

بسم الله الرحمن الرحيم

استاتیک

بخش نهم: ممان اینرسی (گشتاور دوم سطح)



مدرس: شهاب داودی

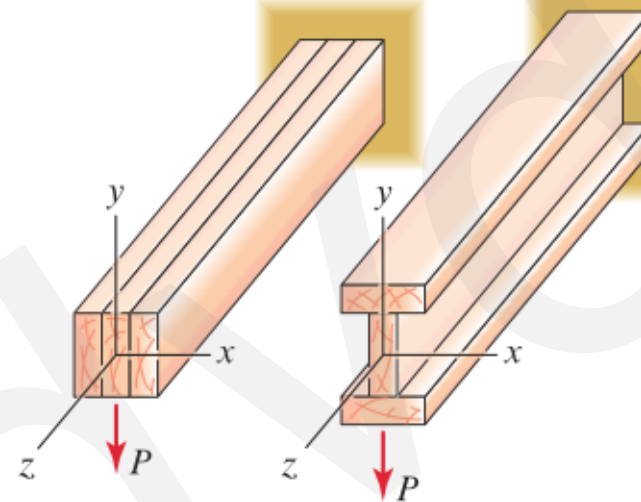
www.sdvd.ir

davoudi@gmail.com

R20210524

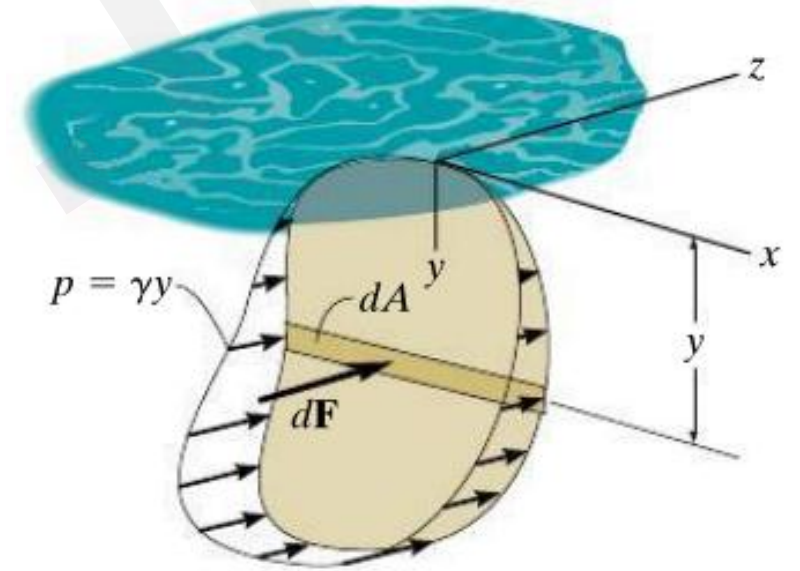


(a)



(a)

(b)

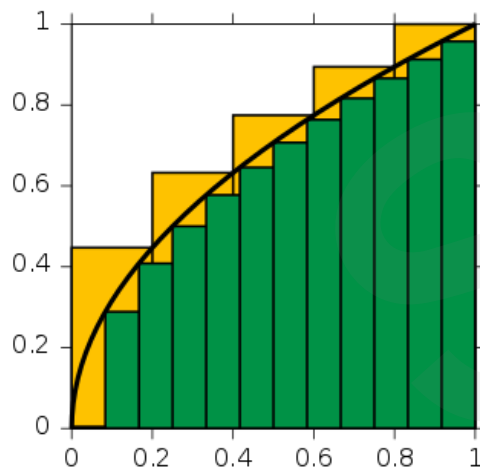


ریاضیات

انتگرال و مجموع تعداد محدود جزء

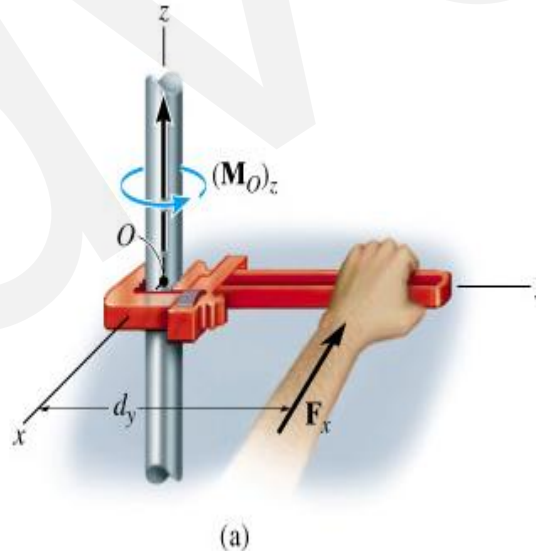
$$\int_{x_1}^{x_2} x \, dA$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \Delta A_i$$



گشتاور و کوپل

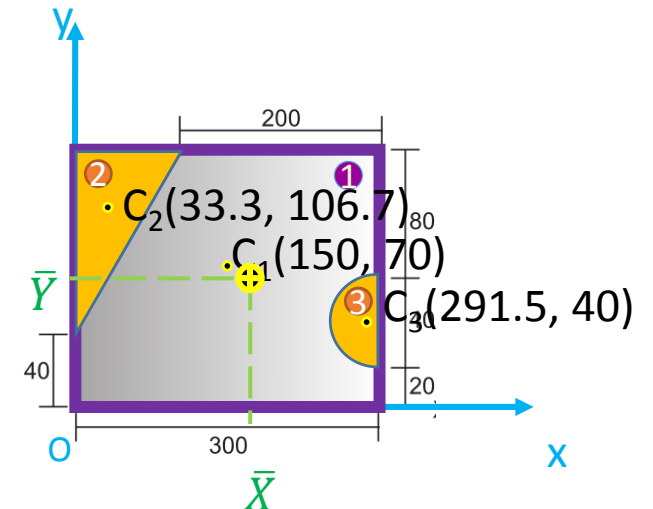
$$\sum \vec{M} = 0$$



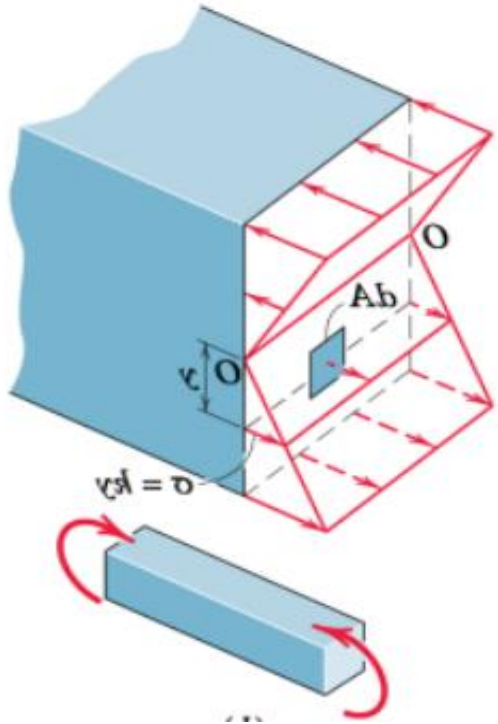
مرکز سطح

$$\bar{X} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

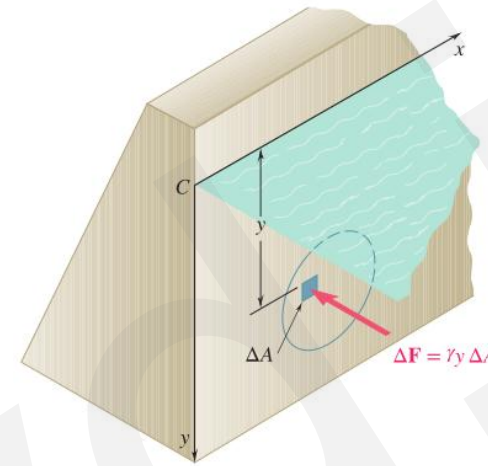
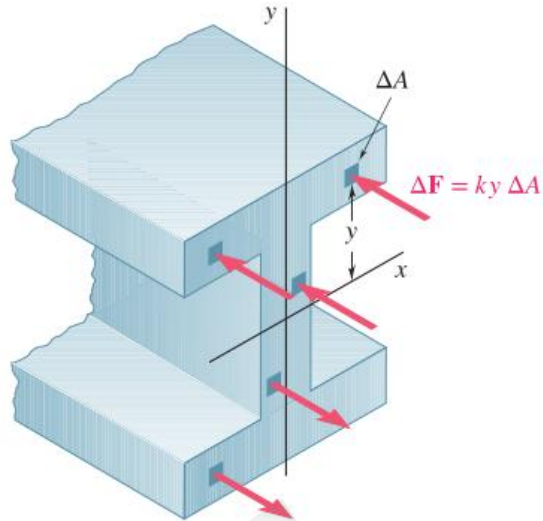


