# ریاضی عمومی
# دانشکده ولیعصر

مشتق توابع

## تغییرات متغییر وتابع:

اگر متغییر از مقدار $x_1$ به مقدار $x_2$ برسد حاصل $x_2 - x_1$ را تغییرات متغییر می گویند و در اینصورت مقدار تابع از $f(x_1)$ به $f(x_2)$ مي رسد که تفاضل آنرا تغییرات تابع می گویند. در اینصورت تغییرات متغیر و تغییرات تابع را با نمادهای زیر نشان می دهند.

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

تغییرات تابع

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

تغییرات متغیر

در حالت کلی ، اگر a یک عدد ثابت و متغیر $x$ در اطراف آن تغییر کند، می توان نوشت

$$\Delta x = x - a \quad \Rightarrow \quad x = \Delta x + a$$

$$\Delta y = f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$$

# تعريف مشتق



**نسبت تغييرات تابع به تغييرات متغيير در اطراف عدد a ،هنگامي كه تغيرات متغيير**

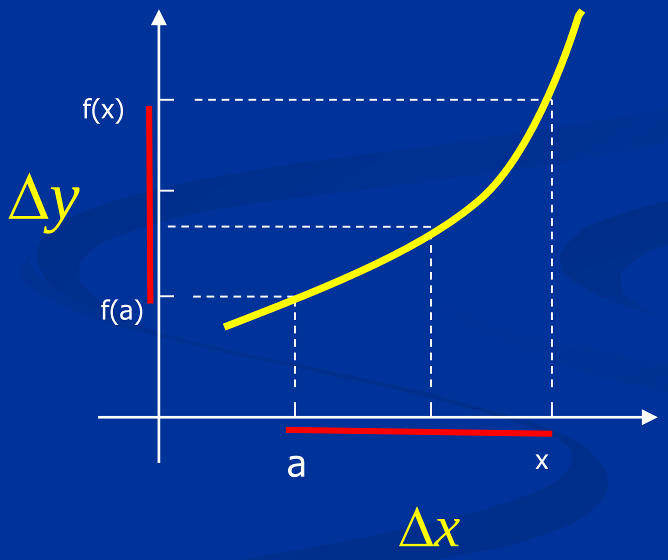
**بسيار كوچك باشد را مشتق تابع f در** $x = a$ **مي گويند** و با نماد

$f'(a)$ نشان می دهد. بنابراین

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to a} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$



مثال: با توجه به تعریف مشتق، مشتق تابع زیر را در x=3 را بیابید

$$f(x) = x^2 + 5$$

$$f(3) = 3^2 + 5 = 14$$

با توجه به تعریف $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

جدول زیر را محاسبه می کنیم.

| $x$ | $\Delta x$ | $f(x)$ | $\Delta y$ | $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ |
|---|---|---|---|---|
| 4 | 1 | 21 | 7 | 7 |
| 3.5 | 0.5 | 17.25 | 3.25 | 6.5 |
| 3.2 | 0.2 | 15.24 | 1.24 | 6.2 |
| 3.1 | 0.1 | 14.61 | 0.61 | 6.1 |
| 3.01 | 0.01 | 14.0601 | 0.0601 | 6.01 |
| 3.001 | 0.001 | 14.006001 | 0.006001 | 6.001 |

مشاهده می شود

$$f'(3) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 6$$

حالا سعی می کنیم به کمک روشهای حد گیری ، مشتق بالا را محاسبه کنیم

مثال 1 : مشتق تابع $f(x)=x^2+5$ در نقطه $x=3$ را ، در صورت وجود به دست آورید.



حل

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+5-14}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{0}{0}$$ (مبهم)

$$\to \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6\to f'(3)=6$$

به همین ترتیب می توان مشتق تابع را در $x=-4$ محاسبه کرد

$$f'(-4)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(-4)}{x+4}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+5-21}{x+4}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-16}{x+4}=\frac{0}{0}$$ (مبهم)

$$\to \lim_{x\to 3}\frac{(x-4)(x+4)}{(x+4)}=\lim_{x\to 3}(x-4)=-8\to f'(-4)=-8$$

## محاسبه مشتق تابع در حالت کلی: به کمک تعریف زیر مشتق یا تابع در حالت کلی محاسبه می شود.



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

بنا براین برای مثال بالا می توان نوشت

## مثال:

اگر $f(x) = x^2 + 5$ ابتدا $f'(x)$ را با تعریف مشتق بیابید.

$$\frac{+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 + 5 - (x^2+5)}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x \times \Delta x + (\Delta x)^2 + 5 - x^2 - 5}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \times \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x \qquad \Rightarrow f'(x) = 2x$$

تذکر : مشتق تابع $y = f(x)$ را با نمادهای زیر نشان می دهند

$$y = f(x) \quad \rightarrow \quad y' = f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

بنابراین برای مثال بالا داریم

$$f(x) = x^2 + 5 \quad \rightarrow \quad y' = f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d(x^2+5)}{dx} = 2x$$

مثال 2 : مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ در نقطه $x=4$ را با تعریف مشتق به دست آورید.

