برای فاصله‌های $0 \le \theta < 2\pi$ و $0 \le r < \infty$ در شکل (۶) آمده است.



شکل ۵ - شبکه‌بندی صفحه قطبی همراه با نمایش چند نقطه روی آن

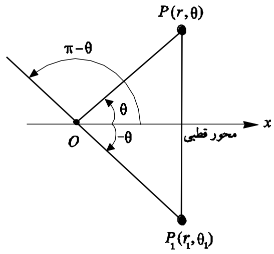


شکل۶ - نمایش منحنی $r = 2 - 2\cos\theta$ به صورت نقطه‌یابی در ناحیه شبکه‌بندی

ملاحظه می‌نمایید که روش نقطه‌یابی برای رسم نمودار یک معادله قطبی $r = f\ \ \theta$ بسیار خسته‌کننده و طولانی است به این سبب بررسی چند نکته قبل از نقطه‌یابی به طور کامل یاری دهنده است.

۱. بررسی تقارن نسبت به محور قطبی

اگر با تعویض نقطه r,θ روی منحنی با نقطه $r,-\theta+2n\pi$ یا $-r,\pi-\theta+2n\pi$ که در آن n عدد صحیح دلخواهی است، یک نقطه روی معادله منحنی $r=f\ \theta$ بدست آید. (شکل ۷) در اینصورت نمودار یک معادله $r=f\ \theta$ در مختصات قطبی نسبت به محور قطبی تقارن دارد.



شکل۷ – نمایش تقارن نسبت به محور قطبی

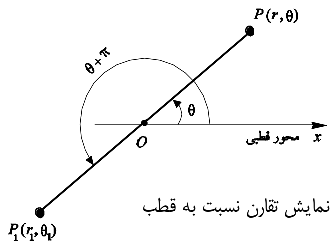
مثال۵ تقارن نسبت به محور قطبی

برای نمونه نمودار معادله $r=4\cos 2\theta$ نسبت به محور قطبی تقارن دارد چون با تعویض r,θ با $r,-\theta$ داریم:

$$r=4\cos\ -2\theta\ =4\cos 2\theta$$

۲. بررسی تقارن نسبت به قطب

اگر با تعویض نقطه r,θ از معادله $r=f\ \theta$ در مختصات قطبی با $-r,\theta+2n\pi$ یا $r,\pi+\theta+2n\pi$ که عدد n صحیح دلخواهی است، مجدد یک نقطه روی منحنی $r=f\ \theta$ متناظر شود. (شکل ۸) در اینصورت نمودار منحنی نسبت به قطب متقارن است.



شکل۸ – نمایش تقارن نسبت به قطب

مثال۶ تقارن نسبت به قطب

برای بررسی تقارن نمودار معادله $r=4\cos 2\theta$ نسبت به قطب، اگر نقطه r,θ را با $-r,\theta$ تعوض نماییم، معادله $-r=4\cos 2\theta$ حاصل می‌شود که با معادله داده شده معادل نیست. با این حال مختصات دیگر را امتحان می‌کنیم. با تعویض r,θ با $r,\pi+\theta$ خواهیم داشت:

$$r=4\cos 2\ \pi+\theta\ =4\cos 2\theta$$

بنابراین نمودار نسبت به قطب متقارن است.

۳. بررسی تقارن نسبت به یک خط

ممکن است نمودار یک معادله در مختصات قطبی نسبت به خط L تقارن داشته باشد، برای نمونه معادله $r = 4\cos\theta$ نسبت به خط $\theta = \frac{\pi}{2}$ متقارن است، چون با تعویض r,θ با $r,\pi-\theta$ داریم :