ممان اینرسی چیست؟



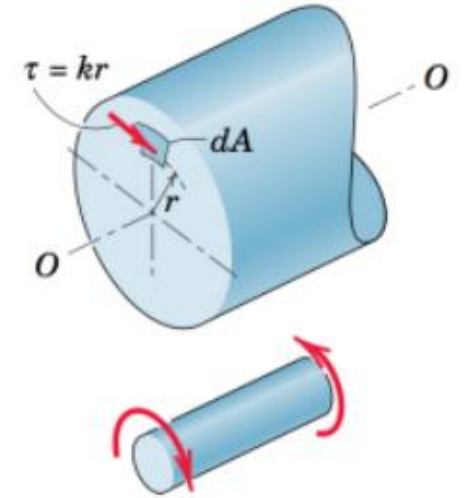
$$R = \int ky dA = k \int y dA$$

$$M = \int ky^2 dA = k \int y^2 dA \quad \sigma = \frac{Mc}{\int y^2 dA}$$



$$R = \int \gamma y dA = \gamma \int y dA$$

$$M_x = \int \gamma y^2 dA = \gamma \int y^2 dA$$



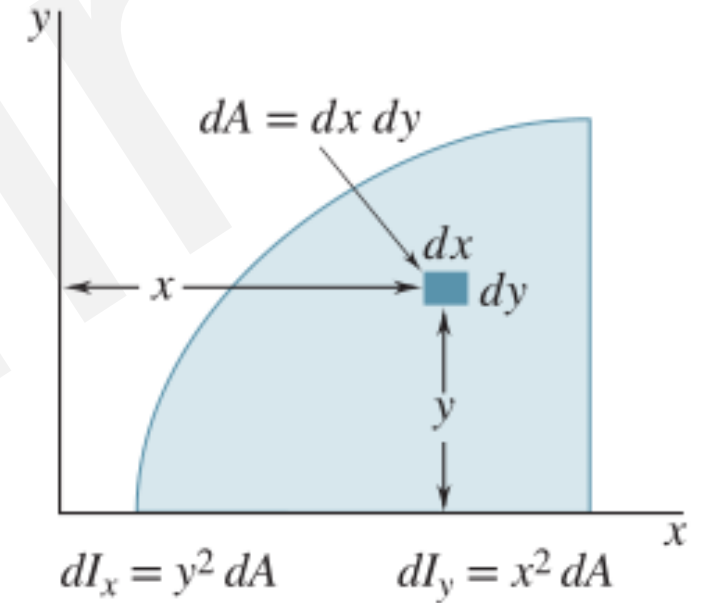
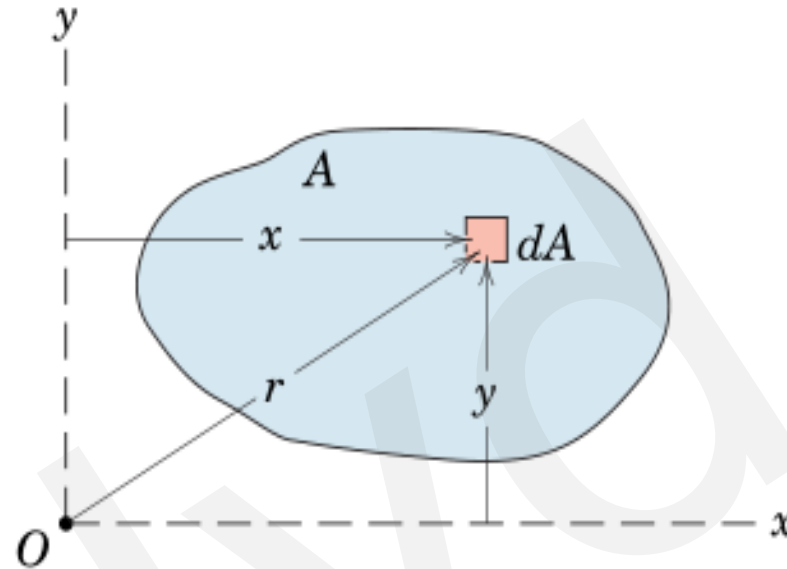
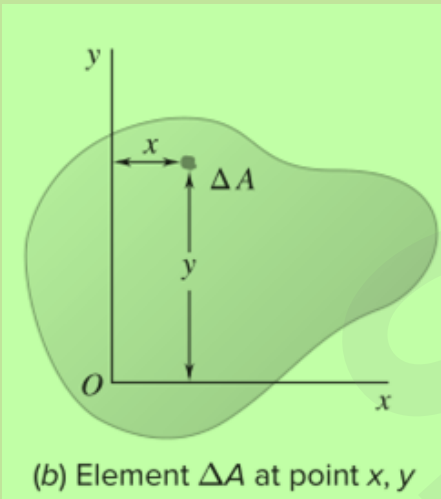
$$\tau = \frac{Tc}{\int r^2 dA}$$

تعریف ریاضی ممان اینرسی سطح (گشتاور دوم سطح)

مرکز سطح

$$\bar{x} = \frac{\int x \, dA}{\int dA}$$

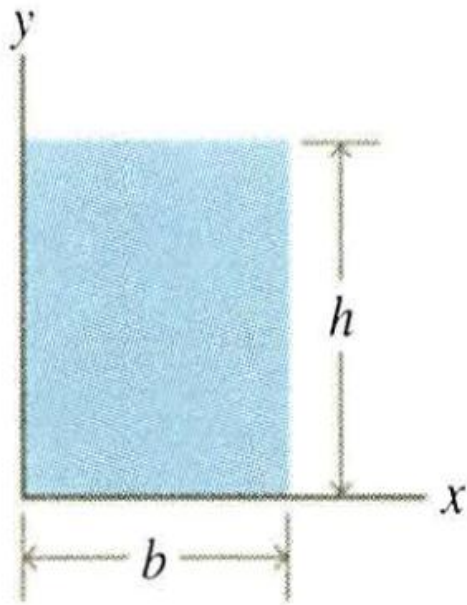
$$\bar{y} = \frac{\int y \, dA}{\int dA}$$

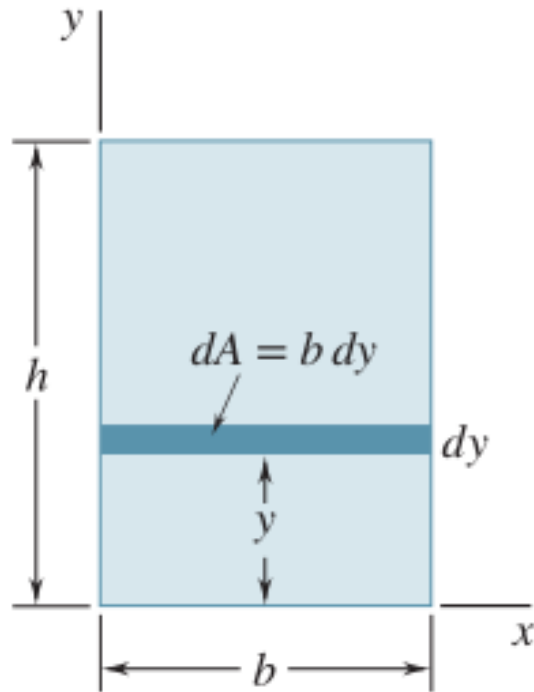


$$I_x = \int y^2 \, dA$$

$$I_y = \int x^2 \, dA$$

ممان اینرسی مستطیل به ارتفاع h و پهنای b را نسبت به محور x به دست آورید.





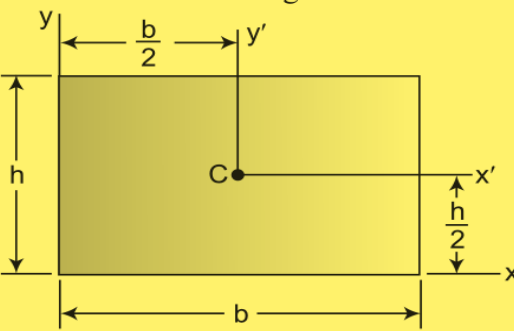
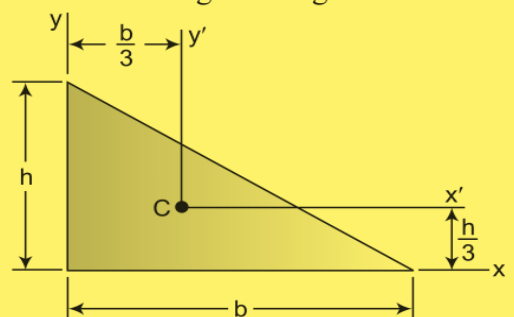
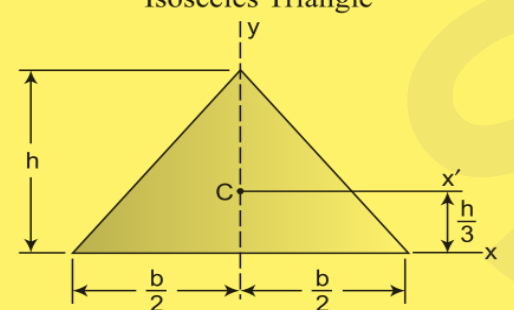
$$I_x = \int_0^h y^2 dA$$

