

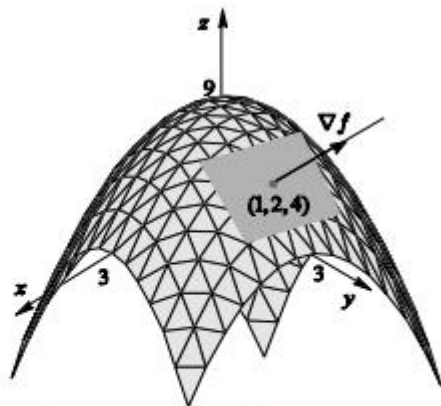


- ❖ معادله صفحه مماس و خط قایم بر رویه
- ❖ خط مماس بر فصل مشترک دو رویه
- ❖ مشتق سویی (جهتی)
- ❖ انتگرال های چند گانه
- ❖ حجم و انتگرال های دو گانه
- ❖ تعریف انتگرال های دو گانه
- ❖ انتگرال های دو گانه روی ناحیه نوع اول و دوم

معادلات صفحه مماس و خط قائم بر رویه زیر را در نقطه $p_0 = 1, 2, 4$ می یابیم.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0$$

حل : نمودار رویه فوق سهمی گون دایره ای است که در شکل (۴) نشان داده شده است. ابتدا بردار گرادیان را در نقطه P_0 می یابیم که عمود بر سهمی گون در نقطه فوق است.



شکل ۴- تعبیر هندسی صفحه مماس و خط قائم

$$\nabla f|_{P_0} = 2xi + 2yj + k|_{1,2,4} = 2i + 4j + k$$

پس معادله صفحه مماس عبارت است از:

$$2(x - 1) + 4(y - 2) + (z - 4) = 0 \Rightarrow 2x + 4y + z = 14$$

همچنین معادله خط قائم بر رویه در نقطه P_0 با بردار هادی $\nabla f|_{P_0}$ عبارت است از:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-4}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

$$\nabla f|_{P_0} = 2xi + 2yj + k|_{1,2,4} = 2i + 4j + k$$

معادله پارامتری خط مماس بر منحنی فصل مشترک سطح‌های $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ و $z = x^2 + y^2$ را در نقطه $-1, 1, 2$ می‌یابیم.

حل: محل تقاطع دو رویه همانند شکل (۵)، منحنی زیر می‌باشد:

$$C : \begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0 \\ g(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

یک نقطه از منحنی C ، $-1, 1, 2$ می‌باشد. اکنون کافی است برداری موازی با خط مماس در این نقطه را بیابیم. این بردار $\mathbf{n} = \nabla f|_{P_0} \times \nabla g|_{P_0}$ می‌باشد. بنابراین با توجه به:

$$\mathbf{n}_1 = \nabla f|_{-1, 1, 2} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

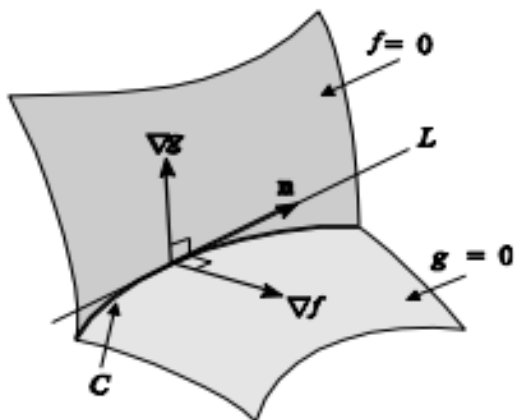
$$\mathbf{n}_2 = \nabla g|_{-1, 1, 2} = -8\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

بردار موازی با خط مماس بر فصل مشترک در نقطه P_0 به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 2 & -1 \\ -8 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 10\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$$

بنابراین معادله پارامتری خط عبارت است از:

$$x = 10t - 1, \quad y = 16t + 1, \quad z = 12t + 2$$



شکل ۵- منحنی حاصل از محل تقاطع دو رویه

مشتق جهتی (سویی)

به یاد دارید که f_x, f_y, f_z میزان تغییرات تابع f نسبت به x, y, z می باشد و یا اینکه مشتقات جزئی فوق را می توان به عنوان میزان تغییرات تابع $f(x, y, z)$ به ترتیب در جهت $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ تصور نمود. حال می خواهیم این مفهوم را در هر جهت دلخواه عمومیت دهیم، بدین معنی که اگر $\mathbf{v}$ یک بردار دلخواه باشد، میزان تغییرات تابع $f(x, y, z)$ را در امتداد بردار $\mathbf{v}$ در نقطه دلخواه (x_0, y_0, z_0) را به دست آوریم (مشتق سویی). برای این منظور ابتدا بردار یکه $\mathbf{u}$ را هم جهت با بردار $\mathbf{v}$ به دست آورده سپس $\mathbf{u} \cdot \nabla f(x_0, y_0, z_0)$ را حساب کرده که به آن مشتق سویی تابع f در جهت مورد نظر گفته می شود.

