فصل چهارم : کاربرد مشتقات جزئی

۱) کاربرد اول : خطا یا دیفرانسیل کل

اگر $f(x,y,z)$ یک تابع باشد (به طور مشابه $f(x,y)$) در این صورت خطا یا دیفرانسیل کل تابع f در نقطه P برابر است.

$$\underbrace{df}_{\text{خطا یا دیفرانسیل کل در نقطه } P} \cong \frac{\partial f}{\partial x}(p)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p)\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}(p)\,dz = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz$$

برای تابع $f(x,y)$ قسمت $f_z\,dz$ را ندارد. dx و dy و dz خطای x و y و z اند.

خطای f در نقطه P یعنی اختلاف مقدار تابع f در نقطه P و مقدار تابع f در نقطه $P+(dx,dy,dz)$

مثال: در یک کارگاه قالب‌های چوبی مکعب مستطیل شکل به اضلاع ۲، ۳ و ۴ سانتی‌متر ساخته می‌شود. اگر خطای دستگاه اندازه‌گیری اضلاع قالب (۰٫۰۱ ±) سانتی‌متر باشد. الف) خطای کل منتشر شده در حجم قالب‌ها چقدر است؟ ب) اگر حداکثر خطای مجاز (تلرانس) حجم (۰٫۰۳ ±) سانتی‌متر مکعب از طرف دایره کنترل کیفی تعیین شده باشد آیا قالب‌های تولیدی سالم هستند یا معیوب؟

حل: الف) برای یک قالب مکعب مستطیل شکل به اضلاع x و y و z تابع حجم برابر است با:

$$\text{تابع حجم} = f(x,y,z) = xyz$$

باید خطای حجم را در نقطه $P=(2,3,4)$ بدست آوریم وقتی x و y و z به اندازه (۰٫۰۱ ±) سانتی‌متر خطا دارند یعنی $\boxed{dx = dy = dz = \pm 0.01}$

$$f(x,y,z)=xyz \Rightarrow \begin{cases} f_x = yz \xrightarrow{P=(2,3,4)} 12 \\ f_y = xz \xrightarrow{P=(2,3,4)} 8 \\ f_z = xy \xrightarrow{P=(2,3,4)} 6 \end{cases}$$

خطای منتشر شده حجم در نقطه (۲,۳,۴) $= df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = 12(\pm 0.001) + 8(\pm 0.001) + 6(\pm 0.001)$

$$= \boxed{\pm 0.012 \pm 0.008 \pm 0.006}$$

توجه شود که لزومی ندارد هر سه عدد فوق همزمان مثبت و یا هر سه همزمان منفی باشد و می‌تواند بعضی مثبت و بعضی منفی باشد حداکثر می‌تواند مثلاً x و y زیادی اندازه‌گیری شوند و z کم اندازه‌گیری شود. پس

$dx = dy = +0.001$

$dz = -0.001$

ب) حداکثر خطا وقتی است که هر سه مثبت یا هر سه منفی باشند یعنی

$$df = +0.012 + 0.008 + 0.006 = +0.026$$

یا

$$df = -0.012 - 0.008 - 0.006 = -0.026$$

$\Rightarrow$ چون ۰/۰۲۶ از ۰/۰۳ کمتر است قالب‌ها سالم هستند.

کاربرد ② : تعیین اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x,y)$ (max و min نسبی)

تعریف : تابع $f(x,y)$ در نقطه (x_0,y_0) ، max (min) نسبی است اگر $f(x_0,y_0)$ از بقیه $f(x,y)$ ها در اطراف (x_0,y_0) بیشتر (کمتر) باشد

تعریف : نقاط بحرانی : نقاط بحرانی تابع $f(x,y)$ نقاطی هستند که در آن نقاط f_x و f_y همزمان با هم صفر شود یا حداقل یکی از f_x یا f_y موجود نباشد.