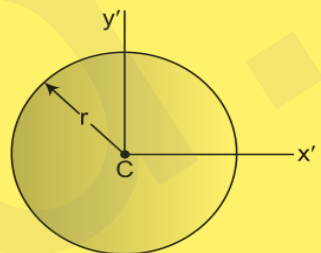
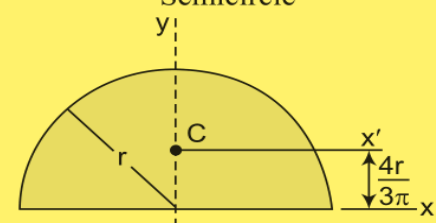
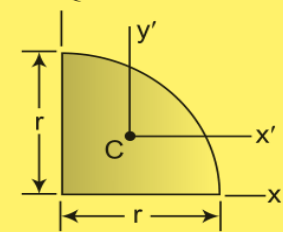
$$dA = b dy$$

$$I_x = \int_0^h y^2 b dy = b \int_0^h y^2 dy$$

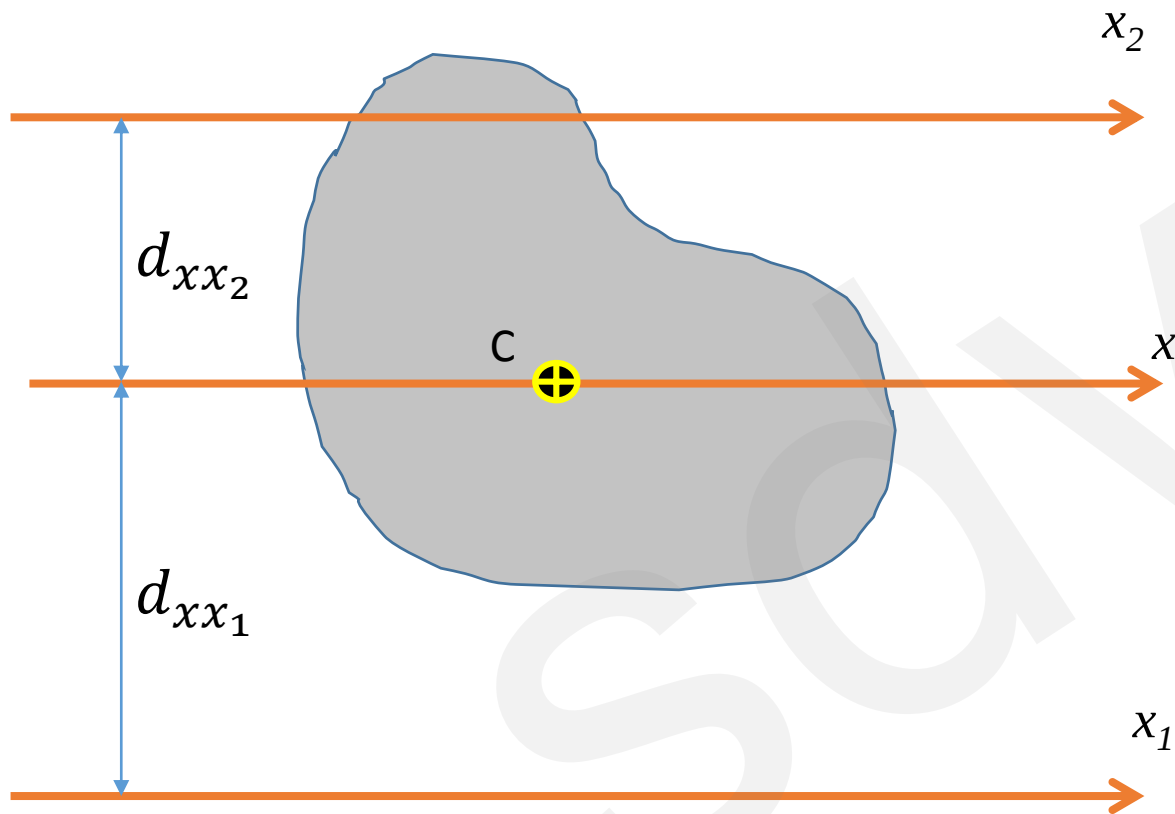
$$I_x = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

جدول ممان اینرسی سطوح هندسی

Shape	Moment of Inertia
Rectangle 	$I_{x'} = \frac{1}{12}bh^3 \quad I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_{y'} = \frac{1}{12}b^3h \quad I_y = \frac{1}{3}b^3h$
Right Triangle 	$I_{x'} = \frac{1}{36}bh^3 \quad I_x = \frac{1}{12}bh^3$ $I_{y'} = \frac{1}{36}hb^3 \quad I_y = \frac{1}{12}hb^3$
Isosceles Triangle 	$I_{x'} = \frac{1}{36}bh^3 \quad I_x = \frac{1}{12}bh^3$ $I_{y'} = \frac{1}{48}hb^3$

Circle 	$I_{x'} = I_{y'} = \frac{1}{4}\pi r^4$
Semicircle 	$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $I_{x'} = 0.1098r^4$
Quarter Circle 	$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $I_{x'} = I_{y'} = 0.05488r^4$

قضیه محوره‌های موازی



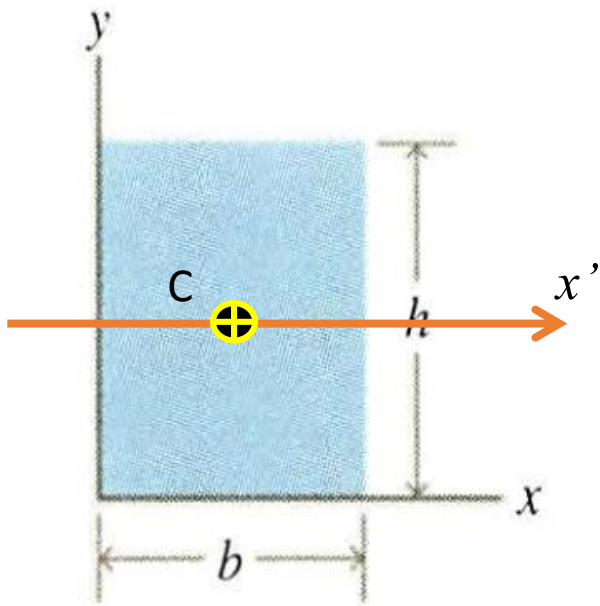
$$I_{x_1} = \bar{I}_x + A(d_{xx_1})^2$$

$$I_{x_2} = \bar{I}_x + A(d_{xx_2})^2$$

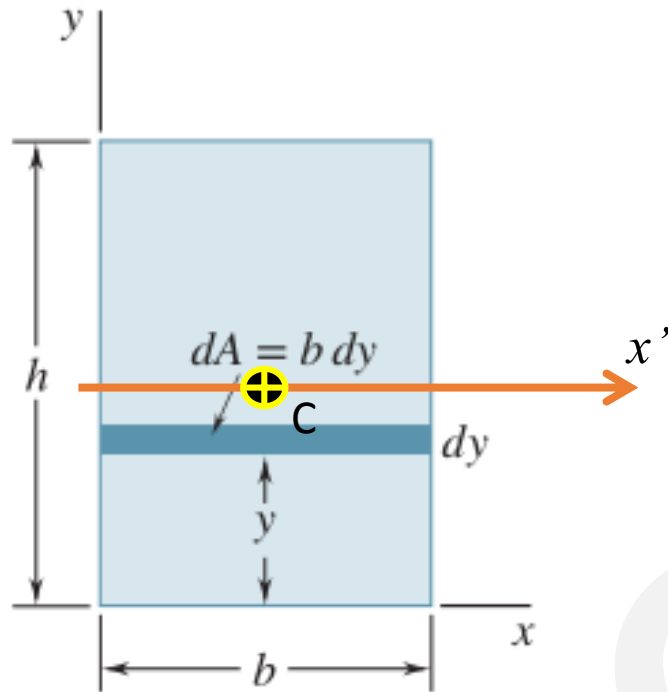
$$I = \bar{I} + Ad^2$$

مثال

ممان اینرسی مستطیل به ارتفاع h و پهنای b را نسبت به محور x' که از مرکز سطحش می‌گذرد به دست آورید.



روش اول: محاسبه با تعریف ممان اینرسی (انتگرال)



$$\overline{I_{x'}} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dA$$

$$dA = b dy$$

$$\overline{I_{x'}} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy$$

$$\overline{I_{x'}} = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$

روش دوم: قضیه محوره‌های موازی

در مثال قبل ثابت شد:

$$I_x = \frac{bh^3}{3}$$

با کمک قضیه محوره‌های موازی داریم:

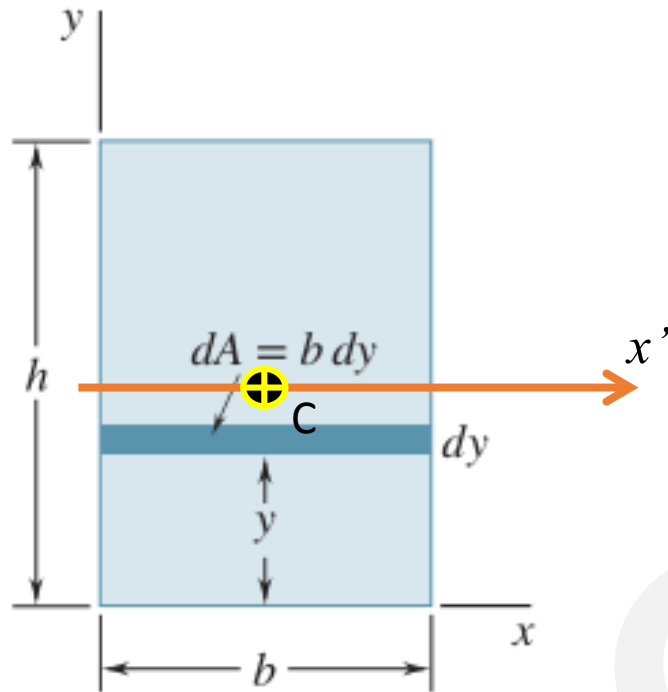
$$I = \bar{I} + Ad^2$$

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ad_{xx'}^2$$

$$\frac{bh^3}{3} = \bar{I}_{x'} + bh * \frac{h^2}{2}$$

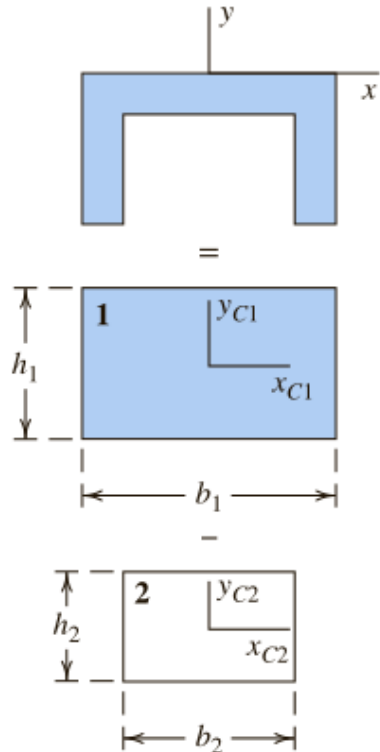
$$\bar{I}_{x'} = \frac{bh^3}{3} - bh * \frac{h^2}{2}$$

