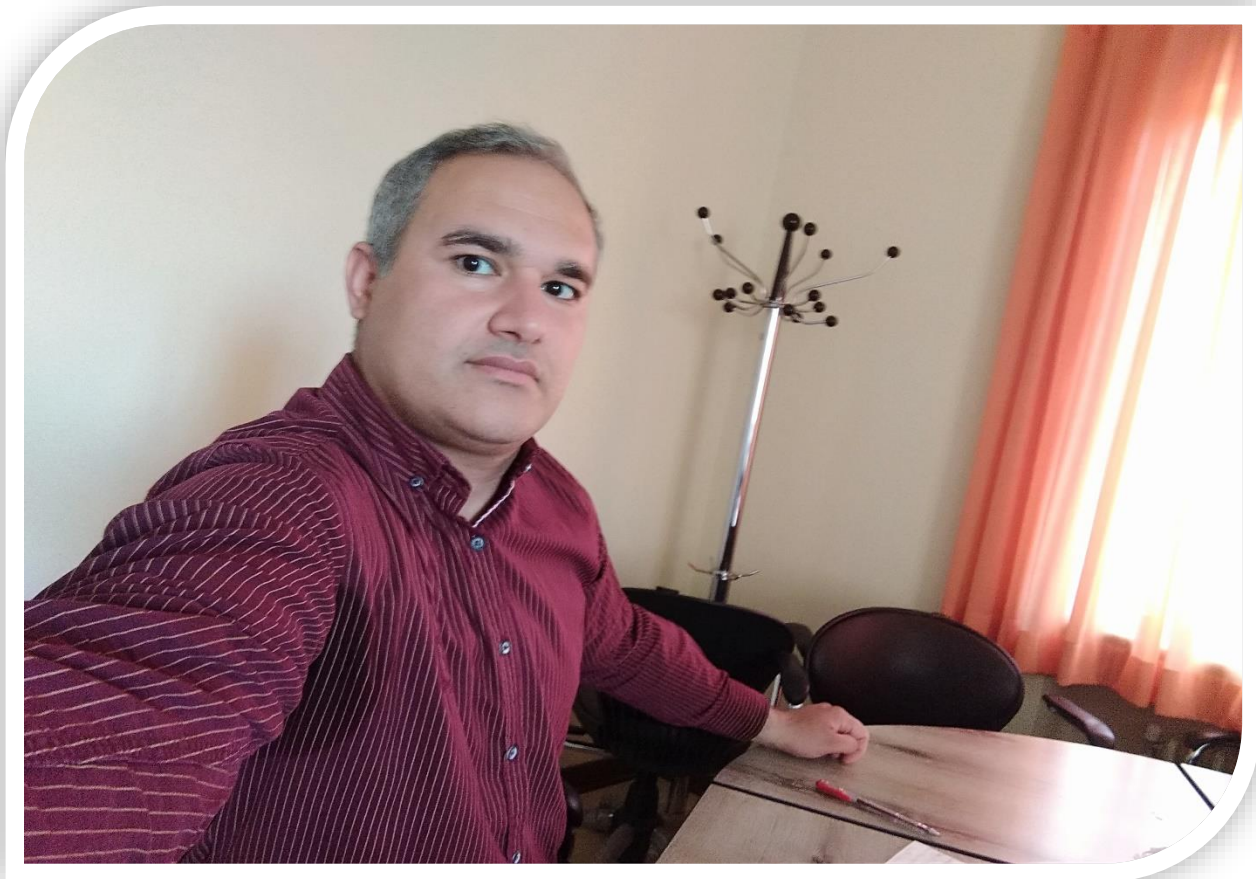


- ❖ کاربرد انتگرال در محاسبه مساحت و سطح
- ❖ معادله دیفرانسیل معمولی
- ❖ معادله دیفرانسیل مرتبه اول
- ❖ معادله دیفرانسیل معمولی
- ❖ معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت



بخش ۵. ۴ کاربرد انتگرال در محاسبه مساحت سطح و حجم

① تعیین مساحت

مساحت ناحیه $\mathbb{R}$ از محور- xy که انتگرال روی آن تعریف شده برابر است با:

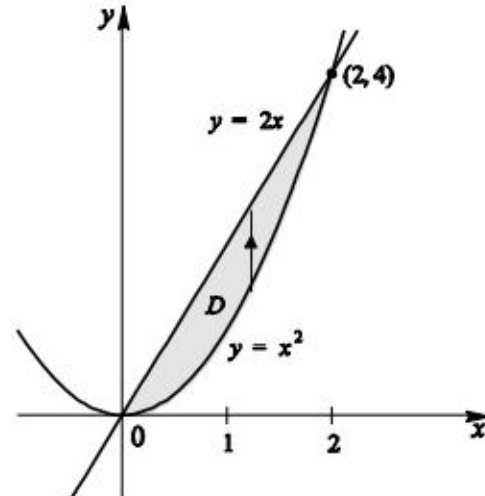
$$S = \iint_R 1 dx dy \quad (۱)$$

مثال ۱

محاسبه مساحت ناحیه مسطح

مساحت ناحیه $\mathbb{R}$ که به سهمی $y = x^2$ و خط $y = 2x$ محدود است را می یابیم.