$$r = 4\cos 2\ \pi - \theta\ = 4\cos 2\theta$$

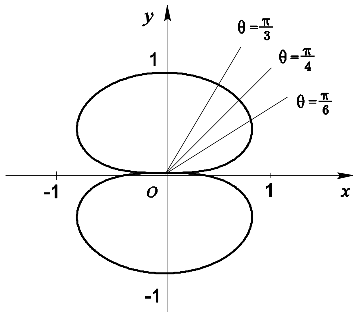
۴. عبور منحنی از قطب

برای تحقیق اینکه منحنی معادله $r = f\ \theta$ از قطب عبور می‌کند، کافی است در معادله فوق قرار دهیم $r = 0$ یعنی $f\ \theta\ = 0$ اگر $f\ \theta\ = 0$ برقرار باشد، منحنی از قطب عبور می‌کند برای نمونه $r = 5 - 4\cos\theta$ از قطب عبور نمی‌کند چون به ازای $r = 0$ ، $\cos\theta = \frac{5}{4} > 1$ غیر ممکن است، ولی $r = 4 - 5\cos\theta$ از قطب عبور می‌کند. جواب‌هایی که برای θ از حل معادله $f\ \theta\ = 0$ حاصل می‌شود، معادله خط مماس $\theta = \theta_0$ بر نمودار $r = f\ \theta$ است که از قطب می‌گذرد.

مثال۷ **رسم نمودار قطبی**

شکل عدد 8 معادله دکارتی $x^2 + y^2\ ^3 = y^2$ را به قطبی تبدیل نموده سپس آن را رسم می کنیم.

حل : با استفاده از $y = r\sin\theta, x^2 + y^2 = r^2$ داریم : $r^6 = r^2\sin^2\theta$ یا $r^2 = |\sin\theta|$ و یا $r = \sqrt{|\sin\theta|}$ رسم منحنی این معادله در دستگاه مختصات دکارتی بسیار مشکل است. ولی رسم این معادله در مختصات قطبی ساده است. به عنوان نمونه در بازه $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ، $\sin\theta$ از 0 تا 1 افزایش می‌یابد، پس r نیز از 0 تا 1 زیاد خواهد شد. با رسم چند نقطه برای نمونه $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، $\theta = \frac{\pi}{4}$ و $\theta = \frac{\pi}{3}$ می‌توانیم به سرعت آن قسمت از منحنی را که در ربع اول قرار دارد، رسم کنیم بقیه قسمت‌ها با توجه به تقارن در مختصات دکارتی با تقارن و خاصیت تناوبی $|\sin\theta|$ به دست می‌آید (شکل ۹).



شکل۹- نمودار معادله $r = \sqrt{|\sin\theta|}$

■

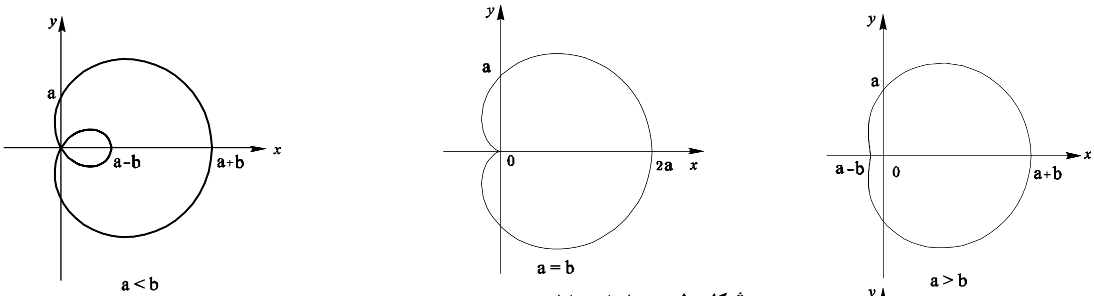
■ نمودار لیماسون

نمودار یک معادله به یکی از صورت‌های زیر یک لیماسون $Limacon$ نامیده می‌شود.