قضیه ۴.۴

رابطه بین مشتق سویی با مشتق پذیری

هر گاه f یک تابع مشتق پذیر در نقطه x_0 باشد، آنگاه مشتق سویی تابع f در نقطه x_0 در هر جهت بردار یکه $\mathbf{u}$ وجود دارد و داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{x}_0 = \nabla f \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{u} \quad (۴)$$

مشتق سویی تابع $f(x, y, z) = z - e^x \cos(y + z)$ در نقطه $\left(0, 0, \frac{\pi}{6}\right)$ را در جهت بردار $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ می یابیم.

حل: برای محاسبه ابتدا بردار گرادیان را می یابیم:

$$\begin{aligned}\nabla f\left(0, 0, \frac{\pi}{6}\right) &= \left\langle f_x, f_y, f_z \right\rangle \Big|_{\left(0, 0, \frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \left\langle e^x \cos(y + z), e^x \sin(y + z), 1 + e^x \sin(y + z) \right\rangle \Big|_{\left(0, 0, \frac{\pi}{6}\right)} = \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle\end{aligned}$$

چون تعریف مشتق سویی در جهت بردار واحد است، پس بردار یکانی متناظر $\mathbf{v}$ را می سازیم:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{8}}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{8}}\mathbf{k}$$

پس با توجه به (۴) داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}\left(0, 0, \frac{\pi}{6}\right) &= \nabla f\left(0, 0, \frac{\pi}{6}\right) \cdot \mathbf{u} \\ &= \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{8}} \right\rangle = \frac{3}{\sqrt{8}}\end{aligned}$$

مشتق جهتی تابع $f(x, y) = x^2 - 3xy$ را در امتداد سهمی $y = x^2 - x + 2$ در نقطه $(1, 2)$ می‌یابیم.

حل: در نقطه دلخواه (x, y) ، بردار گرادیان عبارت است از:

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} = (2x - 3y) \mathbf{i} - 3x \mathbf{j}$$

پس در نقطه $(1, 2)$ داریم $\nabla f(1, 2) = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$. سهمی فوق را می‌توان به صورت پارامتری با معادله برداری زیر نمایش داد:

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 - t + 2)\mathbf{j}$$

بنابراین $\mathbf{r}'(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ و $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j}$ ، لذا بردار واحد مماس بر منحنی C در نقطه $(1, 2)$ بردار $\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ می‌باشد. پس مشتق سویی مطلوب با توجه به رابطه (۴) برابر است با:

$$\nabla f(1, 2) \cdot \mathbf{T}(1) = \frac{-7}{\sqrt{2}}$$

مشتق تابع دو متغیره $f(x, y)$ در نقطه $p_1(2, 3)$ و در جهت $v_1 = i + j$ برابر است با $2\sqrt{2}$ و در جهت $v_2 = -2j$ برابر است با -3 . مشتق تابع $f(x, y)$ را در جهت $v_3 = -i - 2j$ می یابیم.

حل: چون تعریف مشتق سویی در جهت بردار واحد است، پس بردار یکانی متناظر v_1 و v_2 را می یابیم:

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$$

$$u_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = -\frac{2}{\sqrt{2}}\mathbf{j} = -\mathbf{j}$$

با استفاده از مفروضات مسأله، ابتدا گرادیان تابع مجهول $f(x, y)$ را می یابیم:

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

$$\nabla f(x, y) \cdot u_1 = (a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \quad (۱)$$

$$\nabla f(x, y) \cdot u_2 = (a\mathbf{i} + b\mathbf{j}) \cdot (-\mathbf{j}) = -b = -3 \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) در می یابیم: $a = 1, b = 3$. پس گرادیان تابع برابر است با:

$$\nabla f(x, y) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

حال بردار یکانی متناظر با بردار v_3 را می یابیم:

$$u_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \frac{-1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{-2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$$

اکنون مشتق سویی برابر است با:

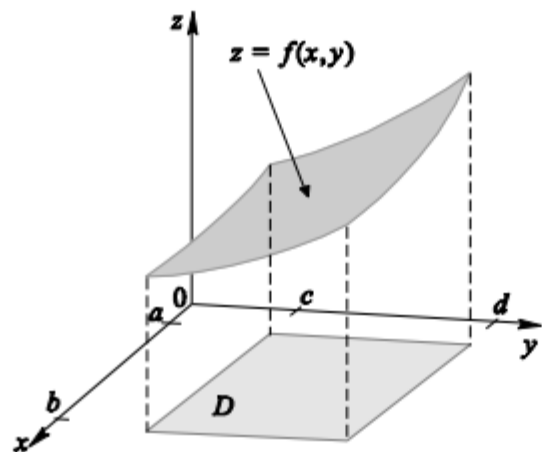
$$\nabla f(x, y) \cdot u_3 = (\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{-2}{\sqrt{5}}\mathbf{j} \right) = \frac{-7}{\sqrt{5}}$$