حل

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\frac{0}{0}$$

$$\to f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\times\frac{\sqrt{x}+2}{x+2}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}\to f'(4)=\frac{1}{4}$$

با بکار بردن فرمول تعریف مشتق برای توابع شناخته شده ، فرمول های مشتق بدست می آیند.

$$y = c \quad \to \quad y' = 0$$

$$y = x \quad \to \quad y' = 1$$

$$y = x^2 \quad \to \quad y' = 2x$$

$$y = x^3 \quad \to \quad y' = 3x^2$$

تمام فرمول های بالا ، از فرمول اصلی زیر پیروی می کنند. بررسی کنید

$$y = x^n \quad \Rightarrow \quad y' = nx^{n-1}$$

فرمول بالا ساده ترین و در عین حال پرکاربردترین فرمول مشتق است.

با بکار بردن فرمول تعریف مشتق برای توابع
شناخته شده ، فرمول های مشتق بدست می آیند.

$$y = c \quad \to \quad y' = 0$$

$$y = x^n \quad \to \quad y' = nx^{n-1}$$

$$y = \sqrt{x} \quad \to \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y = \sin x \quad \to \quad y' = \cos x$$

$$y = \cos x \quad \to \quad y' = -\sin x$$

$$y = \tan x \quad \to \quad y' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$y = \cot x \quad \to \quad y' = -(1 + \cot^2 x) = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$y = e^x \quad \to \quad y' = e^x, \qquad y = a^x \quad \to \quad y' = \ln a \times a^x$$

$$y = \ln x \quad \to \quad y' = \frac{1}{x}, \qquad y = \log_a x \quad \to \quad y' = \frac{1}{x \times \ln a}$$

$$y = \arcsin x \quad \to \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = \arccos x \quad \to \quad y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = \arctan x \quad \to \quad y' = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$y = \operatorname{arccot} x \quad \to \quad y' = \frac{-1}{1 + x^2}$$

| مشتق توابع معروف (Known functions Derivative) | |
|---|---|
| $\frac{d}{dx}(x) = 1$ | $\frac{d}{dx}(sec\, x) = sec\, x\ \ tan\, x$ |
| $\frac{d}{dx}(sin\, x) = cos\, x$ | $\frac{d}{dx}(csc\, x) = -csc\, x\ \ cot\, x$ |
| $\frac{d}{dx}(cos\, x) = -sin\, x$ | $\frac{d}{dx}(cot\, x) = -\, csc^2\, x$ |
| $\frac{d}{dx}(tan\, x) = sec^2\, x$ | $\frac{d}{dx}(sin^{-1}\, x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\frac{d}{dx}(cos^{-1}\, x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x ln(a)$ |
| $\frac{d}{dx}(tan^{-1}\, x) = \frac{1}{1+x^2}$ | $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ |
| $\frac{d}{dx}(log_a(x)) = \frac{1}{x\, ln(a)}$ آن‌گاه $x > 0$ اگر | $\frac{d}{dx}(ln(x)) = \frac{1}{x}$ آن‌گاه $x > 0$ اگر |

## قواعد مشتق گیری رو توابع

| | |
|---|---|
| $(cf)' = cf'(x)$ | |
| $(f \pm g)' = f'(x) \pm g'(x)$ | |
| $(fg)' = f'g + g'(x)f$ | قانون ضرب |
| $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ | قانون تقسیم |

$$y = -\frac{7}{2}x^4 \rightarrow y' = -\frac{7}{2} \times 4x^3 = -14x^3$$

$$y = -x^5 + 3x - 9 \rightarrow y' = -5x^4 + 3 - 0$$

$$y = (2x^2 - 6)(4\sqrt{x} - 5x) \rightarrow y' = 4x(4\sqrt{x} - 5x) + (4\frac{1}{2\sqrt{x}} - 5)(2x^2 - 6)$$

$$y = \frac{3e^x + 2x^7}{-2 + \sin x} \rightarrow y' = \frac{(3e^x + 14x^6)(-2 + \sin x) - \cos x(3e^x + 2x^7)}{(-2 + \sin x)^2}$$

تمرین: با توجه به مشتق توابع سینوس و کسینوس مشتق تابع تانژانت و کتانژانت  را بیابید

$$y=\sin x \quad \to \quad y'=\cos x$$

$$y=\cos x \quad \to \quad y'=-\sin x$$

$$y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \quad \to \quad y'=\frac{\cos x\times\cos x-(-\sin x)\times\sin x}{\cos^2 x}$$

$$y'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y'=\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$$

## مشتق زنجیره‌ای:

هر گاه $y$ تابعی از $u$ مانند: $y=f(u)$ و $u$ تابعی از پارامتری دیگر مانند $x$ مانند: $u=g(x)$ باشد، برای محاسبه مشتق $y$ برحسب $x$ باید از مشتق زنجیره‌ای به فرم زیر کمک گرفت:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

یعنی به جای مشتق گرفتن از $y$ نسبت به $x$ کافیست از $y$ نسبت به $u$ مشتق گرفته و سپس از $u$ نسبت به $x$ مشتق بگیریم و این دو عبارت را در هم ضرب کنیم زیرا $du$ در صورت و مخرج می‌تواند ساده شود و فقط $\frac{dy}{dx}$ باقی می‌ماند.