$$\bar{I}_{x'} = \frac{bh^3}{12}$$



ممان اینرسی سطوح مرکب

گام‌های حل



1. انتخاب دستگاه و مبدا مختصات مطابق خواسته مساله
▪ تا انتهای حل تغییر نکند.
2. تجزیه سطح مرکب به سطوح پایه هندسی و شماره گذاری هر سطح
▪ سطوح ممکن است اضافه شده یا برداشته شده باشند.
▪ حداقل تعداد ممکن بهتر است.
3. تعیین مختصات مرکز هر یک از سطوح پایه هندسی نسبت به دستگاه و مبدا مختصات
4. محاسبه ممان اینرسی هر یک از سطوح پایه نسبت به محورهای مختصاتی که از مرکز آن سطح می‌گذرد (با استفاده از جدول).
5. محاسبه ممان اینرسی هر یک از سطوح پایه نسبت به محورهای مختصات خواسته شده (با استفاده از قضیه محورهای موازی $I = \bar{I} + Ad^2$).
6. جمع ممان اینرسی‌های تمامی اجزاء.
▪ ممان اینرسی سطوح برداشته شده از ممان اینرسی کل کم می‌شود.

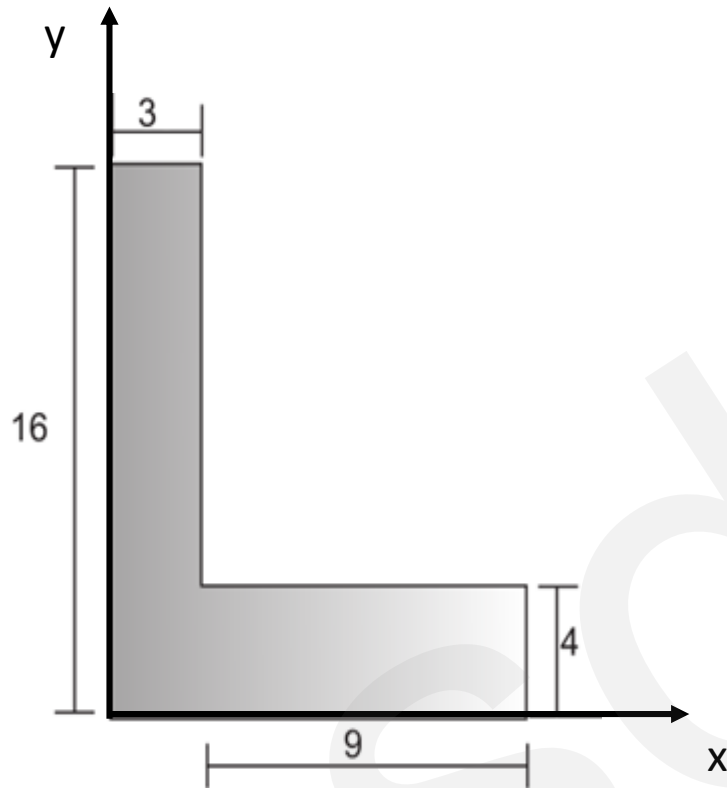
ممان اینرسی هیچ سطحی منفی نیست.

ممان اینرسی سطوح مرکب

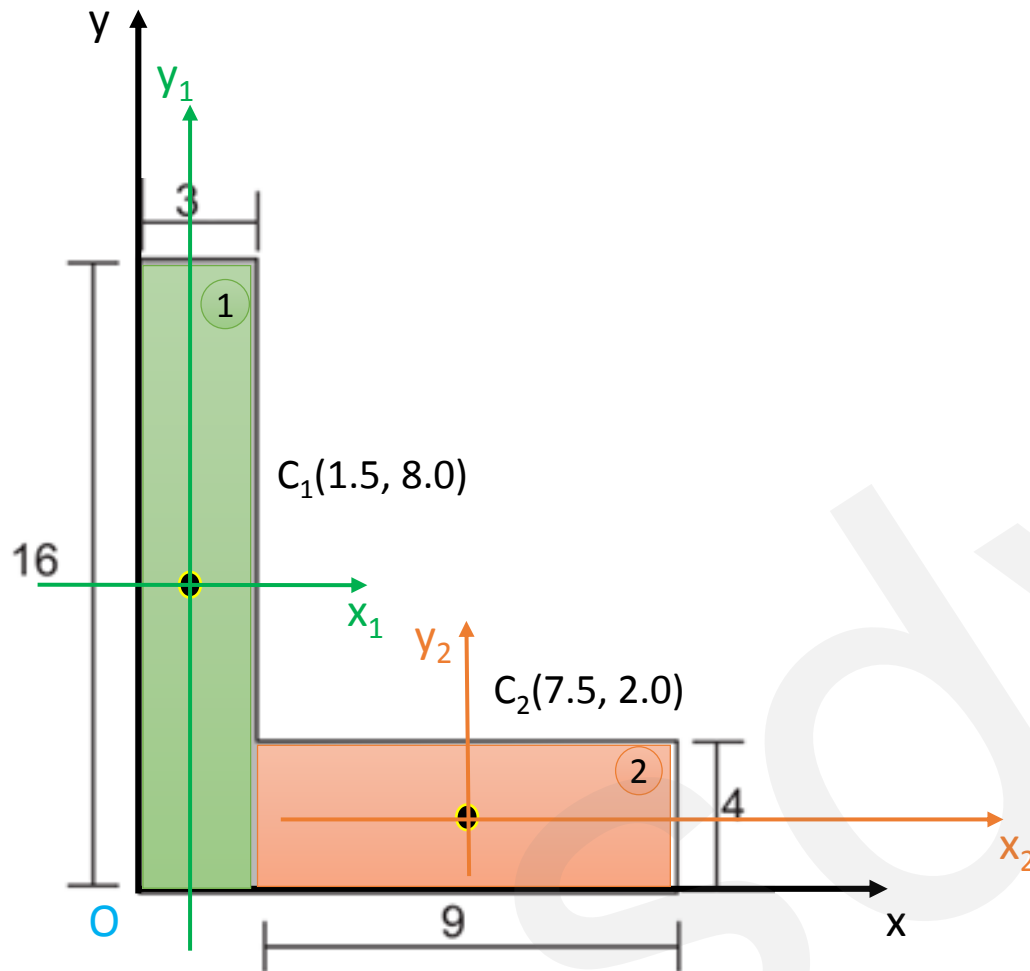
i	$\overline{I_{ix_i}}$	$\overline{I_{iy_i}}$	A_i	$d_{x_i x}$	$d_{y_i y}$	$A_i * d_{x_i x}^2$	$A_i * d_{y_i y}^2$	$\overline{I_{ix_i}} + A_i * d_{x_i x}^2$	$\overline{I_{iy_i}} + A_i * d_{y_i y}^2$
								Σ	Σ

مثال 1

ممان اینرسی سطح مقابل را نسبت به محورهای افقی
و قائم مشخص شده بیابید. (ابعاد به cm)



