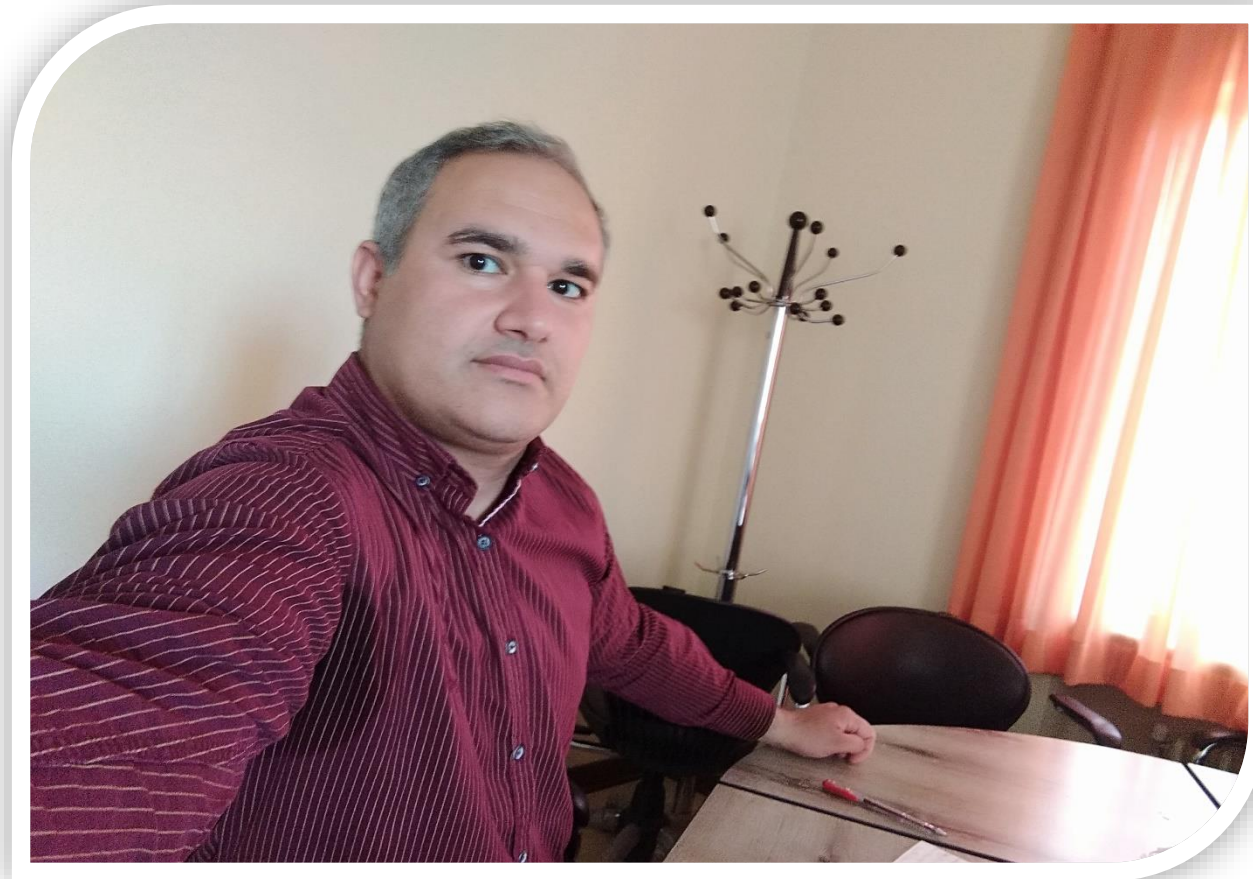


- ریاضی کاربردی دانشکده فنی حرفه ای پسرانه انقلاب اسلامی تهران مدرس بسته زاده
- معادله خط -معادله گذرنده از دو نقطه -معادله خط موازی با خط دیگر -وضعیت دو خط نسبت بهم -معادله صفحه معادله صفحه گذرنده از سه نقطه -
-وضعیت دو صفحه نسبت به هم
- معادله صفحه شامل خط و موازی با خط دیگر-معادله صفحه گذرنده از فصل مشترک دو صفحه و عمود بر صفحه دیگر
- معادله خط گذرنده از یک نقطه و موازی با دو صفحه
- دستگاه مختصات قطبی