مشتق قاعده زنجیره ای را می توان به صورت های زیر نیز بیان کرد

$$y'_x = y'_u \times u'_x$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \times g'(x)$$

مثال: مشتق تابع $y=(5x^3-2x-7)^4$ را محاسبه کنید.

فرض می کنیم $u=5x^3-2x-7$ در اینصورت $y=u^4$ ، بنابراین بنا به قاعده زنجیره ای داریم

$$y=u^4 \quad \to \quad y'_u=4u^3$$

$$u=5x^3-2x-7 \quad \to \quad u'=15x^2-2$$

$$y'_x=y'_u\times u'_x=4u^3\times u'_x=4(5x^3-2x-7)^3\times(15x^2-2)$$

**نتیجه مهم :** رابطه $\boxed{y'_x=y'_u\times u'_x}$ نشان می دهد که اگر مشتق تابعی را برای $x$ بدانیم و بخواهیم مشتق تابع را برای $u$ بنویسیم ، کافیست در فرمول مشتق به جای $x$ عبارت $u$ را بگذاریم و حاصل را در $u'$ ضرب کنیم .

$$y=x^n \quad \to \quad y'=nx^{n-1} \quad \Rightarrow \quad y=u^n \quad \Rightarrow \quad y'=nu^{n-1}\times u'=nu'u^{n-1}$$

$$y=(5x^3-2x-7)^4=u^4 \quad \to \quad y'=4u'u^3=4(15x^2-2)(5x^3-2x-7)^3$$

مثال: اگر $y = x^2 + Lnx$ و $x = 2\sin 4t$ باشد مشتق $y$ برحسب $t$ را بیابید.

حل: در این مثال مشتق $y$ برحسب $t$ خواسته شده است ولی ما $y$ را بر حسب $x$ و $x$ را بر حسب $t$ داریم، پس به کمک رابطه مشتق زنجیره ای می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} = \left(2x + \frac{1}{x}\right) \times (8\cos 4t)$$

در نهایت معادل $x$ را بر حسب $t$ جایگذاری می‌کنیم زیرا در صورت سوال، مشتق $y$ برحسب $t$ را خواسته پس باید جواب نهایی کلاً بر حسب $t$ باشد:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \times \frac{dx}{dt} = \left(2x + \frac{1}{x}\right) \times (8\cos 4t) = \left(4\sin 4t + \frac{1}{2\sin 4t}\right) \times (8\cos 4t)$$

| | | |
|---|---|---|
| $y = au^m$ | $y' = m.a.u'.u^{m-1}$ | $y = 5\sin^4 x \Rightarrow y' = 4\times 5\times \cos x\times \sin^3 x$ |
| $y = \sqrt{u}$ | $y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $y = \sqrt[m]{n^n}$ | $y' = \dfrac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$ | $y = \sqrt[5]{x^3} \Rightarrow y' = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$ |
| $y = \|u\|$ | $y' = \dfrac{u'.u}{\|u\|}$ | $y = \|x^2 + x\| \Rightarrow y' = \dfrac{(2x+1)(x^2+x)}{\|x^2+x\|}$ |
| $y = a\sin u$ | $y' = au'\cos u$ | $y = -3\sin(2x^3+5) \Rightarrow y' = (-3)(6x^2)\cos(2y^3+5) = -18x^2\cos(2x^3+5)$ |
| $y = a\cos u$ | $y' = -au'\sin u$ | $y = 3\cos(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = -(3)(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}).\sin\sqrt{x}$ |
| $y = a\tan u$ | $y' = au'(1+\tan^2 u)$ | $y = 3\tan(\cos) \Rightarrow y' = 3(-\sin x)(1+\tan^2(\cos x))$ |
| $y = a\cot u$ | $y' = -au'(1+\cot^2 u)$ | $y = 5\cot x \Rightarrow y' = -5(1+\cot^2 x)$ |

$$y = e^{u} \quad \rightarrow \quad y' = u'\, e^{u} \qquad y = e^{3x-x^2} \quad \rightarrow y' = u'\, e^{u} = (3-2x)\, e^{3x-x^2}$$

$$y = \ln u \quad \rightarrow \quad y' = \frac{u'}{u} \quad , \quad y = \ln(\sqrt{x} + \cos x) \quad \rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x}{\sqrt{x} + \cos x}$$