برای بدست آوردن نقاط بحرانی f کافی است دستگاه زیر را تشکیل دهیم و (x,y) را بدست آورید.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

روش یافتن max و min نسبی تابع $f(x,y)$:

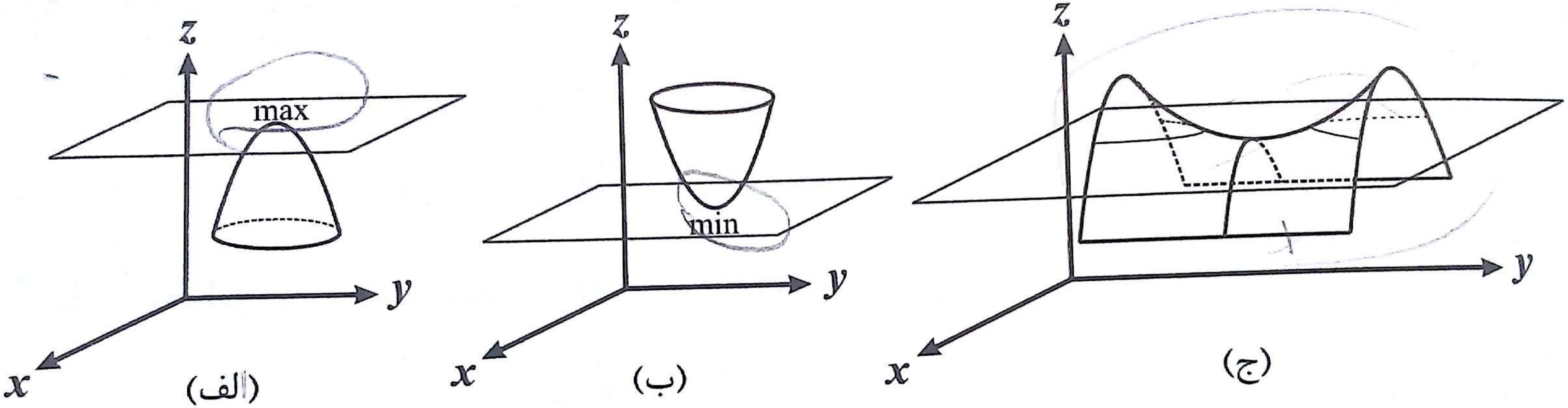
گام ① : ابتدا نقاط بحرانی f را می‌یابیم یعنی نقاطی که $\boxed{f_x = f_y = 0}$

گام ② عبارت $\Delta(x,y) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$ را بدست می‌آوریم.

گام ③ برای همه نقاط بحرانی گام ① مثل (x_0, y_0) جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

(x_0,y_0)	$\Delta(x_0,y_0)$	$f_{xx}(x_0,y_0)$
max نسبی	+	−
min نسبی	+	+
نه max و نه min بلکه زینی است.	−	هرعلامت

(x_0, y_0, z_0) با صفحه xy موازی می‌باشد. شکل (۳-۲)



شکل (۳-۲)

برای تعیین نوع نقطه بحرانی (x_0, y_0) فرض کنید

مثال: max و min نسبی تابع $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ را بیابید.

حل: گام ① ← نقاط بحرانی:

$$\begin{cases} ① \; f_x = 3x^2 - 3y = 0 \\ ② \; f_y = -3x + 3y^2 = 0 \end{cases} \longrightarrow 3x^2 = 3y \Longrightarrow \boxed{x^2 = y}$$

در معادله ② به جای y ، x^2 قرار می دهیم.

$$-3x + 3y^2 = 0 \xrightarrow{x^2 = y} -3x + 3x^4 = 0 \Longrightarrow 3x(-1 + x^3) = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3x = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 0} \\ -1 + x^3 = 0 \Longrightarrow x^3 = 1 \Longrightarrow \boxed{x = 1} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \xrightarrow{x^2 = y} y = 0 \\ x = 1 \xrightarrow{x^2 = y} y = 1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ نقاط بحرانی f $= (0,0)$ و $(1,1)$