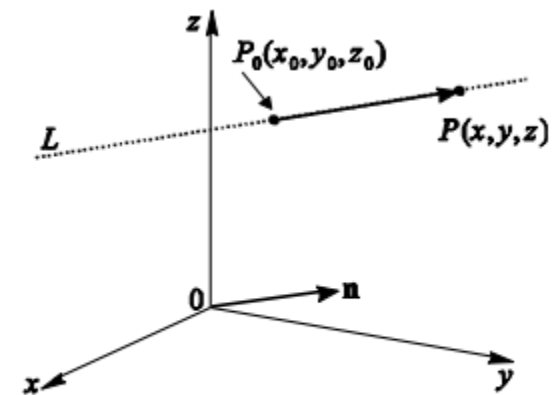


استاد بسته زاده

معادله خط

می دانیم معادله خطی که از نقطه x_0, y_0 گذشته و دارای شیب m باشد، به صورت $y - y_0 = m(x - x_0)$ مشخص می گردد. به طور مشابه در فضای $\mathbb{R}^3$ معادله خطی که از نقطه $p_0(x_0, y_0, z_0)$ گذشته و با بردار $n = ai + bj + ck$ موازی باشد، (بردار n را بردار هادی خط می نامیم) عبارت است از:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$



شکل ۱ - معادله خط و بردارهای آن

■ معادله پارامتری خط

با توجه به شکل (۱) که بردار $\vec{p_0p} = x - x_0 \ i + y - y_0 \ j + z - z_0 \ k$ با بردار هادی n موازی است لذا یک پارامتر مانند $t \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوریکه $\vec{p_0p} = tn$ پس داریم:

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = \langle ta, tb, tc \rangle$$

در آن صورت با توجه به تساوی دو بردار فوق معادله پارامتری خط به صورت زیر می باشد:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct$$

نکته:

توجه شود که اگر یکی از ثابت های a و b و c صفر باشد مثلاً $a = 0$ معادله دکارتی به صورت زیر می باشد.

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (1)$$

معادله گذرنده از دو نقطه:

مثال ۱

معادله خط گذرنده از دو نقطه

معادله دکارتی و پارامتری خطی که از نقاط $A(1, -1, 0)$ و $B(2, -1, 3)$ می گذرد را می یابیم.

حل: ابتدا بردار هادی خط را با توجه به این که نقاط A و B روی خط قرار دارند و بردار $\vec{AB}$ موازی خط می باشند، به صورت زیر می یابیم:

$$n = \vec{AB} = \langle 2-1, -1-(-1), 3-0 \rangle = \langle 1, 0, 3 \rangle$$

پس معادله دکارتی و پارامتری خط به صورت زیر می باشند

$$\text{معادله دکارتی: } \frac{x-1}{1} = \frac{z-0}{3}, y = -1$$

$$\text{معادله پارامتری خط: } x = 1 + t, y = -1 + 0t, z = 0 + 3t$$

معادله خط موازی با خط دیگر:

مثال ۲

معادله خط موازی با خط دیگر

$$\text{معادله خطی که از مبدأ گذشته و با خط} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5t \end{cases} \text{ موازی باشد را می یابیم.}$$

حل: ابتدا بردارهای خط داده شده را می یابیم:

$$n = \langle 1, 3, 5 \rangle$$

چون دو خط موازی هستند پس بردارهای فوق، بردارهای هر دو خط می باشد. در نتیجه معادله خط برابر است با:

$$\frac{x-0}{1} = \frac{z-0}{3} = \frac{y-0}{5}$$

■ وضعیت دو خط نسبت به هم

اگر بردارهای هادی دو خط با هم موازی باشند آنگاه دو خط موازی و اگر بردارهای هادی آنها بر هم عمود باشند آنگاه دو خط بر هم عمودند. اگر دو خط همدیگر را قطع نکنند و موازی نباشند آنها را دو خط متنافر می‌گوییم. توجه داشته باشید که دو خط متنافر نمی‌توانند در یک صفحه قرار گیرند.

مثال ۳

دو خط متنافر

نشان می‌دهیم که دو خط L_1 و L_2 با معادله پارامتری زیر متنافر هستند :

$$L_1 : x = 1 + t, \quad y = -2 + 3t, \quad z = 4 - t,$$

$$L_2 : x = 2s, \quad y = 3 + s, \quad z = -3 + 4s$$

حل : دو خط موازی نمی‌باشند، چون بردارهای نرمال $\mathbf{n}_1 = \langle 1, 3, -1 \rangle$ و $\mathbf{n}_2 = \langle 2, 1, 4 \rangle$ با هم موازی نمی‌باشند. همچنین با توجه به اینکه دستگاه زیر دارای جوابی برای t و s نمی‌باشد، بنابراین دو خط همدیگر را قطع نمی‌کنند، بنابراین متنافر هستند.

$$1 + t = 2s$$

$$-2 + 3t = 3 + s$$

$$4 - t = -3 + 4s$$

برای تعیین معادله صفحه به یک نقطه p_0 و بردار نرمال n نیاز داریم. بردار عمود بر صفحه را **بردار نرمال** صفحه می‌نامیم. فرض کنیم صفحه مکان هندسی تمام نقاط $p(x, y, z)$ و شامل نقطه معلوم $p_0(x_0, y_0, z_0)$ باشد که دارای بردار نرمال $n = \langle a, b, c \rangle$ باشد در آنصورت با توجه به اینکه $\vec{p_0p}$ بر n عمود است لذا $\vec{p_0p} \cdot n = 0$ یعنی