مثال 1



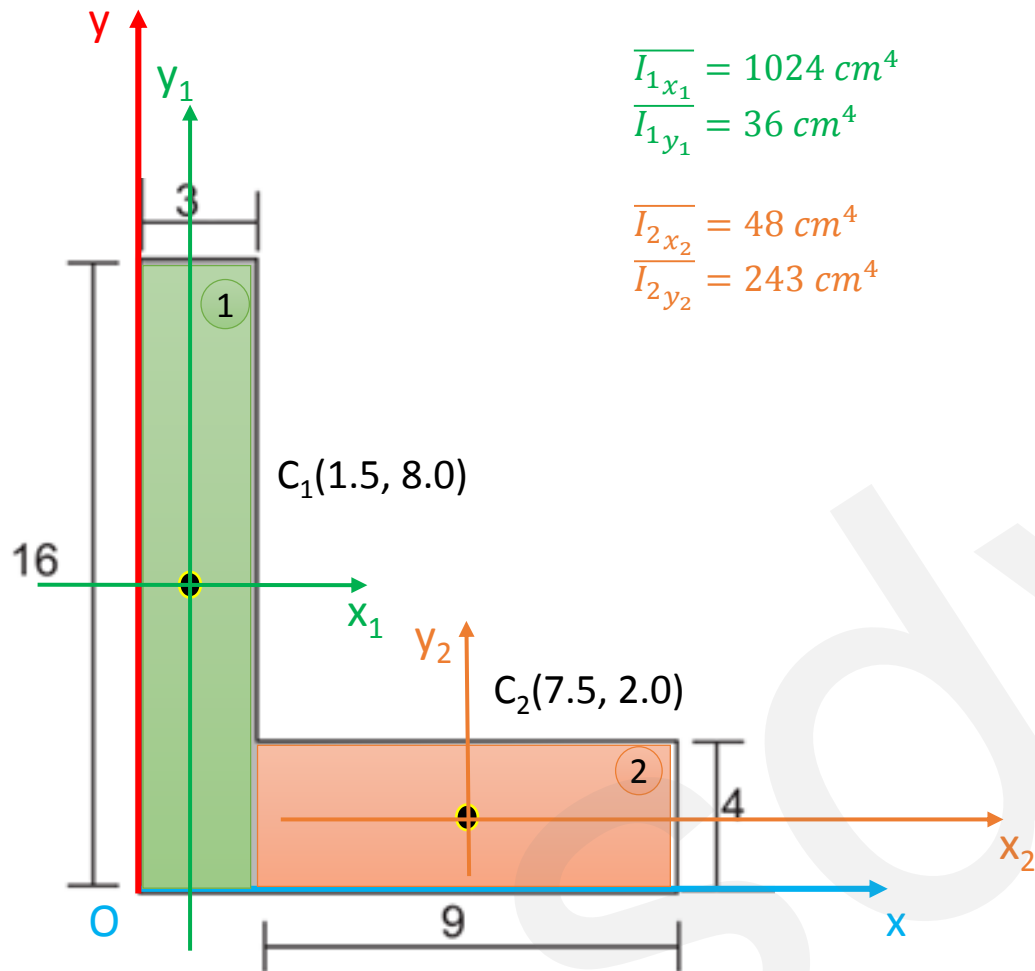
$$\overline{I_{1x_1}} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{3 * 16^3}{12} = 1024 \text{ cm}^4$$

$$\overline{I_{1y_1}} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{16 * 3^3}{12} = 36 \text{ cm}^4$$

$$\overline{I_{2x_2}} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{9 * 4^3}{12} = 48 \text{ cm}^4$$

$$\overline{I_{2y_2}} = \frac{h_2 b_2^3}{12} = \frac{4 * 9^3}{12} = 243 \text{ cm}^4$$

مثال 1



$$I = \bar{I} + Ad^2$$

$$I_{1x} = \bar{I}_{1x_1} + A_1 (d_{xx_1})^2 = 1024 + 3 * 16 * (8 - 0)^2 = 4096 \text{ cm}^4$$

$$I_{2x} = \bar{I}_{2x_2} + A_2 (d_{xx_2})^2 = 48 + 9 * 4 * (2 - 0)^2 = 192 \text{ cm}^4$$

$$I_x = I_{1x} + I_{2x} = 4096 + 192 = 4288 \text{ cm}^4$$

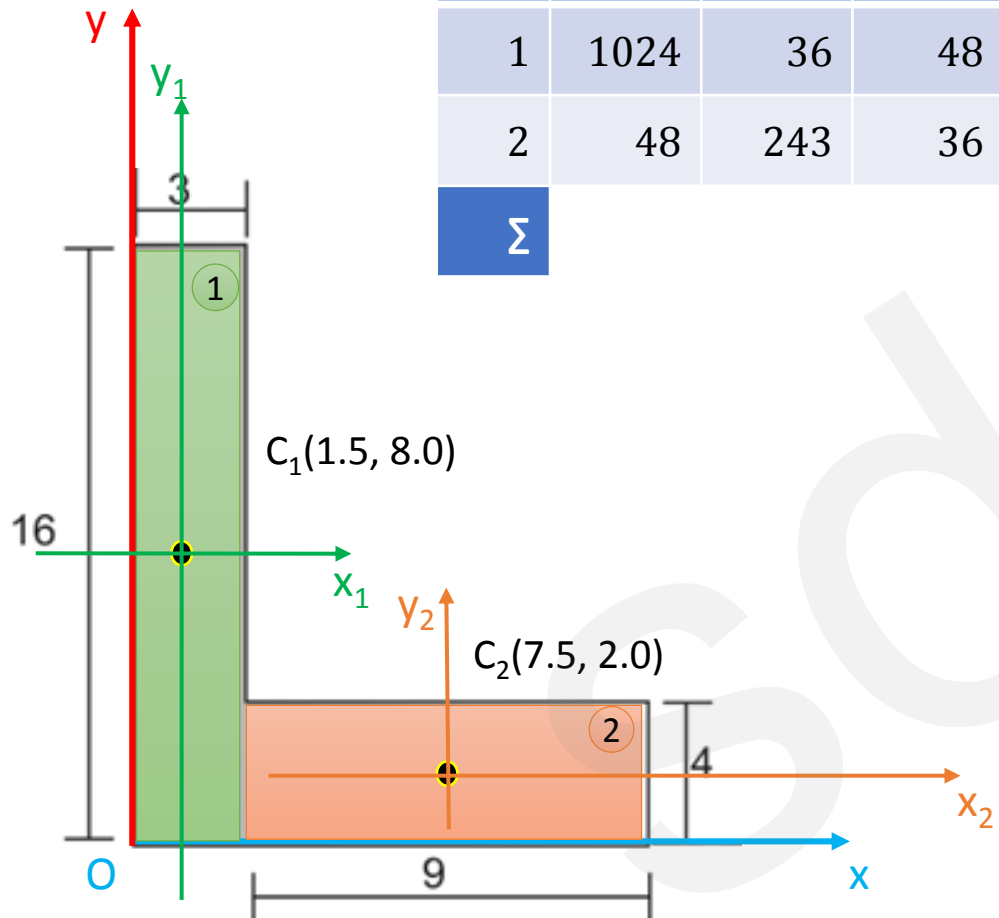
$$I_{1y} = \bar{I}_{1y_1} + A_1 (d_{yy_1})^2 = 36 + 3 * 16 * (1.5 - 0)^2 = 144 \text{ cm}^4$$

$$I_{2y} = \bar{I}_{2y_2} + A_2 (d_{yy_2})^2 = 243 + 9 * 4 * (7.5 - 0)^2 = 2268 \text{ cm}^4$$

$$I_y = I_{1y} + I_{2y} = 144 + 2268 = 2412 \text{ cm}^4$$

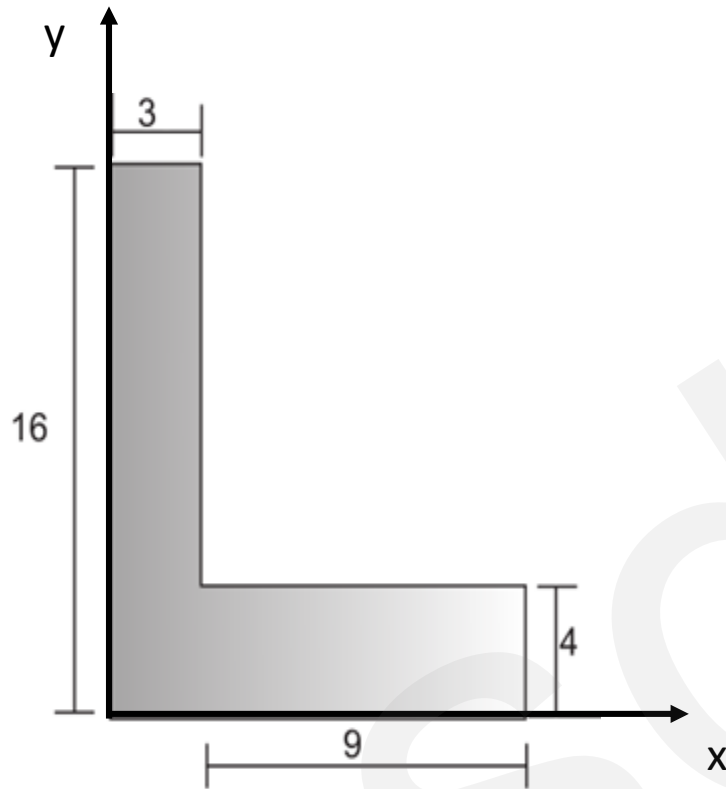
مثال 1

i	$\overline{I_{i_{x_i}}}$	$\overline{I_{i_{y_i}}}$	A_i	$d_{x_{ix}}$	$d_{y_{iy}}$	$A_i * d_{x_{ix}}^2$	$A_i * d_{y_{iy}}^2$	$\overline{I_{i_{x_i}}} + A_i * d_{x_{ix}}^2$	$\overline{I_{i_{y_i}}} + A_i * d_{y_{iy}}^2$
1	1024	36	48	8	1.5	3072	108	4096	144
2	48	243	36	2	7.5	144	2025	192	2268
Σ								4288	2412



مثال 2

ممان اینرسی سطح مقابل را نسبت به محورهای افقی
و قائم گذرنده از مرکز سطح بیابید. (ابعاد به cm)



