

ریاضی عمومی یک

قسمت اول

تابع: اگر f یک رابطه از مجموعه X در مجموعه Y باشد، آن را یک تابع از X در Y می نامیم، هرگاه

$D_f = X$ و به ازای هر $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in f$ داشته باشیم:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

نکته: از نظر هندسی رابطه f وقتی یک تابع است که هر خط عمودی (موازی محور Y ها) نمودار رابطه را فقط و فقط در یک نقطه قطع کند.

مثال: کدام یک از روابط زیر یک تابع است؟

$$f = \{(2, 1), (3, -5), (3, 7)\} \quad (\text{الف})$$

$$g = \{(1, 1), (2, 2), (-4, 4)\} \quad (\text{ب})$$

g تابع است زیرا هیچ دو زوج مرتب متمایز آنها دارای مولفه Y اول یکسان نمی باشد.

دامنه تابع:

دامنه Y یک تابع بزرگترین زیرمجموعه Y از مجموعه Y اعداد حقیقی است که با تغییر X در آن مجموعه، عددی حقیقی برای Y به دست آید.

برد تابع:

به مجموعه Y مقادیری که برای Y به دست می آید برد تابع می گویند.

مثال: دامنه و برد تابع زیر را مشخص کنید.

$$f = \{(1, 1), (2, 2), (-4, 4)\} \quad D_f = \{1, 2, -4\} \quad R_f = \{1, 2, 4\}$$

انواع توابع

توابع ثابت : توابعی که برد آنها تک عضوی است، توابع ثابت می نامند. مانند : $f(x)=2$

نکته : در مثال بالا دامنه تابع ثابت R و برد آن برابر ۲ می باشد.

تابع همانی : به صورت $f(x)=x$ است و دامنه و برد آن برابر R می باشد.

توجه کنید که تابع همانی همان نیم ساز ناحیه ی اول و سوم است.

توابع خطی : به صورت $f(x)=ax+b$ هستند و دامنه و برد آنها برابر R می باشد. مانند: $f(x)=2x+1$

توابع چند جمله ای : به صورت $p_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ هستند.

نکته : دامنه توابع چند جمله ای برابر R می باشد.

توابع گویا : تابع $f(x)$ با ضابطه ی :

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0}$$

را یک تابع گویا می نامیم. برای پیدا کردن دامنه ی این تابع باید مقادیری از R را که مخرج کسر را صفر

می کنند از مجموعه ی R کنار گذاشت.

مثال : دامنه ی تابع $f(x) = \frac{3x+1}{(x-1)(x-2)}$ را بیابید.

$$x-1=0 \Rightarrow x=1, \quad x-2=0 \Rightarrow x=2 \quad D_f = R - \{1, 2\}$$

توابع رادیکالی و دامنه ی آنها

توابع رادیکالی به صورت $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ هستند. مانند $f(x) = \sqrt[3]{9-x^2}$.

دامنه توابع رادیکالی: توابع رادیکالی که با فرجه زوج هستند، عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد ولی آنهایی که به فرجه فرد هستند رادیکال را در نظر نمی گیریم و اقدام به تعیین دامنه می کنیم.

مثال: دامنه ی تابع $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2-7x+12}{x^2-5x}}$ را به دست آورید.

چون عبارت زیر رادیکال با فرجه فرد میباشد پس فقط x هایی که مخرج را صفر می کنند در دامنه قرار نمی گیرند.

$$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad x = 5 \Rightarrow D_f = R - \{0, 5\}$$

مثال: دامنه تابع $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ را بیابید.

$$x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3, x \leq -3 \Rightarrow D_g = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

توابع چند ضابطه: یک تابع می تواند بیش از یک ضابطه داشته باشد. در این صورت f را تابع چند ضابطه ای می گویند.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & x \geq 4 \\ -x^2 + 3 & x < 2 \end{cases} \quad \text{مثال:}$$

تابع قدر مطلق: تابع قدر مطلق $f(x) = |x|$ با دامنه ی R و برد $R_f = [0, +\infty)$ و ضابطه ی زیر است:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

تابع جزء صحیح: تابعی حقیقی است که برای هر عدد حقیقی x بزرگترین عدد صحیح نایبتر از آن را می دهد و با نماد $f(x) = [x]$ نمایش می دهند.

ترکیب توابع : اگر $f: X \rightarrow Y$ و $g: Y \rightarrow Z$ دو تابع باشند ترکیب f و g را با gof نشان می دهند.

$$(\text{gof})(x) = g(f(x))$$

دامنه ی تعریف تابع gof چنین تعریف می شود :

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

مثال : توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 4x + 2$ داده شده اند

الف) تابع gof را تشکیل دهید.

ب) دامنه ی تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید.

$$(\text{gof})(x) = 4\sqrt{x} + 2$$

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [0, +\infty) : \sqrt{x} \in R\} = [0, +\infty)$$

توابع زوج یا فرد :

تابع زوج : تابع حقیقی $f(x)$ را زوج گویند، هرگاه اولاً دامنه ی آن متقارن بوده و ثانياً $f(-x) = f(x)$

تابع فرد : تابع حقیقی $f(x)$ را فرد گویند، هرگاه اولاً دامنه ی آن متقارن بوده و ثانياً $f(-x) = -f(x)$

مثال : زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$ را معلوم کنید.