گام ۲) تشکیل $\Delta(x,y) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^{۲}$

$f_x = ۳x^{۲} - ۳y \Longrightarrow \boxed{f_{xx} = ۶x}$

$f_y = -۳x + ۳y^{۲} \Longrightarrow \boxed{f_{yy} = ۶y}$ و $\boxed{f_{xy} = -۳}$

$$\Delta(x,y) = (۶x)(۶y) - (-۳)^{۲} = ۳۶xy - ۹$$

گام سوم:

$$\begin{cases} \Delta(۰,۰) = ۳۶ \times ۰ \times ۰ - ۹ = -۹ \\ f_{xx}(۰,۰) = ۶ \times ۰ = ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta(۱,۱) = ۳۶ - ۹ = ۲۷ \\ f_{xx}(۱,۱) = ۶ \end{cases}$$

(۰,۰)	$\Delta(۰,۰)$	$f_{xx}(۰,۰)$
زینی	−	
(۱,۱)	$\Delta(۱,۱)$	$f_{xx}(۱,۱)$
min نسبی	+	+

نقطه (۰,۰) زینی و نقطه (۱,۱) min نسبی است. مقدار min برابر $f(۱,۱) = ۱ - ۳ + ۱ = -۱$

مثال: فرض کنید که $f(x,y)=2x^4+y^2-x^2-2y$ ، max و min

نسبی f را بیابید.

حل: گام ① نقاط بحرانی

$f_x=8x^3-2x=0 \Rightarrow 2x(4x^2-1)=0$ ⟨ $\boxed{x=0}$ ، $4x^2-1=0$

$x^2=\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{x=\pm\frac{1}{2}}$

$f_y=2y-2=0 \Rightarrow \boxed{y=1}$

نقاط بحرانی عبارت اند از $\boxed{(0,1)}$ - $\boxed{(\frac{1}{2},1)}$ - $\boxed{(-\frac{1}{2},1)}$

گام دوم: تشکیل $\Delta(x,y)$:

$f_{xx}=24x^2-2$, $f_{yy}=2$ $f_{xy}=0$

$\Delta(x,y)=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=2(24x^2-2)-0=2(24x^2-2)$

$$f_{xx} = 24x^2 - 2 \qquad \Delta(x,y) = 2(24x^2 - 2)$$

$$\Delta(0,1) = -4$$

$$\begin{cases} \Delta(\tfrac{1}{2},1) = 8 \\ f_{xx}(\tfrac{1}{2},1) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta(-\tfrac{1}{2},1) = 8 \\ f_{xx}(-\tfrac{1}{2},1) = 4 \end{cases}$$

		$\Delta(x,y)$	$f_{xx}(x,y)$
زینی	$(0,1)$	$-$	
min	$(\frac{1}{2},1)$	$+$	$+$
min	$(-\frac{1}{2},1)$	$+$	$+$

$$f(x,y) = 2x^4 + y^2 - x^2 - 2y$$

مقدار min های نسبی

$$f(\tfrac{1}{2},1) = 2\times(\tfrac{1}{2})^4 + 1^2 - (\tfrac{1}{2})^2 - 2\times 1 = \frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{4} - 2 = -\frac{9}{8}$$

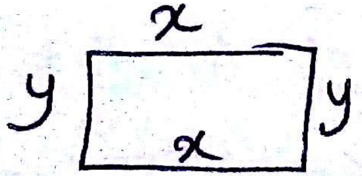
$$f(-\tfrac{1}{2},1) = 2\times(-\tfrac{1}{2})^4 + 1^2 - (-\tfrac{1}{2})^2 - 2\times 1 = \boxed{-\frac{9}{8}}$$

۳) max و min های نسبی مقید (تحت قید)

در قسمت قبل max و min نسبی تابع $f(x,y)$ را بدست آوردیم در آن جا x و y محدودیتی نداشتند و می‌توانستند هر مقداری باشند. اما گاهی مقادیر x و y محدود هستند و باید در شرایطی صدق کنند که به آن شرط قید گفته می‌شود و معمولاً با یک معادله به صورت $g(x,y)=0$ نشان داده می‌شود. برای روشن شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید.