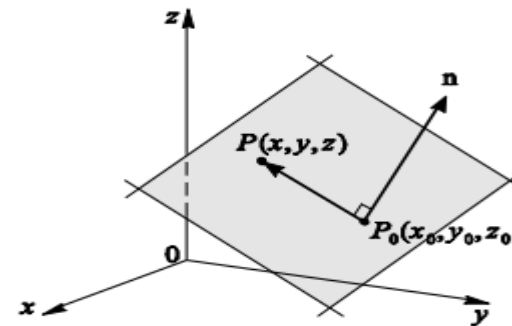
$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$

پس نتیجه می‌گیریم:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (2)$$

معمولاً معادله صفحه فوق را پس از دسته‌بندی به صورت زیر می‌نویسیم که در آن $d = ax_0 + by_0 + cz_0$

$$ax + by + cz = d$$



شکل ۲- معادله صفحه با نقطه معلوم p_0 و بردار نرمال n

معادله صفحه‌ای که از نقطه p_0 $1, 2, 3$ گذشته و بردار نرمال آن $n = \langle 3, 5, 2 \rangle$ باشد را می‌یابیم.

حل: معادله صفحه عبارت است از:

$$3x - 1 + 5y - -2 + 2z - 3 = 0$$

$$3x + 5y + 2z = -1$$

معادله صفحه‌ای که از سه نقطه A $1, 0, -1$ و B $1, 2, 1$ و C $-3, 2, 4$ بگذرد را می‌یابیم.

حل: ابتدا به کمک نقاط فوق دو بردار $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ را که در صفحه مورد نظر قرار دارند می‌یابیم.

$$\vec{AB} = \langle 0, 2, 2 \rangle, \quad \vec{AC} = \langle -4, 2, 5 \rangle$$

چون بردار نرمال صفحه مورد نظر بر صفحه عمود است لذا بر هر بردار داخل صفحه نیز عمود است. با توجه به خاصیت ضرب خارجی دو بردار (که بر هم عمود است) داریم:

با توجه به بردار نرمال فوق و یکی از نقاط داده شده معادله صفحه به صورت زیر می باشد :

$$6x - 1 + 8y - 0 + 8z - -1 = 0$$

یعنی

$$6x + 8y + 8z = -2$$



■ وضعیت دو صفحه نسبت به هم

دو صفحه یا با هم موازی اند یا بر هم عمودند و یا متقاطعند. اگر بردارهای نرمال دو صفحه با هم موازی باشند، آن دو صفحه با هم موازی و اگر بردارهای نرمال دو صفحه بر هم عمود باشند آنگاه آن دو صفحه بر هم عمودند.

■ فاصله یک نقطه از صفحه

فاصله نقطه $A(x_0, y_0, z_0)$ از صفحه $p: ax + by + cz = d$ عبارت است از :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (3)$$

مثال ۷

فاصله نقطه از صفحه

فاصله نقطه $A(1, 2, 3)$ از صفحه $p: 2x + y + 3z = 1$ را می یابیم.

$$d = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{12}{\sqrt{14}}$$

حل:

مثال ۸

زاویه بین دو صفحه

زاویه بین دو صفحه $2x + y - 2z = 1$ و $3x + 2y + z = 2$ را می یابیم.

حل: زاویه بین دو صفحه همان زاویه بین بردارهای نرمال آنها می باشد:

$$n_1 = \langle 2, 1, -2 \rangle, \quad n_2 = \langle 3, 2, 1 \rangle$$

$$\cos \theta = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\text{پس } \theta = \cos^{-1} \left(\frac{2}{\sqrt{14}} \right) \text{ می باشد.}$$

معادله صفحه ای که از خط $\frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-4}{-2}$ بگذرد و با خط $\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{1}$ موازی باشد را می یابیم.