$$(\mathrm{Sin}^{-١}\, \mathrm{u})' = (\mathrm{Arc\ Sin\, u})' = \frac{\mathrm{u}'}{\sqrt{١-\mathrm{u}^{٢}}}$$

$$(\mathrm{Cos}^{-١}\, \mathrm{u})' = (\mathrm{Arc\ Cos\, u})' = \frac{-\mathrm{u}'}{\sqrt{١-\mathrm{u}^{٢}}}$$

$$(\mathrm{tg}^{-١}\, \mathrm{u})' = (\mathrm{Arc\ tg\, u})' = \frac{\mathrm{u}'}{١+\mathrm{u}^{٢}}$$

$$(\mathrm{Cotg}^{-١}\, \mathrm{u})' = (\mathrm{Arc\ Cotg\, u})' = \frac{-\mathrm{u}'}{١+\mathrm{u}^{٢}}$$

**تمرین:** مشتق توابع زیر را که کاربرد زیادی دارند محاسبه کنید

$$y = e^{ax} \quad \rightarrow \quad y = e^{u} \quad , y' = u' \, e^{u} = a \, e^{ax}$$

$$y = \sin ax \quad \rightarrow$$

$$y = \cos ax \quad \rightarrow$$

$$y = \tan ax \quad \rightarrow$$

# مشتق توابع

1) $y = x^2 + 3x - 2$

---

حل

$$y = x^n \longrightarrow y' = nx^{n-1}$$

$$y' = 2x + 3$$

2) $y=(3x^3+7x^2+4)^9$

حل

$$y=u^n \longrightarrow y'=nu'u^{n-1}$$

$$y'=9(3x^3+7x^2+4)'(3x^3+7x^2+4)^8$$

$$y'=9(9x^2+14x)(3x^3+7x^2+4)^8$$

**3)** $y = \sin^2 x$

---

**حل**

$$y = u^n \longrightarrow y' = n u' u^{n-1}$$

$$y' = 2\sin x\,(\sin x)'$$

$$y' = 2\sin x\cos x$$

4) $y = \dfrac{x^2+5}{2x-1}$

حل

$$y = \frac{u}{v} \longrightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$y' = \frac{2x(2x-1) - 2(x^2+5)}{(2x-1)^2}$$

**5)** $y = (x^2 + 4)\cos x$

---

**حل**

$$y = u \times v \longrightarrow y' = u'v + v'u$$

$$y' = 2x\cos x + (x^2 + 4)(-\sin x)$$

6) $y=\sqrt{5x^2-3x}$

حل

$$y=\sqrt{u} \longrightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$y'=\frac{(5x^2-3x)'}{2\sqrt{5x^2-3x}} \longrightarrow y'=\frac{10x-3}{2\sqrt{5x^2-3x}}$$

**7)** $y = e^{x^3} + \ln x$

---

حل

$$y = e^u \longrightarrow y' = u' e^u$$

$$y = \ln x \longrightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y' = 3x^2 e^{x^3} + \frac{1}{x}$$

**8)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

حل

$$y = \frac{u}{v} \longrightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$y' = \frac{0 - (\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} \longrightarrow y' = \frac{-\frac{\sqrt{x}}{2}}{x} \longrightarrow y' = \frac{-1}{2x\sqrt{x}}$$

**9)** $y = Arc\sin x^3$

---

**حل**

$$y = Arc\sin u \longrightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y' = \frac{(x^3)'}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \longrightarrow y' = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$$

**10)** $y = \log_4 \sqrt{x}$

---

حل

$$\log_a u = \frac{\ln u}{\ln a}$$

$$y = u \times v \longrightarrow y' = u'v + v'u$$

$$y = \frac{\ln\sqrt{x}}{\ln 4} = \frac{1}{\ln 4} \times \ln\sqrt{x} \longrightarrow y' = \frac{1}{\ln 4}(\ln\sqrt{x}) \longrightarrow y' = \frac{1}{\ln 4} \times \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{1}{\ln 4} \times \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \longrightarrow y' = \frac{1}{\ln 4} \times \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x})} \longrightarrow y' = \frac{1}{\ln 4(2x)}$$

11) $\mathbf{y = \sqrt[5]{(x+5)^2}}$

حل

$$y = \sqrt[n]{u^m} \longrightarrow y' = \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

$$y' = \frac{2}{5\sqrt[5]{(x+5)^3}}$$

**12)** $y=\sqrt{\tan\sqrt{x}}$

---

**حل**

$$y=\sqrt{u} \longrightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$y=\tan u \longrightarrow y'=u'(1+\tan^2 u)$$

$$y'=\frac{(\tan\sqrt{x})'}{2\sqrt{\tan\sqrt{x}}} \longrightarrow y'=\frac{(\sqrt{x})'(1+\tan^2\sqrt{x})}{2\sqrt{\tan\sqrt{x}}} \longrightarrow y'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\tan^2\sqrt{x})}{2\sqrt{\tan\sqrt{x}}}$$