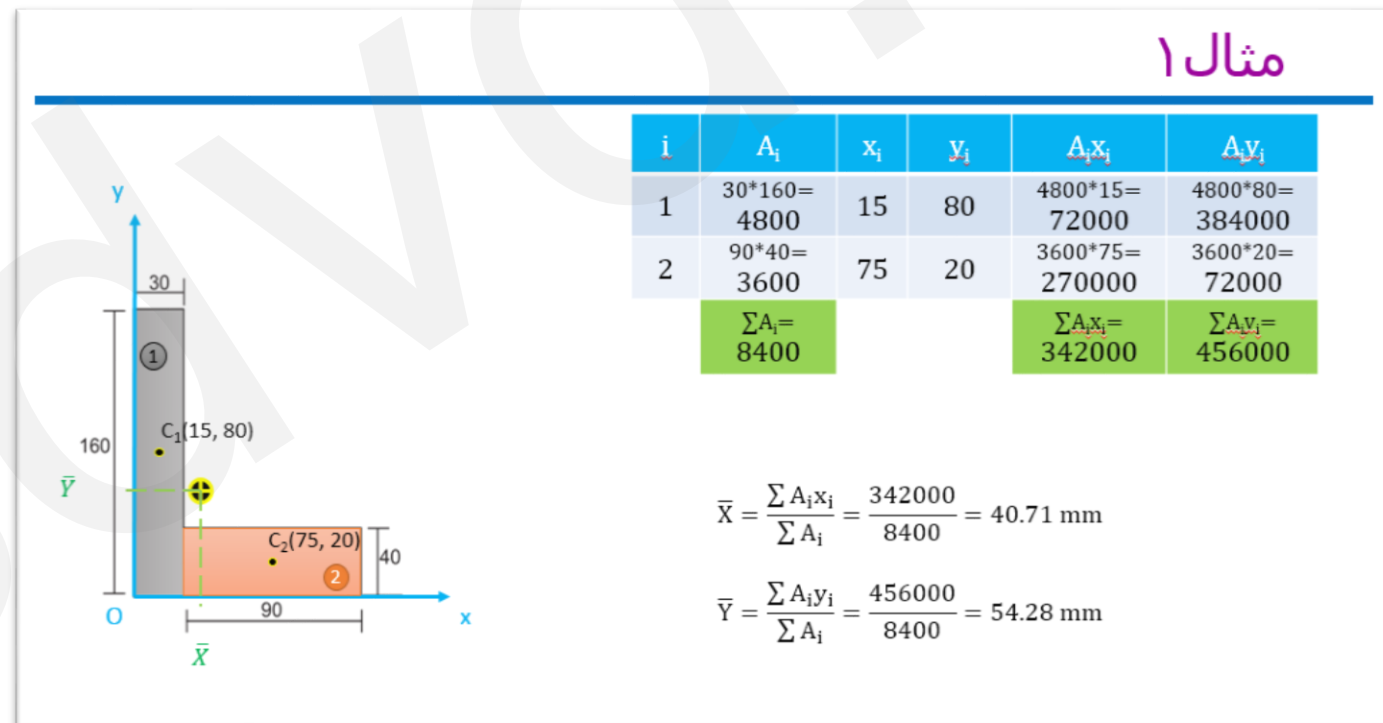
مثال 2

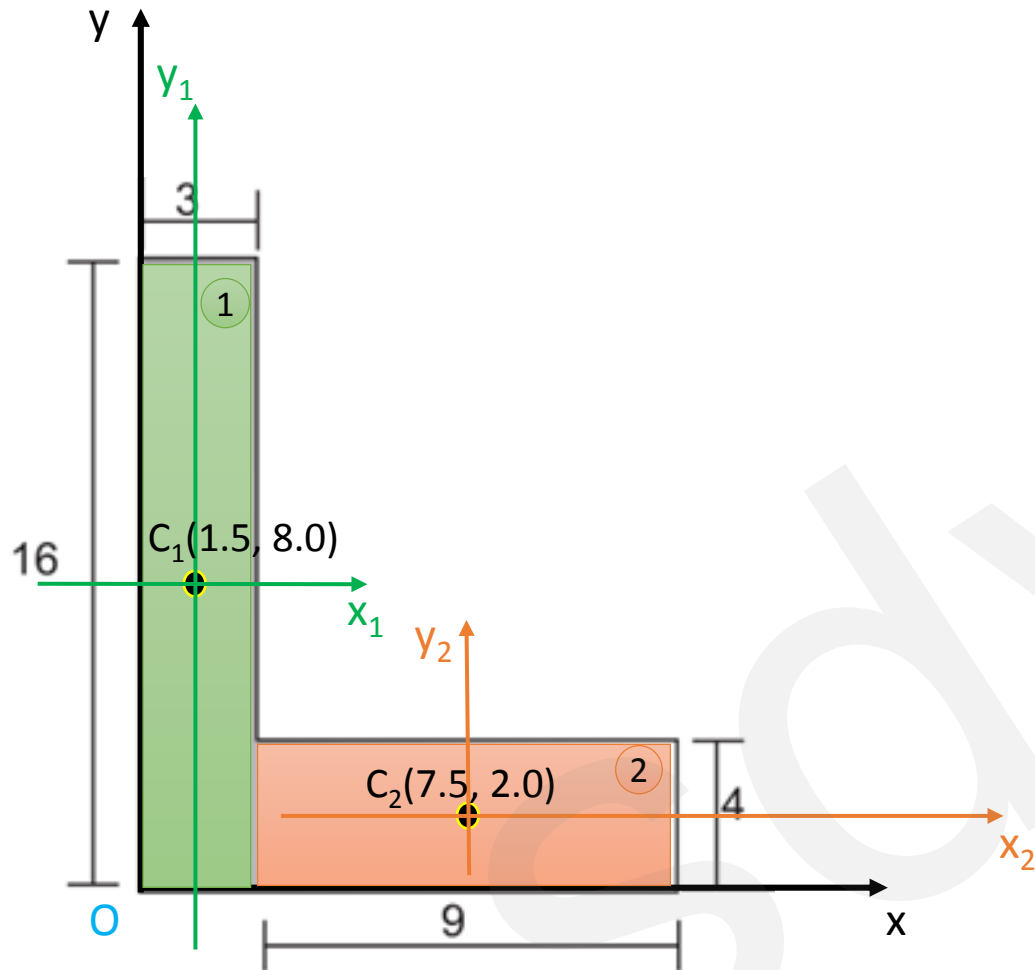
مرحله اول حل: یافتن مرکز سطح شکل مرکب اگر مساله پاسخ را نسبت به محورهای افقی و قائم گذرنده از مرکز سطح خواسته باشد.

(مرکز سطح این شکل جلسه قبل محاسبه شد):

$$\bar{X} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = 4.1 \text{ cm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = 5.4 \text{ cm}$$





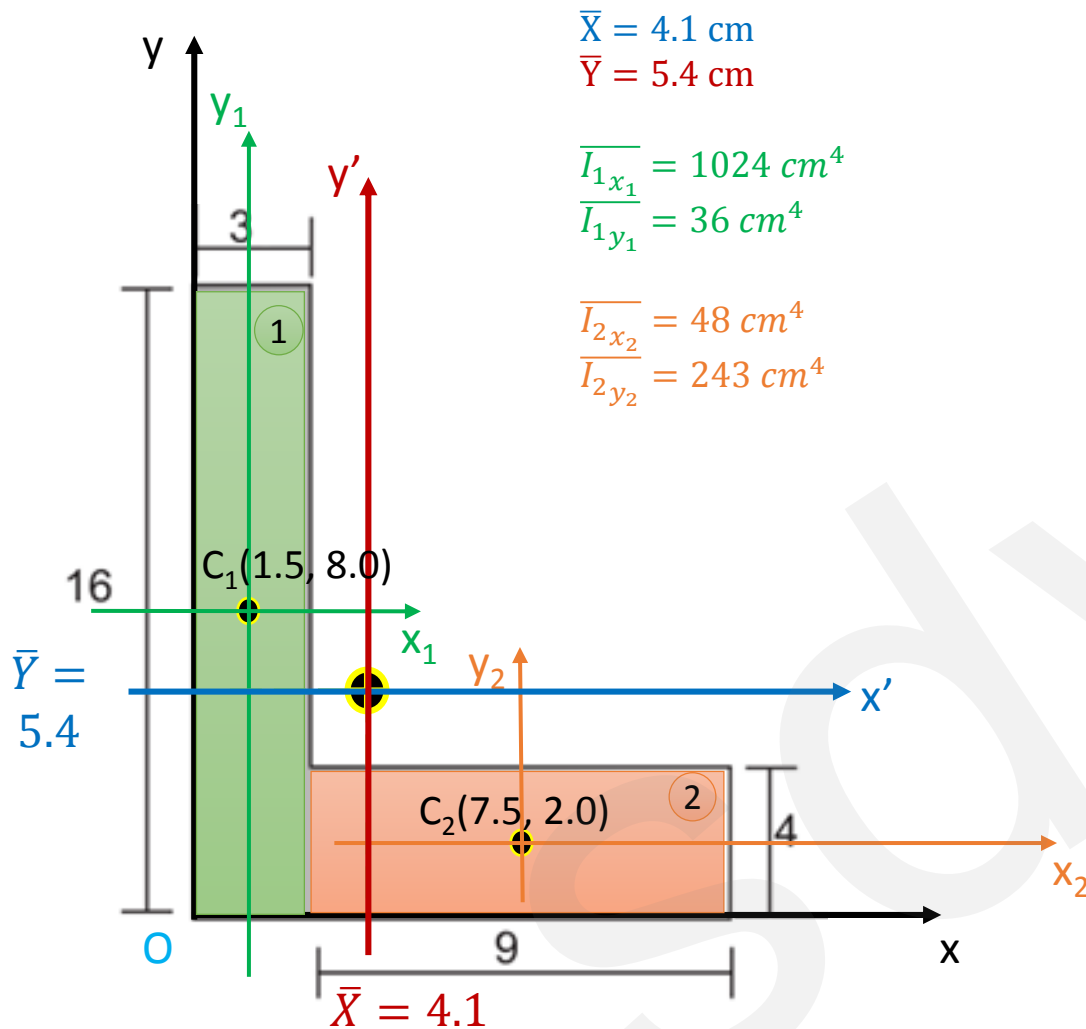
$$\overline{I_{1x_1}} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{3 * 16^3}{12} = 1024 \text{ cm}^4$$

$$\overline{I_{1y_1}} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{16 * 3^3}{12} = 36 \text{ cm}^4$$

$$\overline{I_{2x_2}} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{9 * 4^3}{12} = 48 \text{ cm}^4$$

$$\overline{I_{2y_2}} = \frac{h_2 b_2^3}{12} = \frac{4 * 9^3}{12} = 243 \text{ cm}^4$$