حل: ناحیه $\mathbb{R}$ یک ناحیه مسطح در صفحه xy می باشد. پس ابتدا نقاط تقاطع را می یابیم:



شکل ۱ - سطح مسطح بین دو منحنی

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x = 0, 2$$

سپس مساحت ناحیه $\mathbb{R}$ را به صورت زیر محاسبه می کنیم:

$$S = \iint_R 1 dx dy = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} dy dx = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \frac{4}{3}$$

② تعیین حجم

انتگرال دوگانه تابع $z = f(x, y)$ در ناحیه D ، حجم استوانه ای است که محور دوران محور z واقع بین $z = f(x, y)$ و D از صفحه xy می باشد:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy \quad (2)$$

مثال ۳

محاسبه حجم به کمک انتگرال دوگانه

حجم منشوری که به وسیله محورهای مختصات و صفحه $x + y + z = 1$ تولید می گردد را می یابیم.

حل: با توجه به رابطه (۲) داریم:

$$V = \iint_D z dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y) dy dx$$

$$= \int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{6}$$

استاد بسته زاده

معادلات دیفرانسیل معمولی

۱.۶ معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

۲.۶ معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

تعریف ۱.۶

معادله دیفرانسیل

اگر F یک تابع از $n + 2$ متغیر مستقل باشد، معادله

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه n نامیده می شود که رابطه ای است بین متغیر مستقل x و تابع $y(x)$ و n مشتق آن.

ابتدا بحث را به تعیین جواب معادلاتی مرتبه اول زیر اختصاص می دهیم.

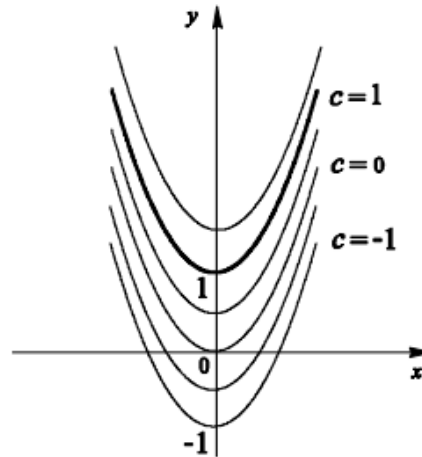
$$F(x, y, y') = 0$$

(۲)

که در این معادله y' همیشه باید به عنوان شناسه F موجود باشد، زیرا در غیر این صورت (۲) یک معادله دیفرانسیل نخواهد بود. ساده ترین نوع معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $y' = f(x)$ می باشد، که جواب عمومی آن با تعریف انتگرال نامعین برابر است با:

$$y = \int f(x) dx + C$$

برای نمونه معادله دیفرانسیل $y' = 2x$ دارای **جواب عمومی** زیر می باشد (شکل ۱).



شکل ۱ - چند جواب عمومی به همراه یک جواب خصوصی از معادله $y' = 2x$

$$y = \int 2x dx + C = x^2 + C$$

به منظور تعیین یک جواب خاص، (تعیین ثابت C) به یک شرط $y(x_0) = y_0$ نیاز داریم که به **شرط اولیه** معروف است، که اگر معادله $y' = 2x$ همراه با شرط $y(1) = 2$ باشد، نتیجه می شود :

$$2 = 1 + C \Rightarrow C = 1$$

بنابراین $y = x^2 + 1$ یک **جواب خصوصی** است. این جواب در شکل (۱) پررنگ تر نمایش داده شده است.

■ جواب عمومی و خصوصی

منظور از جواب معادله (۲) تابعی چون $y = \phi(x)$ است به طوری که در یک بازه مانند I در معادله (۲) صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0$$

همانند نمونه بالا که $y = x^2 + 1$ ، $y = x^2 - 1$ و همه جواب‌های معادله می‌باشند. در حالت کلی همانند $y = x^2 + C$ در نمونه بالا، رابطه $y = \phi(x, C)$ که در آن C یک ثابت اختیاری است **جواب عمومی** نامیده می‌شود. با توجه به شرط آغازی ثابت C ، قابل تعیین است، که جواب حاصل **جواب خصوصی** نامیده می‌شود.