**13)** $y = \sqrt{\tan x} + \cot g\, x^2$

حل

$y = \sqrt{u} \longrightarrow y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$y = \cot g\, u \longrightarrow y' = -u'(1 + \cot g^2 u)$

$$y' = \frac{(\tan x)'}{2\sqrt{\tan x}} + (-2x)(1 + \cot g^2 x^2)$$

$$y' = \frac{\sec^2 x}{2\sqrt{\tan x}} - 2x(1 + \cot g^2 x^2)$$

**14)** $y = \tan^3 \sqrt{x}$

---

**حل**

$$y = u^n \longrightarrow y' = n u' u^{n-1}$$

$$y' = 3\tan^2 \sqrt{x}\,(\tan \sqrt{x})'$$

$$y' = (3\tan^2 \sqrt{x})(\sqrt{x})'(1+\tan^2 \sqrt{x})$$

$$y' = (3\tan^2 \sqrt{x})(\frac{1}{2\sqrt{x}})(1+\tan^2 \sqrt{x})$$

**15)** $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\ln x}$

حل

$$y=\frac{u}{v} \longrightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$$y'=\frac{(\sqrt{x+1})'\ln x-(\ln x)'\sqrt{x+1}}{(\ln x)^2} \longrightarrow y'=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}\ln x-\dfrac{1}{x}\sqrt{x+1}}{(\ln x)^2}$$

**16)** $y = \tan(\frac{1}{x})$

حل

$$y = \tan u \longrightarrow y' = u'(1+\tan^2 u)$$

$$y' = (\frac{1}{x})'(1+\tan^2 \frac{1}{x}) \longrightarrow y' = \frac{1}{x^2}(1+\tan^2 \frac{1}{x})$$

**17)** $y = x\sqrt{2x+1}$

---

**حل**

$y = u \times v \longrightarrow y' = u'v + v'u$

$$y' = \sqrt{2x+1} + x(\sqrt{2x+1})'$$

$$y' = \sqrt{2x+1} + x\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}$$

$$y' = \sqrt{2x+1} + \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$$

**18)** $y = Arc\cos(\ln x)$

حل

$$y = Arc\cos u \longrightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y' = \frac{-(\ln x)'}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} \longrightarrow y' = \frac{-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-(\ln x)^2}} \longrightarrow y' = \frac{-1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$$

**19)** $y = 5^{\arctan x}$

---

**حل**

$$y = a^u \longrightarrow y' = (\ln a)u'a^u$$

$$y' = (Arc\tan x)' 5^{Arc\tan x} \ln 5$$

$$y' = \frac{5^{Arc\tan}}{1+x^2} \ln 5$$

**20)** $y = \log \ln x$

حل

$$\log_a u = \frac{\ln u}{\ln a}$$

$$y = \ln u \longrightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$y = \frac{\ln(\ln x)}{\ln 10} \longrightarrow y = \frac{1}{\ln 10} \times \ln(\ln x)$$

$$y' = \frac{(\ln x)'}{\ln x \ln 10} \longrightarrow y' = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x \ln 10} \longrightarrow y' = \frac{1}{x \ln x \ln 10}$$

**21)** $y = \sqrt[3]{\tan^2(\ln x)}$

حل

$$y = \sqrt[n]{u^m} \longrightarrow y' = \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

$$y' = \frac{2(\tan^2 \ln x)'}{3\sqrt[3]{\tan(\ln x)}} \longrightarrow y' = \frac{2(2)(\tan\ln x)'(\tan\ln x)}{3\sqrt[3]{\tan(\ln x)}}$$

$$y' = \frac{4(\ln x)'(1+\tan^2\ln x)(\tan\ln x)}{3\sqrt[3]{\tan(\ln x)}} \longrightarrow y' = \frac{4(\frac{1}{x})(1+\tan^2\ln x)(\tan\ln x)}{3\sqrt[3]{\tan(\ln x)}}$$

22) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}$



حل

$$y=\frac{u}{v} \longrightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$$y'=\frac{0\times\sqrt{\sin\frac{1}{x}}-1\times(\sqrt{\sin\frac{1}{x}})'}{(\sqrt{\sin\frac{1}{x}})^2} \longrightarrow y'=\frac{0-\dfrac{(\sin\frac{1}{x})'}{2\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}}{\sin\frac{1}{x}}$$

$$\longrightarrow y'=\frac{\dfrac{(\frac{1}{x})'\cos\frac{1}{x}}{2\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}}{\sin\frac{1}{x}} \longrightarrow y'=\frac{\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}{2\sin\frac{1}{x}\sqrt{\sin\frac{1}{x}}}$$

