

ریاضی عمومی یک

قسمت دوم

مثال : مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع زیر در نقطه ی $x=-۲$ و $x=۲$ دارای حد باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \leq -۲ \\ ax + b & -۲ < x < ۲ \\ ۲x - ۶ & x \geq ۲ \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -۲^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -۲^-} x^۲ = (-۲)^۲ = ۴$$

$$\lim_{x \rightarrow -۲^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -۲^+} ax + b = -۲a + b$$

$$-۲a + b = ۴$$

$$\lim_{x \rightarrow ۲^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۲^+} ۲(۲) - ۶ = -۲$$

$$\lim_{x \rightarrow ۲^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow ۲^-} ax + b = ۲a + b$$

$$۲a + b = -۲$$

$$\begin{cases} -۲a + b = ۴ \\ ۲a + b = -۲ \end{cases} \Rightarrow b=۱, a = -\frac{۳}{۲}$$

قضایای حد توابع :

$$۱) \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow a} c = c$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad (\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0)$$

$$۶) \lim_{x \rightarrow a} f^n(x) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n$$

$$۷) \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$۸) \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

حد در بی نهایت :

حد در بی نهایت به این معنی است که متغیر مستقل x به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می کند.

نکته : توجه کنید که در ریاضیات عدد تقسیم بر بی نهایت صفر می شود.

مثال : هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x+1} \right)^2 = 16$$

حد بینهایت : حد بی نهایت به این معنی است که حد تابع $f(x)$ برابر با $+\infty$ و یا $-\infty$ شود.

مثال : هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} -\frac{x}{(x+3)^2} = -\frac{x}{0^+} = -\infty$$

قضیه ی فشردگی :

فرض کنید در یک همسایگی محذوف a , $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ و

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

باشد. در این صورت : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ است.

مثال : اگر به ازای هر x داشته باشیم $2 - x^2 \leq g(x) \leq 2 \cos x$ حد تابع $g(x)$ را در $x=0$ تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 - x^2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 \cos x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 2$$

صورت های مبهم و رفع ابهام آنها :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$$

نکته :

$$\frac{0^+}{0^+} = 0^+$$

$$\frac{0^+}{0^+} = \text{تعریف نشده}$$

رفع ابهام از حالت $\frac{0}{0}$: برای رفع ابهام از این حالت دو روش ارائه می کنیم که باید با توجه به تابع روش مناسب انتخاب شود.

الف) حذف عامل مبهم کننده : صورت و مخرج را به حاصل ضرب عوامل تجزیه کرده و یا صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج یا صورت و یا هر دو ضرب کرده و سپس با ساده کردن کسر از این روش استفاده می کنیم.

ب) قاعده ی هوییتال : استفاده از قاعده ی هوییتال را در فصل کاربرد مشتق مورد بحث قرار می دهیم.

مثال : هر یک از حدود زیر را محاسبه کنید :

$$1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x(x - 5)}{(x - 5)(x + 5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5}{5 + 5} = \frac{5}{10}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{(\sqrt{4} + 2)} = \frac{1}{4}$$

رفع ابهام از حالت $\frac{\infty}{\infty}$:

در توابع گویا ، بزرگترین جمله از صورت و بزرگترین جمله از مخرج کسر را انتخاب می کنیم و حد آن را به صورت زیر بدست می آوریم :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_m x^m}{b_n x^n} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_n} & m > n \\ \frac{a_m}{b_n} & m = n \\ \infty & m < n \end{cases}$$

مثال : هر يك از حدود زير را محاسبه كنيد :

$$۱) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{۶x - ۵}{۳x + ۵} = \frac{۶}{۳} = ۲$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^۲ + ۶x - ۱}{x^۳ + ۴x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^۲}{x^۳} = ۰$$

رفع ابهام $0 \times \infty$: برای رفع ابهام این حالت ابتدا آن را به ابهام $\frac{0}{0}$ تبدیل می کنیم، سپس اقدام به حل آن می کنیم.

$$f(x) \times g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$$

مثال : حد زیر را محاسبه کنید :

$$\lim_{x \rightarrow ۱} (x^۲ - ۱) \left(\frac{1}{x-1} \right) = 0 \times \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)}{x - 1} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = ۲$$

رفع ابهام حالت $\infty - \infty$:

الف) اگر توابع کسری باشند، در برخی حالات می توان مخرج مشترک گرفت.

ب) در توابع رادیکالی برای رفع ابهام می توان عبارت را در مزدوج آن ضرب نمود و یا در صورتی که بزرگترین توان عبارت زیر رادیکال ، با فرجه ی رادیکال برابر باشد، می توان به جای رادیکال از عبارت هم ارز آن استفاده کرد. هم ارزی های رادیکالی عبارتند از :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{ax^۲ + bx + c} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{۲a} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[۳]{ax^۳ + bx^۲ + cx + d} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[۳]{a} \left(x + \frac{b}{۳a} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + c} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[n]{a} \left| x + \frac{b}{na} \right|$$

مثال : حد زیر را محاسبه کنید :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 5x + 1} - \sqrt{x^2 + x} \right) \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1} \left| x + \frac{-5}{2} \right| - \sqrt{1} \left| x + \frac{1}{2} \right| \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{5}{2} - x - \frac{1}{2} \right) = -\frac{6}{2} = -3$$

نکته : رفع ابهام سایر صورت های مبهم در قسمت کاربرد مشتق توضیح داده خواهد شد.

پیوستگی توابع :

اگر تابع $f(x)$ در نقطه ی $x=a$ تعریف شده و برابر با حد $f(x)$ وقتی x به سمت a میل می کند باشد، گوییم f تابعی پیوسته است. به عبارت دیگر تابع f در a پیوسته است ، هرگاه :

(۱) $f(a)$ در a تعریف شده باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L < \infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (3)$$

اگر یکی از سه شرط فوق برقرار نباشد، تابع f را در a ناپیوسته گوییم.

مثال : مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در نقطه ی $x=-3$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x}{x + 3} & x \neq -3 \\ \frac{3}{2}ax + 5 & x = -3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x(x + 3)}{x + 3} = -3$$

$$f(-3) = -\frac{3}{2}a - 5$$

$$= -\frac{3}{2}a - 5 = -3 \Rightarrow a = -8$$

مثال : مقدار a و b را طوری بیابید که تابع زیر در $x=۲$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۳b & x > ۲ \\ ax & x = ۲ \\ -۲ & x < ۲ \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow ۲^+} f(x) = \varepsilon + ۳b$$

$$\lim_{x \rightarrow ۲^-} f(x) = -۲$$

$$f(۲) = ۲a$$

$$\varepsilon + ۳b = ۲a = -۲ \Rightarrow b = -۲, a = -۱$$