حل: بردار نرمال صفحه از حاصلضرب خارجی بردارهای هادی دو خط به دست می آید:

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = -6i - 7j - 16k$$

پس صفحه مورد نظر که از نقطه $1, 4, 4$ می گذرد، برابر است با:

$$-6(x-1) - 7(y-4) - 16(z-4) = 0 \Rightarrow 6x + 7y + 16z = 98$$

معادله صفحه ای که از فصل مشترک دو صفحه زیر می گذرد و عمود بر صفحه $x - y - 2z + 5 = 0$ می باشد را می یابیم.

$$\begin{cases} 7x - 4y + 7z + 16 = 0 \\ 4x + 3y - 2z + 13 = 0 \end{cases}$$

حل: ابتدا فصل مشترک دو صفحه را می یابیم. با فرض $z = t$ داریم:

$$\begin{cases} 7x - 4y = 7 - 7t - 16 \\ 4x + 3y = 2t - 13 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{13}{37}t - \frac{100}{37}, y = \frac{42}{37}t - \frac{27}{37}$$

بردار نرمال صفحه (عمود بر صفحه)، از ضرب خارجی بردار نرمال صفحه $x - y - 2z + 5 = 0$ و بردار $\vec{A} = -\frac{13}{37}i + \frac{42}{37}j + k$

به دست می آید:

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -2 \\ -\frac{13}{37} & \frac{42}{37} & 1 \end{vmatrix} = \frac{47}{37}i - \frac{11}{37}j + \frac{29}{37}k$$

صفحه مورد نظر از نقطه $(-\frac{100}{37}, \frac{42}{37}, 0)$ می گذرد، لذا برابر است با:

$$47\left(x + \frac{100}{37}\right) - 11\left(y + \frac{27}{37}\right) + 29z - 0 = 0 \Rightarrow 47x - 11y + 29z + 119 = 0$$

معادله خط گذرنده از نقطه $-2, 3, 4$ و موازی با صفحات زیر را می یابیم.

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ 3x + 4y + 5z = 6 \end{cases}$$

حل: خط مورد نظر باید موازی با فصل مشترک دو صفحه باشد. یعنی با حاصلضرب خارجی بردارهای نرمال دو صفحه موازی است. لذا بردار هادی خط عبارت است از:

$$n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = i - 2j + k$$

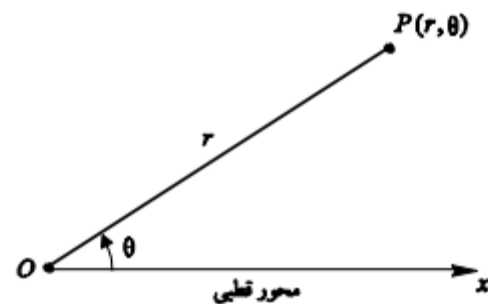
پس معادله خط برابر است با:

$$\frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-4}{1}$$

بخش ۲. ۱ دستگاه مختصات قطبی

این دستگاه شامل یک محور اعداد به نام محور قطبی می باشد که حول نقطه ای به نام مبدا O یا قطب می چرخد و جهت آن به سمت راست نشان داده می شود.

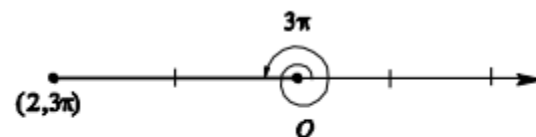
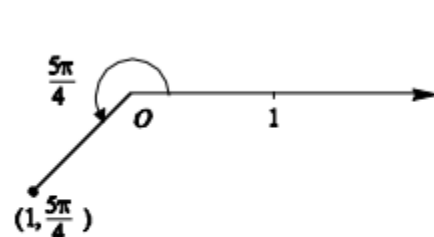
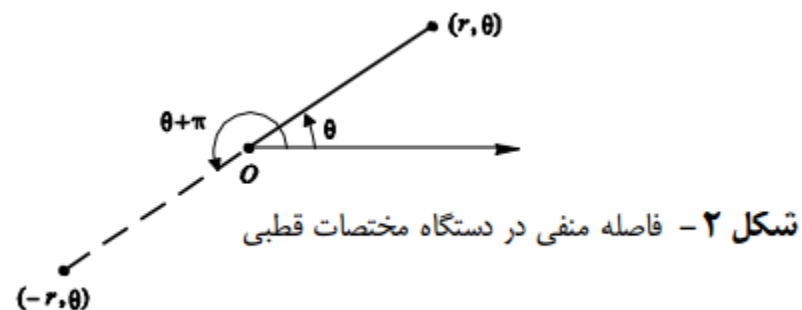
هر نقطه P در صفحه می تواند توسط مختصات قطبی r, θ نمایش داده شود که در آن r فاصله جهت دار از مبدا O تا نقطه P است و θ زاویه جهت دار از محور قطبی تا پاره خط OP در جهت مثبت محور (خلاف جهت عقربه ساعت) می باشد.



شکل ۱- مختصات قطبی r, θ نقطه P

برای آنکه دستگاه کامل باشد گاهی لازم است که فاصله منفی تعریف شده باشد، یعنی $r < 0$ ، که نمایش فاصله مثبت $-r$ در جهت مخالف یعنی $\theta + \pi$ می‌باشد. (شکل ۲)

$$-r, \theta = r, \theta + \pi$$



شکل ۳ - چند نقطه در دستگاه مختصات قطبی