**23)** $y = x\sqrt{e^{x}\cos x}$

---

حل

$y = u \times v \longrightarrow y' = u'v + v'u$

$$y' = \sqrt{e^{x}\cos x} + x\left(\sqrt{e^{x}\cos x}\right)'$$

$$y' = \sqrt{e^{x}\cos x} + x\,\frac{(e^{x}\cos x)'}{2\sqrt{e^{x}\cos x}}$$

$$y' = \sqrt{e^{x}\cos x} + x\,\frac{e^{x}\cos x - e^{x}\sin x}{2\sqrt{e^{x}\cos x}}$$

**24)** $y=\ln(Arc\sin\sqrt{x})$

---

حل

$$y=\ln u \longrightarrow y'=\frac{u'}{u}$$

$$y'=\frac{(Arc\sin\sqrt{x})'}{Arc\sin\sqrt{x}} \longrightarrow y'=\frac{\frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}}{Arc\sin\sqrt{x}}$$

$$\longrightarrow y'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(Arc\sin\sqrt{x})(\sqrt{1-x})}$$

# 5-6 مشتق مرتبه های بالاتر

1-6-5 تعریف :

فرض می کنیم تابع $y=f(x)$ در نقطه $a$ مشتق پذیر باشد. $f'(a)$ را مـــشتق اول تابع $f$ در نقطه $a$ می نامیم .

فرض می کنیم $A=\{x \mid f'(x) \text{ وجوددارد}\}$ در ایــن صورت $f'$ تابعی روی $A$ است و می توانیم درمورد مشتق $f'$ در نقطه $a\in A$ صـحبت کنیم . مشتق درنقطه $a$ را مشتق دوم $f$ در نقطه $a$ می نامیم وبا $f''(a)$ یا $f^{(2)}(a)$ نشان می دهیم. به همین ترتیب مشتقهای مرتبه های بالاتر در نقطه $a$ را درصورتی که وجود داشته باشند با $f^{(3)}(a)$ ، $f^{(4)}(a)$ ، ... و $f^{(n)}(a)$ نشان می دهیم و آنها را بـه ترتیب مشتق های مرتبه سوم ، چهارم ، ... و $n$ ام تابع در نقطه $a$ می گوییم .

بنابراین برای هر عدد طبیعی $n$، اگر مشتق اول تابع $f^{(n-1)}(x)$ وجود داشته باشد آن رامشتق $n$ ام تابع $f$ می نامیم و با نماد $f^{(n)}(a)$ نشان می دهیم .

## 2-6-5 نماد گذاری :

الف) گاهی $f'$ را با $f^1$ و $f$ را با $f^{(0)}$ نشان می دهند .

ب) همان طور که $f'$ را با نماد $\frac{df}{dx}$ نشان می دادیم ، $f''$ را که برابر $\frac{d}{dx}(\frac{df}{dx})$ است با $\frac{d^2f}{dx^2}$ نشان می دهیم . به همین ترتیب $f^{(n)}$ را با نماد $\frac{d^nf}{dx^n}$ زیر می توان نشان داد .

پ) همچنان که $f'$ را با $D_xf$ نشان می دادیم ، $f^{(2)}$، $f^{(3)}$، …، و $f^{(n)}$ را می توان به ترتیب با نمادهای $D_x^2 f$ , $D_x^3 f$ ,…, $D_x^n f$ نشان داد .

مثال: مشتق ششم تابع $y = 2x^5 + 3$ را بیابید.

$$y = 2x^5 + 3$$

$$y' = 10x^4 + 0$$

$$y'' = 40x^3$$

$$y^{(3)} = 120x^2$$

$$y^{(4)} = 240x$$

$$y^{(5)} = 240$$

$$y^{(6)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad y^{(7)} = y^{(8)} = \ldots = 0$$

**۳.۷.۵ مثال.** فرض کنیم $y=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$ ، می‌خـواهیم مـشتقات مرتبـه اول و دوم و سوم این تابع را محاسبه کنیم داریم:

$$y=(x-1)^{-1}+(x+1)^{-1}$$

$$y'=-(x-1)^{-2}+(-1)(x+1)^{-2}=\frac{-1}{(x-1)^{2}}-\frac{1}{(x+1)^{2}}$$

$$y''=2(x-1)^{-3}+2(x+1)^{-3}=\frac{2}{(x-1)^{3}}+\frac{2}{(x+1)^{3}}$$

$$y'''=-6(x-1)^{-4}-6(x+1)^{-4}=\frac{-6}{(x-1)^{4}}-\frac{6}{(x+1)^{4}}$$

## 3-6-5 مثال :

مشتق های اول تا سوم تابع $f(x)=e^{5x^2+3}+\sin(2x+1)$ را محاسبه کنید .