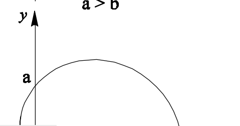
$$r = a \pm \cos\theta\ \ ,\ \ r = a \pm \sin\theta \qquad (۲)$$

برای رسم این نمودارها کافی است به بررسی رسم نمودار معادله $r = a + b\cos\theta$ بپردازیم. چون نمودار معادله $r = a - b\cos\theta$ همان نمودار $r = a + b\cos\theta$ می‌باشد که به اندازه 180 درجه دوران یافته است (چرا؟). همچنین معادلات $r = a + b\sin\theta$ همان معادلات سمت راست در (۲) هستند که به اندازه 90 درجه دوران می‌یابند.

معادله $r = a + b\cos\theta$ نسبت به محور قطبی متقارن است (چون اگر در معادله r,θ با $r_1,-\theta$ عوض شود، معادله تغییرنمی کند) . نمودار این معادله در سه حالت در شکل (۱۰) نمایش داده شده است.



شکل۱۰ - نمودارهای معادله $r = a + b\cos\theta$ وابسته به ثابت‌های a و b

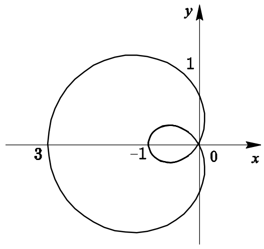


مثال۸ **رسم چند لیماسون**

نمودار هر یک از منحنی‌های زیر را می‌یابیم.

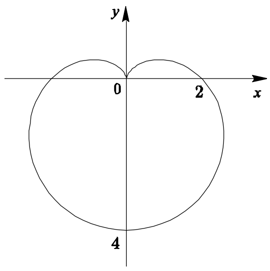
a. $r = 1 - 2\cos\theta$ **b.** $r = 2 - 2\sin\theta$

حل (a): با توجه به نمودارهای شکل ۱۰ می‌دانیم که $r = 1 + 2\cos\theta$ حالت سوم است چون $1 = a < b = 2$ بنابراین نمودار $r = 1 - 2\cos\theta$ به اندازه 180^0 دوران یافته نمودار معادله $r = 1 + 2\cos\theta$ است (شکل ۱۱)



شکل۱۱ - نمودار معادله
$r = 1 - 2\cos\theta$

(b) : با توجه با این که معادله $r = 2 + 2\cos\theta$ معادل حالت دوم $a = b = 2$ شکلی شبیه یک دلگون دارد، بنابراین نمودار منحنی $r = 2 - 2\cos\theta$ به اندازه 180^0 دوان از آن حاصل می‌شود. در نهایت نمودار معادله $r = 2 - 2\sin\theta$ به اندازه 90^0 دوران دیگر از نمودار معادله $r = 2 - 2\cos\theta$ حاصل خواهد شد.(شکل ۱۲)



شکل ۱۲ - نمودار معادله
$r = 2 - 2\sin\theta$

■ نمودار گل رز

نمودار هر معادله به یکی از صورت‌های زیر یک گل‌رز نامیده می‌شود.

$$r = a\sin n\theta \ , \ r = a\cos n\theta \qquad (۳)$$

نمودار شامل n پر است اگر n فرد باشد و همچنین شامل $2n$ پر خواهد بود اگر n یک عدد زوج باشد.

مثال۹ رسم رز چهار پر

رز چهار پر $r = 4\cos 2\theta$ را رسم می‌کنیم.

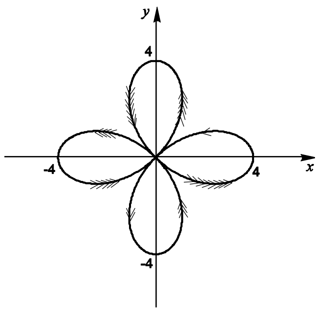
حل : در بالا نشان دادیم که نمودار این معادله نسبت به محور قطبی، محور $\frac{1}{2}\pi$ و قطب متقارن است. اگر در معادله داده شده به جای r مقدار 0 را جایگزین نماییم، به ازای $0 \leq \theta < 2\pi$ به دست خواهیم آورد :

$$\theta = \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi$$

جدول (۱) مقادیر را به ازای برخی مقادیر θ از 0 تا $\frac{1}{2}\pi$ نشان می‌دهد. اکنون با استفاده از این مقادیر و خواص تقارن نمودار را رسم می‌کنیم (شکل ۱۳).