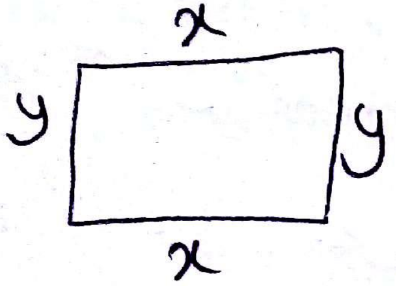
مثال: با یک طناب به طول ۱۸ متر، بزرگترین مستطیلی که می‌توان درست کرد چه مساحتی دارد؟

حل: طول و عرض مستطیل مجهول است آن را با x و y نشان می‌دهیم.



$\Rightarrow$ مساحت مستطیل $= xy = f(x,y)$

ما باید تابع $f(x,y)=xy$ را max کنیم. اما توجه شود که x و y هر عددی نمی توانند باشند چون طول طناب ۱۸ است پس محیط مستطیل ۱۸ است یعنی



$\Longrightarrow$ محیط $= 2x+2y=18 \xRightarrow{\div 2} \boxed{x+y=9}$

بنابراین باید max تابع $f(x,y)=xy$ را پیدا کنیم با توجه به این که باید شرط $x+y=9$ نیز برقرار باشد. یعنی فقط باید در بین x و y هایی که $x+y=9$ است تابع $f(x,y)=xy$ را max کنیم.

به $x+y=9$ قید یا شرط گفته می شود و معمولاً آن را با $g(x,y)=0$ نشان می دهیم

$$x+y=9 \Longrightarrow g = x+y-9 = 0$$

نکته: روشی که در زیر برای پیدا کردن min و max نسبی مقید گفته می‌شود به روش ضرایب لاگرانژ معروف است و برای تابع سه متغیره $f(x,y,z)$ و بیشتر نیز برقرار است و ما آن را برای سه متغیره می‌گوییم.

روش پیدا کردن max و min نسبی مقید:

می‌خواهیم max و min نسبی تابع $f(x,y,z)$ را تحت قید $g(x,y,z)=0$ حساب کنیم. ابتدا به کمک متغیر کمکی λ دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{cases} f_x=\lambda g_x \\ f_y=\lambda g_y \\ f_z=\lambda g_z \\ g(x,y,z)=0 \end{cases} \Longrightarrow$$

از این دستگاه x و y و z را بدست می‌آوریم و سپس نقاط بدست آمده را در f قرار می‌دهیم تا max و min بدست آید.

مثال: با یک طناب به طول ۱۸ متر، بزرگترین مستطیلی که می‌توان درست کرد چه مساحتی دارد؟

حل: طبق آن چه گفته شد باید تابع $f(x,y)=xy$ را تحت قید $x+y=9$ max کنیم.

$$x+y=9 \Longrightarrow \underbrace{x+y-9}_{g(x,y)}=0$$

$$\text{دستگاه}: \begin{cases} f_x=\lambda g_x \\ f_y=\lambda g_y \\ g(x,y)=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=\lambda\times 1 \Longrightarrow \boxed{y=\lambda} \\ x=\lambda\times 1 \Longrightarrow \boxed{x=\lambda} \\ x+y-9=0 \end{cases}$$

هر دو را در معادله سوم قرار می‌دهیم.

$$x+y-9=0 \xRightarrow{x=y=\lambda} \lambda+\lambda-9=0 \Longrightarrow 2\lambda=9 \Longrightarrow \boxed{\lambda=4.5}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=4.5 \\ y=4.5 \end{cases} \Longrightarrow (x,y)=(4.5,4.5) \Longrightarrow \max=f(4.5,4.5)=4.5\times 4.5=\boxed{20.25}$$