## حل :

$$f'(x)=10x\,e^{5x^2+3}+2\cos(2x+1)$$

$$f''(x)=(f'(x))'=10\,e^{5x^2+3}+10\,x\,(10x)\,e^{5x^2+3}-2(2)\sin(2x+1)$$

$$=100\,e^{5x^2+3}+100\,x^2e^{5x^2+3}-4\sin(2x+1)$$

$$f^{(3)}(x)=(f''(x))'$$

$$=10\,(10x)e^{5x^2+3}+100\,(2x)e^{5x^2+3}+100\,x^2(10x)e^{5x^2+3}-4(2)\cos(2x+1)$$

$$=10\,xe^{5x^2+3}(3+10x^2)-8\cos(2x+1)$$

**۸.۸.۵ تعریف.** فرض کنیم f و g توابعی حقیقی از متغیـر مستقل t باشند اگـر قلمـرو مشترک f و g را I بنامیم، معادلات

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in I$$

را معادلات پارامتری منحنی (c) می‌نامند.

منحنی c را پیوسته می نامیم هرگاه f و g روی I پیوسته باشند.

**۹.۸.۵** فرض کنیم f و g توابعی مشتق پذیـر باشنـد کـه در مفروضـات ۸.۸.۵ صـدق می‌کنند داریم: $dx = f'(t)dt$ و $dy = g'(t)dt$، از تقسیم رابطهٔ دومی بر اولی با شـرط $dx \neq 0$ به دست می‌آید $\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)dt}{f'(t)dt}$ یا $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$.

**۱۰.۸.۵ مثال.** فرض کنیم معادلات پارامتری یک منحنی به صورت

$$\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t} \\ y = t + 1 \end{cases}$$

باشند، داریم: $dy = 1dt$ و $dx = (1 - \dfrac{1}{t^2})dt$.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1dt}{(1 - \frac{1}{t^2})dt} = \frac{t^2}{t^2 - 1}$$

برای محاسبهٔ مشتق دوم داریم:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{t^2}{t^2 - 1})}{1 - \frac{1}{t^2}} = \frac{\frac{2t(t^2 - 1) - 2t(t^2)}{(t^2 - 1)^2}}{1 - \frac{1}{t^2}} = \frac{\frac{-2t}{(t^2 - 1)^2}}{\frac{t^2 - 1}{t^2}} = \frac{-2t^3}{(t-1)^3}$$

مثال: اگر $y = 3t^2 + t - 4$ و $x = 2\sin 5t - 5Ln\left(t^2+1\right)$ باشد، مشتق $y$ برحسب $x$ را بیابید.

حل: در این مثال با وجود اینکه $y$ و $x$ بر حسب $t$ هستند ولی مشتق $y$ بر حسب $x$ خواسته شده است. پس طبق قاعده مشتق‌گیری از توابع پارامتری داریم:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6t+1}{10\cos 5t - 5\times\frac{2t}{t^2+1}}$$

**مثال: اگر** $z = 4\cos x - e^{-2x}$ **و** $y = -4x^3 + \frac{3}{x}$ **باشد، مشتق** $z$ **برحسب** $y$ **را بیابید.**

حل: مشابه حل مثال بالا عمل می‌کنیم ولی در این مثال باید صورت و مخرج را بر $dx$ تقسیم می‌کنیم تا به جواب برسیم:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\frac{dz}{dx}}{\frac{dy}{dx}} = \frac{-4\sin x+2e^{-2x}}{-12x^{12}-\frac{3}{x^2}}$$

مشتق ضمنی:

اگر $y$ به صورت صریح بر حسب $x$ (مانند $y=f\left(x\right)$ ) داده نشده باشد و یک فرمول کلی شامل $x$ و $y$ مانند $F\left(x,y\right)=0$ داده شده باشد (مانند: $2xy^2+y^3+3y\sin x-9e^{2x}=0$ ) برای محاسبه مشتق $y$ بر حسب $x$ باید از قاعده مشتق ضمنی استفاده کنیم.

روش اول: در این روش ابتدا تمام عبارات را به سمت چپ منتقل می کنیم تا به فرم $F\left(x,y\right)=0$ برسیم. سپس از قاعده $y'=-\frac{F'_x}{F'_y}$ مشتق $y$ بر حسب $x$ را می‌یابیم. در این رابطه $F'_x$ یعنی مشتق $F\left(x,y\right)$ بر حسب $x$ وقتی $y$ ثابت فرض شود (مانند یک عدد) و $F'_y$ یعنی مشتق $F\left(x,y\right)$ بر حسب $y$ وقتی $x$ ثابت فرض شود.

مثال: اگر داشته باشیم $x^4y^3+4y=5y^2x^3+3xy-7$ ، مشتق $y$ بر حسب $x$ را به کمک مشتق ضمنی بیابید.