مثال 2



$$I = \bar{I} + Ad^2$$

$$I_{1x'} = \bar{I}_{1x_1} + A_1 (d_{x'x_1})^2 = 1024 + 3 * 16 * (8 - 5.4)^2 = 1348.5 \text{ cm}^4$$

$$I_{2x'} = \bar{I}_{2x_2} + A_2 (d_{x'x_2})^2 = 48 + 9 * 4 * (2 - 5.4)^2 = 464.2 \text{ cm}^4$$

$$\bar{I}_{x'} = I_{1x'} + I_{2x'} = 1348.5 + 464.2 = 1812.7 \text{ cm}^4$$

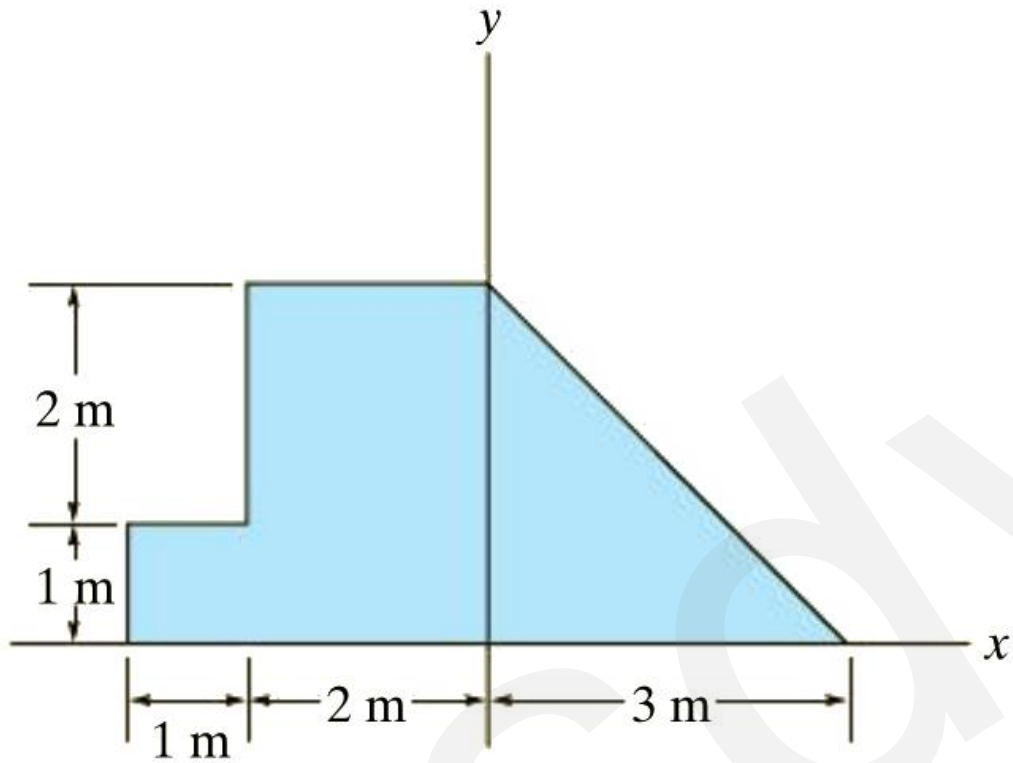
$$I_{1y'} = \bar{I}_{1y_1} + A_1 (d_{y'y_1})^2 = 36 + 3 * 16 * (1.5 - 4.1)^2 = 360.5 \text{ cm}^4$$

$$I_{2y'} = \bar{I}_{2y_2} + A_2 (d_{y'y_2})^2 = 243 + 9 * 4 * (7.5 - 4.1)^2 = 659.2 \text{ cm}^4$$

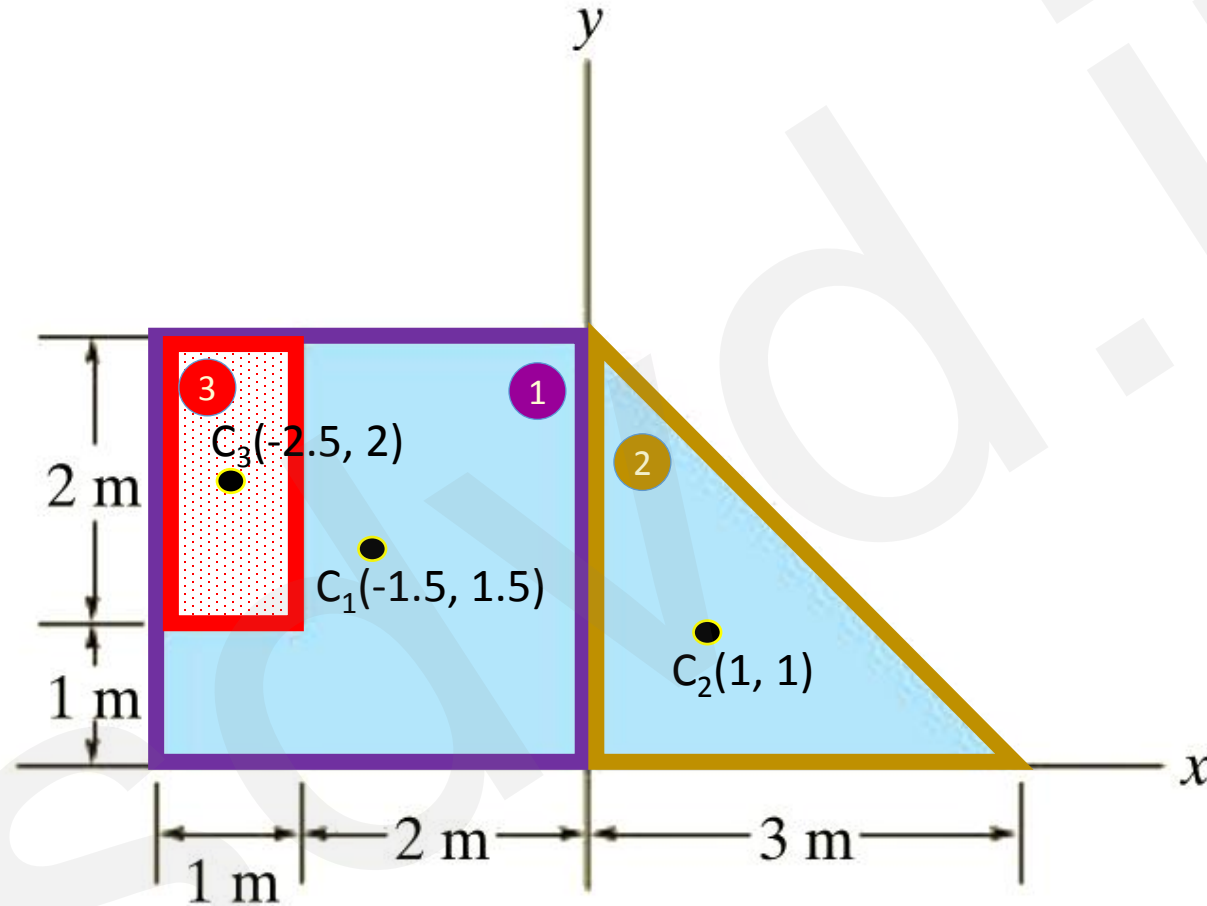
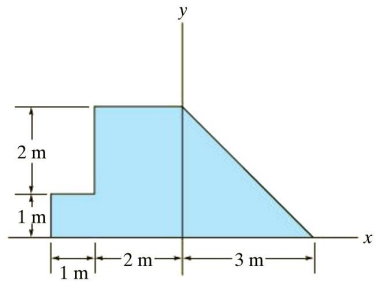
$$\bar{I}_{y'} = I_{1y'} + I_{2y'} = 360.5 + 659.2 = 1019.7 \text{ cm}^4$$

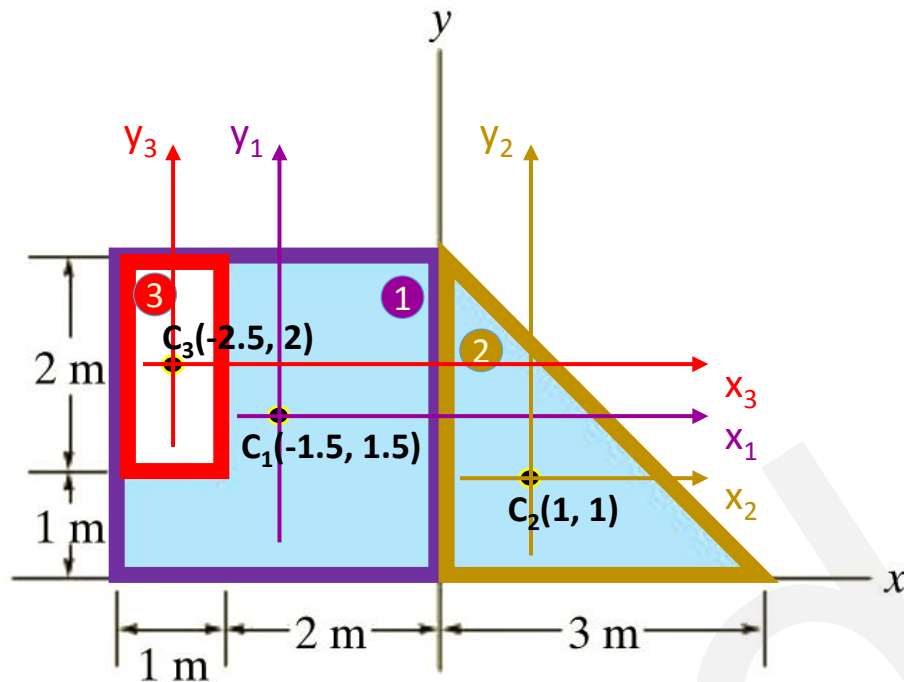
مثال 3

ممان اینرسی سطح مقابل را نسبت به محوره‌های x و y بیابید.