حجم و انتگرال دوگانه

همان طوری که به بهانه محاسبه مساحت، اغلب تعریف انتگرال معین یگانه بنا می شود، در اینجا قصد داریم به بهانه محاسبه حجم یک جسم، به تعریف انتگرال دو گانه پردازیم. فرض کنید V حجم ناحیه محدود به مستطیل D و رویه $z = f(x, y)$ که برای هر (x, y) از D ، $f(x, y) \geq 0$ باشد. (شکل ۱) هدف ما محاسبه حجم V است:

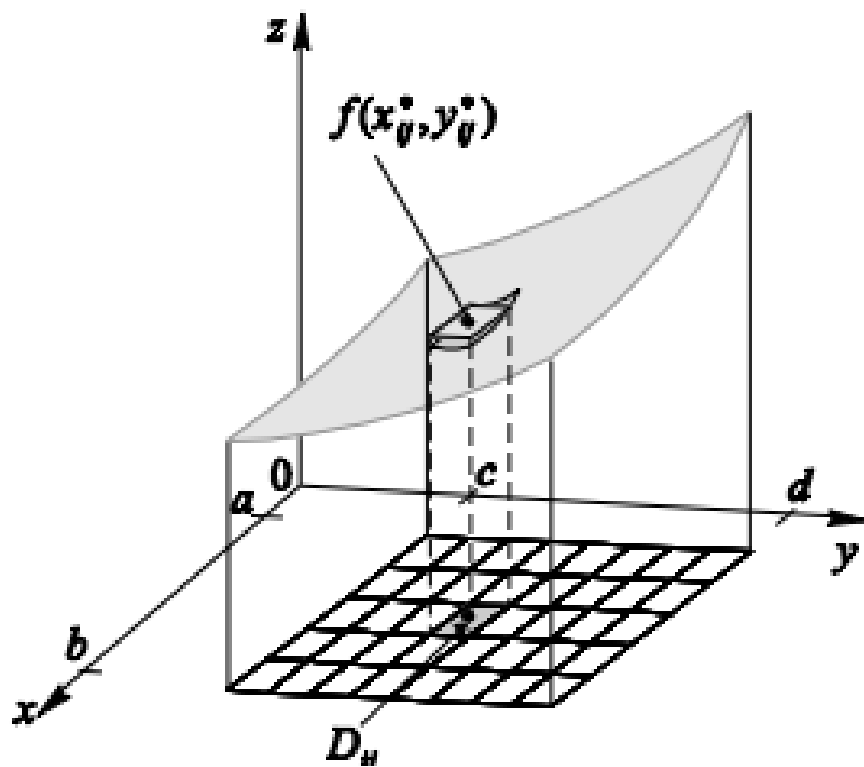
$$D = [a, b] \times [c, d] = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

$$D = a, b \times c, d = \{x, y \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$



شکل ۱- حجم بین رویه
 $z = f(x, y)$ و مستطیل D

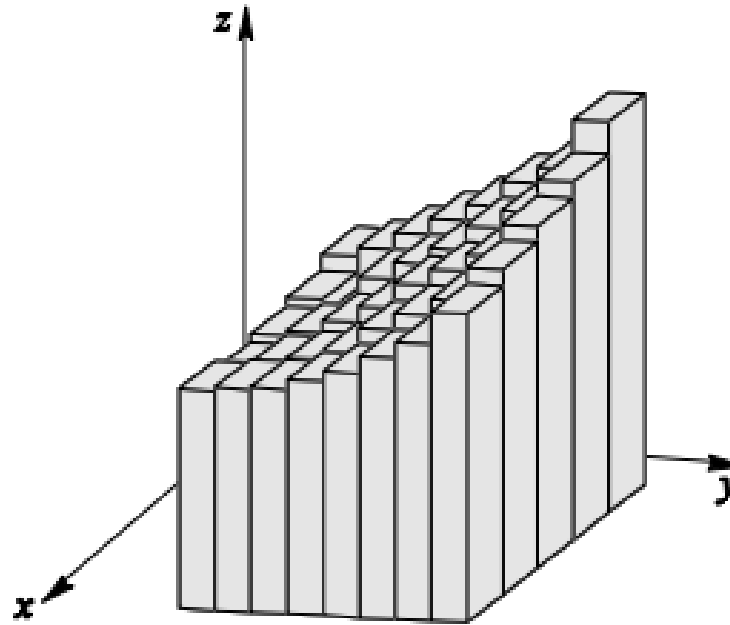
با خطوط موازی محور x و محور y ، مستطیل D را به مستطیل‌های کوچک تقسیم می‌کنیم، یعنی بازه a, b را به m زیربازه x_{i-1}, x_i با طول ثابت $\Delta x = (b - a) / m$ و به طور مشابه فاصله c, d را به n زیربازه y_{j-1}, y_j با طول ثابت $\Delta y = (d - c) / n$ تقسیم می‌کنیم. هر یک از مستطیل‌های حاصله با مساحت $\Delta A = \Delta x \Delta y$ را با D_{ij} نمایش می‌دهیم. اکنون با اختیار نقطه نمونه دلخواه (x_i^*, y_j^*) از D_{ij} می‌توان بخشی از حجم محدود به مستطیل D_{ij} و رویه $z = f(x, y)$ را تقریب زد. همانطور که در شکل (۲) دیده می‌شود، حجم مکعب مستطیل حاصل از امتداد سطح مستطیل D_{ij} در راستای محور- z عبارت است از $f(x_i^*, y_j^*) \Delta A$.