جدول -۱ مقادیر معادله مثال (۷)

θ	r
0	4
$\frac{1}{12}\pi$	$2\sqrt{3}$
$\frac{1}{6}\pi$	2
$\frac{1}{4}\pi$	0
$\frac{1}{3}\pi$	-2
$\frac{5}{12}\pi$	$-2\sqrt{3}$
$\frac{1}{2}\pi$	-4

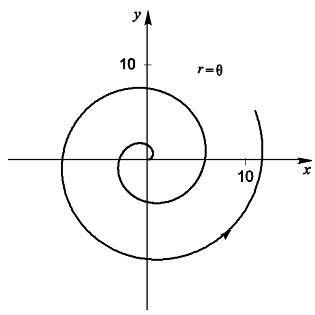


شکل ۱۳ – نمودار معادله رز چهار پر
$r = 4\cos 2\theta$

نمودارهای مارپیچی : در حالت کلی هر معادله به صورت

$$r = a\theta \qquad (۴)$$

به **مارپیچ ارشمیدسی** معروف است که در آن a یک ثابت اختیاری می‌باشد. این نمودار با تبدیل r,θ به $-r,-\theta$ تغییر نمی‌کند، بنابراین نسبت به محور $\frac{\pi}{2}$ متقارن است. همچنین نمودار در قطب بر محور قطبی مماس است، چون زمانی که $r = 0$ ، $\theta = 0$ نتیجه می‌شود (شکل ۱۴).



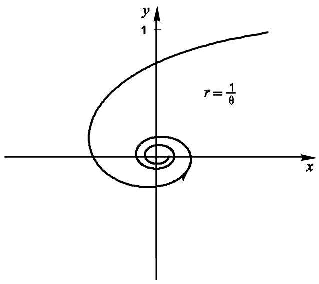
شکل۱۴ – نمودار خاص مارپیچ ارشمیدسی
$r = a\theta$

به ازای هر ثابت a، معادله به صورت

$$r = \frac{a}{\theta} \qquad (۵)$$

به مارپیچ هذلولی معروف می‌باشد. بدیهی است که در این معادله $\theta \neq 0$ بوده وبا افزایش θ مقدار r کم می‌شود به طوریکه به سمت صفر متمایل می‌شود.

این نمودار نیز نسبت به محور $\frac{\pi}{2}$ متقارن است، چون با تبدیل r,θ به $-r,-\theta$ معادله تغییر نمی‌کند (شکل ۱۵)

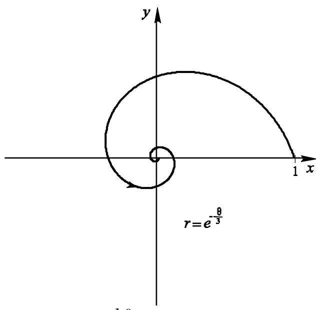


شکل۱۵ – نمودار خاص مارپیچ هذلولی $r=\frac{a}{\theta}$

در حالت کلی معادله به صورت

$$r = ae^{k\theta} \qquad (۶)$$

که در آن a و k دو ثابت اختیاری می‌باشند، به مارپیچ لگاریتمی معروف شده است. زمانی که $\theta = 0$ باشد $r = a$ معادله یک دایره است. همچنین با افزایش θ مقدار r ضمن این است که حول قطب می‌چرخد نسبت به علامت k افزایش یا کاهش می‌یابد (شکل ۱۶).



شکل۱۶ – نمودار خاص مارپیچ لگاریتمی $r = ae^{k\theta}$