دامنه ی f متقارن است زیرا : $D_f = R - \{1, -1\}$ پس فرد $f(-x) = \frac{-x^3 + 3x}{x^2 - 1} = -f(x)$ است.

توابع صعودی و نزولی :

توابع صعودی : تابع $y = f(x)$ با دامنه ی تعریف D_f را صعودی می نامند، اگر به ازای هر $x_1, x_2 \in D_f$ که

$x_1 < x_2$ بتوان نامساوی $f(x_1) \leq f(x_2)$ را نتیجه گرفت.

توابع نزولی : تابع $y=f(x)$ با دامنه ی تعریف D_f را نزولی می نامند، اگر به ازای هر $x_1, x_2 \in D_f$ که $x_1 < x_2$ بتوان نامساوی $f(x_1) \geq f(x_2)$ را نتیجه گرفت.

توابع یک به یک و معکوس :

تابع یک به یک : تابع f یک به یک نامیده می شود هرگاه هیچ دو زوج مرتب متمایز با مولفه های دوم برابر در آن یافت نشود. از نظر هندسی f وقتی یک به یک است که هر خط افقی حداکثر در یک نقطه نمودار آن را قطع کند.

مثال : $y=3x-5$ یک تابع یک به یک است.

تابع معکوس یا وارون : اگر f از A در B یک تابع یک به یک باشد که به صورت زیرمجموعه ای از $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ تعریف شود، آنگاه g از B در A را تابع وارون f نامیده و با نماد f^{-1} نمایش می دهند و چنین تعریف می شود :

$$f^{-1} = \{(b, a) \in B \times A | (a, b) \in f\}$$

مثال : یک به یک بودن تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ را بررسی کنید و سپس وارون آن را بیابید.

$D_f = R - \{1\}$ است پس برای هر $x_1, x_2 \in D_f$ داریم :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1}$$

$$(x_1 + 1)(x_2 - 1) = (x_1 - 1)(x_2 + 1)$$

$$x_1 x_2 + x_2 - x_1 - 1 = x_1 x_2 - x_2 + x_1 - 1$$

$$x_2 - x_1 = -x_2 + x_1$$

$$-2x_1 = -2x_2$$

$$x_1 = x_2$$

لذا تابع f یک به یک است لذا وارون پذیر است. برای یافتن وارون آن داریم :

$$y = \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow y(x-1) = x+1 \Rightarrow x(y-1) = y+1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

تابع نمایی : تابع $f(x) = a^x$ را که در آن a عدد حقیقی مثبت و مخالف یک می باشد ، تابع نمایی با پایه ی

a می گوئیم.

نکته :مهمترین تابع نمایی $y = e^x$ است که در آن e عدد نپر و برابر ۲/۷۱۸۱۸۲ است

تابع لگاریتمی : به ازای عدد حقیقی و مثبت a که $a \neq 1$ داریم : $x = a^y \Leftrightarrow y = \log_a x$

نکته : a را مبنای لگاریتم می نامیم و اگر برابر ۱۰ باشد نوشته نمی شود و اگر برابر e باشد لگاریتم طبیعی

نامیده می شود و با $y = \ln x$ نمایش می دهیم .

خواص لگاریتم :

$$۱) \log_a 1 = 0$$

$$۲) \log_a a = 1$$

$$۳) \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$۴) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$۵) \log_a x^n = n \log_a x$$

$$۶) \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

مثال : حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$\log_2 \sqrt[3]{32} = \log_2 2^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3} \log_2 2 = \frac{5}{3}$$

نکته : تابع نمایی و لگاریتمی معکوس یکدیگرند.

مثال : دامنه ی تابع $f(x) = \ln(x - 2) + \sqrt{4 - x}$ را بدست آورید.

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

$$4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$$

$$D_f = (2, 4]$$

حد توابع :

تعریف حد : به طور شهودی زمانی حد تابع $f(x)$ را برابر L می گوئیم، که هرگاه x به a نزدیک و نزدیکتر شود

تابع $f(x)$ به L نزدیک شود و می نویسیم :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

و می خوانیم حد تابع $f(x)$ وقتی x میل می کند به a ، برابر L می شود.

مثال : حد تابع زیر را بدست آورید :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1) = 3$$

در مثال فوق مشاهده می شود حد توابع چند جمله ای به راحتی با جایگذاری مقدار a به جای x بدست می آید

حد چپ و حد راست :

حد راست تابع زمانی بدست می آید که مقادیر x از سمت راست به a میل کند و می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$

حد چپ تابع زمانی بدست می آید که مقادیر x از سمت چپ به a میل کند و می نویسیم

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_*$$

زمانی تابع حد دارد که حد چپ و راست با هم برابر باشند.

مثال : حدود راست و چپ تابع زیر را در $a=0$ بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & x > 0 \\ -x^2 + 2x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

در این تابع حد چپ و راست با هم برابرند ، پس تابع در $a=0$ دارای حد است . در حالی که $f(0)$ تعریف نشده است.