حل: ابتدا تمام عبارات را به سمت چپ منتقل می‌کنیم، سپس از رابطه مشتقگیری ضمنی استفاده می‌کنیم:

$$x^4y^3+4y=5y^2x^3+3xy-7 \Rightarrow x^4y^3+4y-5y^2x^3-3xy+7=0$$

$$y'=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{4x^3y^3-15y^2x^2-3y}{3x^4y^2+4-10yx^3-3x}$$

روش دوم: در این روش نیازی نیست در ابتدا تمام عبارات به یک سمت منتقل شوند و میتوان از عبارت داده شده به همان شکل مشتق گرفت. کافی است $y$ را تابعی بر حسب $x$ در نظر گرفته (مشابه $u$ در فرمول‌های مشتق‌گیری) و از کل عبارت مشتق بگیریم و برای مشتق $y$ از $y'$ استفاده می‌کنیم. در نهایت عبارات شامل $y'$ را به سمت چپ تساوی و عبارات دیگر را به سمت راست منتقل کرده و با فاکتور گرفتن از $y'$ و انتقال ضرایب به سمت چپ، رابطه مشتق را بر حسب $x$ و $y$ را می‌یابیم.

$$۱)\ x^{۲} + y^{۲} = ۴ \rightarrow ۲x + ۲yy' = ۰ \rightarrow ۲yy' = -۲x \rightarrow y' = -\frac{x}{y}$$

$$۲)\ x^{۲}y^{۳} = ۴x \rightarrow ۲xy^{۳} + x^{۲}(۳y'y^{۲}) = ۴ \rightarrow y' = \frac{۴-۲xy^{۳}}{۳x^{۲}y^{۲}}$$

$$۳)\ y - \sin(۲x + y^{۲}) = ۵ \rightarrow y' - (۲ + ۲y'y)\cos(۲x + y^{۲}) = ۰$$

$$\rightarrow y' - ۲yy'\cos(۲x + y^{۲}) = ۲\cos(۲x + y^{۲}) \rightarrow y' = \frac{۲\cos(۲x+y^{۲})}{۱-۲y\cos(۲x+y^{۲})}$$

**۷.۳.۵ مثال.** تابع $y=f(x)$ به طور ضمنی به وسیله $x^۴+y^۴=x^۲y^۲$ داده شده است. $f'(x)$ را حساب کنید.

$$f'_x=۴x^۳+۰-۲xy^۲$$

$$f'_y=۰+۴y^۳-۲yx^۲$$

$$f'(x)=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{۴x^۳-۲xy^۲}{۴y^۳-۲yx^۲}=\frac{۴x^۳-۲xy^۲}{۲yx^۲-۴y^۳}$$

توجه کنید که مشتق این تابع را می‌توان به طریق دیگری نیز حساب کرد:

از طرفین $x^۴+y^۴=x^۲y^۲$ مشتق می‌گیریم. $۴x^۳+۴y'y^۳=۲xy^۲+۲y'yx^۲$

و یا $y'=\dfrac{۴x^۳-۲xy^۲}{۲yx^۲-۴y^۳}$

مثال: مشتق  تابع ۰=y -x siny +۱ را به دست آورید:

$$f(x,y)=y-x\sin y+1=0$$

$$y'_x=-\frac{f'_x}{f'_y} \qquad =-\frac{-\sin y}{1-x\cos y}$$

$$=\frac{\sin y}{1-x\cos y}$$

تمرین: اگر داشته باشیم $e^{2x+3y}=x^2-Ln\left(xy^3\right)$ ، مشتق $y$ بر حسب $x$ را بیابید.

**۸.۳.۵ تمرین.** در هر یک از تمرین‌های زیر تابع $y=f(x)$ به طور ضمنی به وسیله معادله‌ای تعریف شده است $y'$ را حساب کنید.

۱. $5x^2y^3+xy-2x+2y=6$.

۲. $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=1$.

**۱۹.۵.۵ مشتق تابع $y = u^v$.** فرض کنیم $y = u(x)^{V(x)}$ ، از دو طرف لگاریتم نپرین می‌گیریم. داریم: $Ly = V(x)\,Lu(x)$ . مشتق دو طرف را محاسبه می‌کنیم

$$\frac{y'}{y} = V'(x)\,Lu(x) + \frac{u'(x)}{u(x)}V(x)$$

و یا $y' = u(x)^{V(x)}\left[V'(x)\,Lu(x) + \frac{u'(x)}{u(x)}V(x)\right]$.

**۲۰.۵.۵ مثال.** برای محاسبه مشتق $y = (x^۲ + x)^{۳x}$ از دو طرف لگاریتم نپرین می‌گیریم:

$$Ly = ۳x\,L(x^۲ + x)$$

مشتق دو طرف را حساب می‌کنیم

$$\frac{y'}{y} = ۳\,L(x^۲ + x) + \left(\frac{۲x + ۱}{x^۲ + x} \times ۳x\right)$$

$$y' = (x^۲ + x)^{۳x}\left[۳\,L(x^۲ + x) + \left(\frac{۳x(۲x + ۱)}{x^۲ + x}\right)\right]$$