جواب معادله دیفرانسیل

مثال ۱

جوابهای معادله دیفرانسیل $y'' - 5y' + 6y = 0$ به صورت $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ می‌باشد. زیرا اگر قرار دهیم $y = e^{2x}$ آنگاه داریم: $y' = 2e^{2x}$ و $y'' = 4e^{2x}$. اگر در معادله قرار دهیم می‌بینیم که:

$$4e^{2x} - 10e^{2x} + 6e^{2x} = 0, \forall x$$

به همین صورت $y = e^{3x}$ نیز جواب معادله است. به طور کلی می‌توان نشان داد که هر یک از توابع $y = c_1 e^{2x}$ و $y = c_2 e^{3x}$ که در آنها c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه هستند، جواب معادله می‌باشند. علاوه بر این تابع $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ جواب معادله است که به آن جواب عمومی معادله دیفرانسیل می‌گوییم.

معادله دیفرانسیل جدایی پذیر

معادله دیفرانسیل مرتبه اول $M(x) + N(y)y' = 0$ که پس از تبدیل y' به $\frac{dy}{dx}$ و ضرب آن در dx به صورت زیر در می آید

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \quad (۳)$$

را معادله دیفرانسیل مرتبه اول جدایی پذیر می نامیم.

که در آن جمله اول سمت چپ فقط شامل x و جمله دوم فقط شامل y است، به این معنی که متغیرها از هم جدا شده اند. برای حل معادله فوق کافی است از دو طرف آن انتگرال بگیریم.

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C \quad (۴)$$

مثال ۲

معادله دیفرانسیل جدایی پذیر

جواب عمومی معادله $y' = e^{x+y}$ را به دست آورده، سپس یک جواب خصوصی که در شرط $y(0) = 0$ صدق می کند، برای آن تعیین می کنیم.

حل: ابتدا معادله فوق را به صورت $\frac{dy}{dx} = e^x e^y$ می نویسیم. ملاحظه می گردد با نوشتن معادله به صورت $e^x dx = e^{-y} dy$ متغیرهای x و y از هم جدا شده و با انتگرال گیری از طرفین داریم:

$$\int e^x dx - \int e^{-y} dy = c$$

بنابر این جواب عمومی معادله عبارت است از:

$$e^x + e^{-y} = c$$

اکنون برای یافتن جواب خصوصی مقدار c را طوری می یابیم که شرط $y(0) = 0$ برقرار باشد. با قرار دادن $x = 0$ و $y = 0$ در جواب عمومی، $c = 2$ به دست می آید. پس جواب خصوصی معادله فوق برابر است با:

$$e^x + e^{-y} = 2$$

شکل کلی معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به صورت زیر است.

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad (10)$$

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \phi''(x)) = 0$$

برای نمونه می‌دانیم که $y = \sin x$ یک جواب معادله $y + y'' = 0$ است، زیرا

$$\sin x + \frac{d^2}{dx^2} \sin x = 0$$

به علاوه به ازای هر ثابت C_1 و C_2 دلخواه $y = C_1 \sin(x + C_2)$ نیز در معادله صدق می‌کند (امتحان کنید)، که به **جواب عمومی** معروف است. به طور کلی $y = \phi(x, C_1, C_2)$ ، که به ازای هر دو ثابت C_1 و C_2 در معادله (۱۷) صدق کند یک جواب عمومی نامیده می‌شود. برای تعیین ثابت‌های C_1 و C_2 درک شهودی‌ها بیان می‌کند که احتیاج به دو شرط داریم. این شرایط می‌توانند به صورت زیر باشند که به **شرایط اولیه** معروفند.

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (11)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad , \quad y'(x_0) = y'_0 \quad (11)$$

همچنین ممکن است شرایط در دو نقطه، به شکل زیر برقرار باشد، که به **شرایط مرزی** معروف هستند.

$$y(x_0) = y_0 \quad , \quad y(x_1) = y_1 \quad (12)$$

معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب ثابت

معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت حالت مهمی از معادلات دیفرانسیل می باشند که در کاربردها اغلب با آنها مواجه می شویم. به عنوان مثال اغلب در دستگاه های مکانیکی و مدارهای الکتریکی به این نوع معادلات برخورد می کنیم. شکل کلی یک معادله خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت عبارت است از:

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (13)$$

که در آن a و b ضرایب ثابت معادله هستند.

جواب های معادله همگن خطی مرتبه دوم

اگر $y_1(x)$ و $y_2(x)$ دو جواب همگن (۱۳) باشند آنگاه $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ نیز جواب (۱۳) می باشد که در آن c_1 و c_2 ثابتهای دلخواه اند.