شکل ۲- حجم یک مکعب مستطیل

همان طور که در شکل (۳) نمایش داده شده است حجم V را می توان با مجموع ریمان دوگانه زیر تقریب نمود.

$$V \simeq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A \quad (1)$$



شکل ۳- مجموع ریمان

با افزایش تعداد تقسیمات، مجموع طرف راست تقریب (۱) به حجم واقعی نزدیک‌تر می‌شود. اکنون تعریف انتگرال دوگانه روی مستطیل را بر اساس مطالب ذکر شده بیان می‌نماییم.

انتگرال دوگانه f روی ناحیه مستطیلی D در صورت وجود حد به صورت زیر تعریف می شود:

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta A \quad (۲)$$

اگر نقطه دلخواه (x_i^*, y_j^*) در D_{ij} را گوشه طرف راست بالای D_{ij} ، یعنی x_i, y_j در نظر بگیریم آنگاه انتگرال دوگانه f روی ناحیه مستطیلی D به صورت زیر خلاصه می شود:

$$\iint_D f(x, y) dA = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(x_i, y_j) \Delta A \quad (۳)$$

در صورت پیوستگی f روی ناحیه D حد مذکور همواره موجود است.

1 ناحیه نوع اول

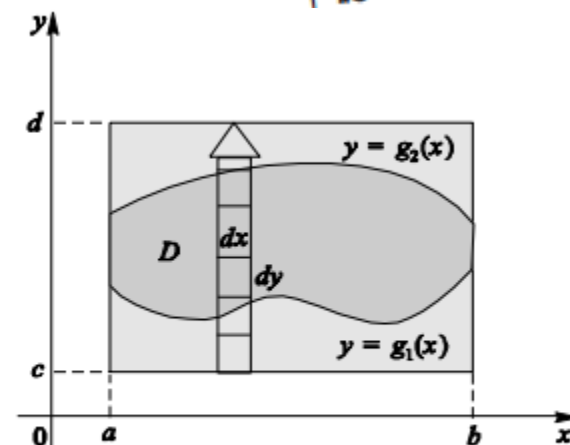
ناحیه D از $\mathbb{R}^2$ به صورت زیر نوع اول نامیده می‌شود، که $g_1(x)$ و $g_2(x)$ در بازه a, b پیوسته هستند. (شکل ۴)

$$D = \{x, y \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

لذا داریم:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

(۴)



شکل ۴- ناحیه نوع اول

2 ناحیه نوع دوم

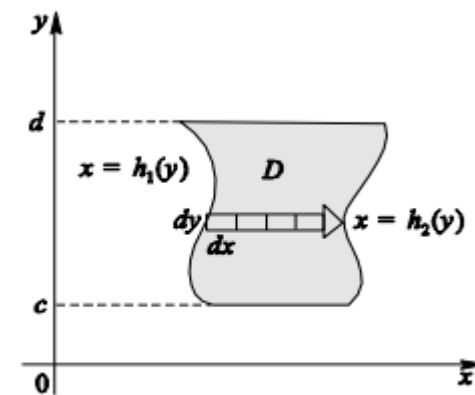
ناحیه D از نوع دوم به صورت زیر تعریف می شود، که در آن $h_1 y$ و $h_2 y$ توابع پیوسته روی بازه c, d می باشند. (شکل ۵)

$$D = \{x, y \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

پس:

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

(۵)



شکل ۵- ناحیه نوع دوم