مثال 3





$$\overline{I_{1x_1}} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{3 * 3^3}{12} = 6.75 \text{ m}^4$$

$$\overline{I_{1y_1}} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{3 * 3^3}{12} = 6.75 \text{ m}^4$$

$$\overline{I_{2x_2}} = \frac{b_2 h_2^3}{36} = \frac{3 * 3^3}{36} = 2.25 \text{ m}^4$$

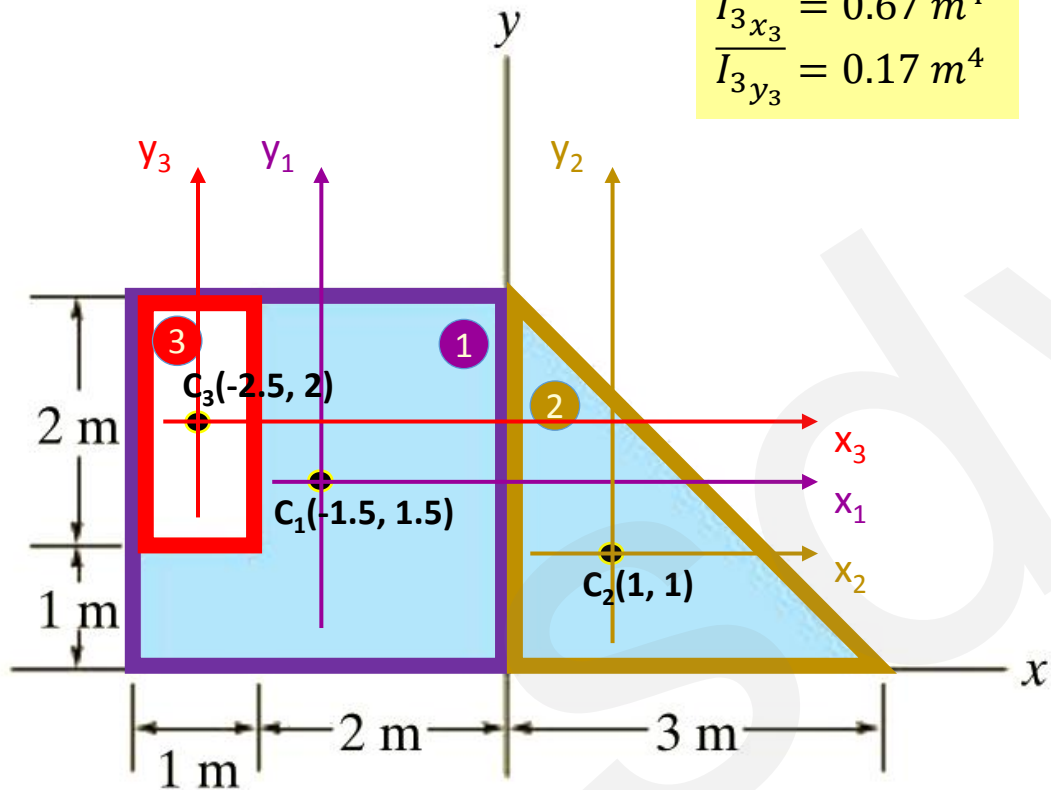
$$\overline{I_{2y_2}} = \frac{h_2 b_2^3}{36} = \frac{3 * 3^3}{36} = 2.25 \text{ m}^4$$

$$\overline{I_{3x_3}} = \frac{b_3 h_3^3}{12} = \frac{1 * 2^3}{12} = 0.67 \text{ m}^4$$

$$\overline{I_{3y_3}} = \frac{h_3 b_3^3}{12} = \frac{2 * 1^3}{12} = 0.17 \text{ m}^4$$

مثال 3

$$\begin{aligned}\overline{I_{1x_1}} &= 6.75 \text{ m}^4 \\ \overline{I_{1y_1}} &= 6.75 \text{ m}^4 \\ \overline{I_{2x_2}} &= 2.25 \text{ m}^4 \\ \overline{I_{2y_2}} &= 2.25 \text{ m}^4 \\ \overline{I_{3x_3}} &= 0.67 \text{ m}^4 \\ \overline{I_{3y_3}} &= 0.17 \text{ m}^4\end{aligned}$$



$$I_{1x} = \overline{I_{1x_1}} + A_1 (d_{xx_1})^2 = 6.75 + 3 * 3 * (1.5 - 0)^2 = 27 \text{ m}^4$$

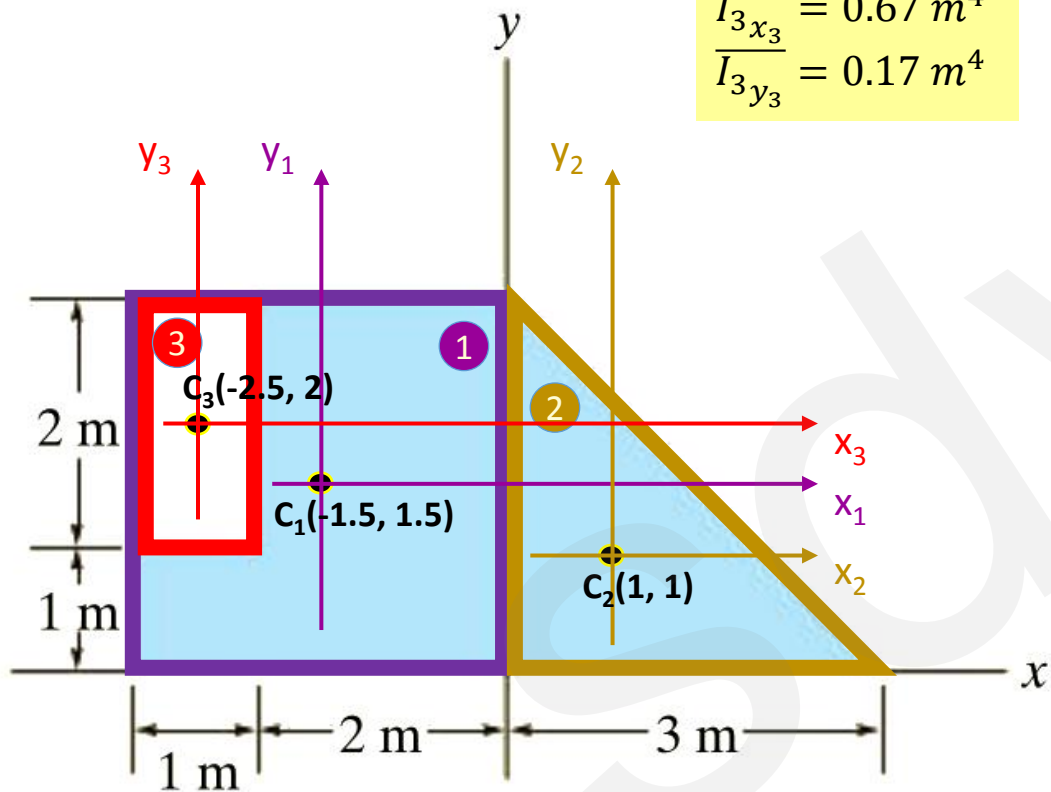
$$I_{2x} = \overline{I_{2x_2}} + A_2 (d_{xx_2})^2 = 2.25 + \frac{3 * 3}{2} * (1 - 0)^2 = 6.75 \text{ m}^4$$

$$I_{3x} = \overline{I_{3x_3}} + A_3 (d_{xx_3})^2 = 0.67 + 1 * 2 * (2 - 0)^2 = 8.67 \text{ m}^4$$

$$I_x = I_{1x} + I_{2x} - I_{3x} = 27 + 6.75 - 8.67 = 25.08 \text{ m}^4$$

مثال 3

$$\begin{aligned}\overline{I_{1x_1}} &= 6.75 \text{ m}^4 \\ \overline{I_{1y_1}} &= 6.75 \text{ m}^4 \\ \overline{I_{2x_2}} &= 2.25 \text{ m}^4 \\ \overline{I_{2y_2}} &= 2.25 \text{ m}^4 \\ \overline{I_{3x_3}} &= 0.67 \text{ m}^4 \\ \overline{I_{3y_3}} &= 0.17 \text{ m}^4\end{aligned}$$



$$I_{1y} = \overline{I_{1y_1}} + A_1 (d_{yy_1})^2 = 6.75 + 3 * 3 * (-1.5 - 0)^2 = 27 \text{ m}^4$$

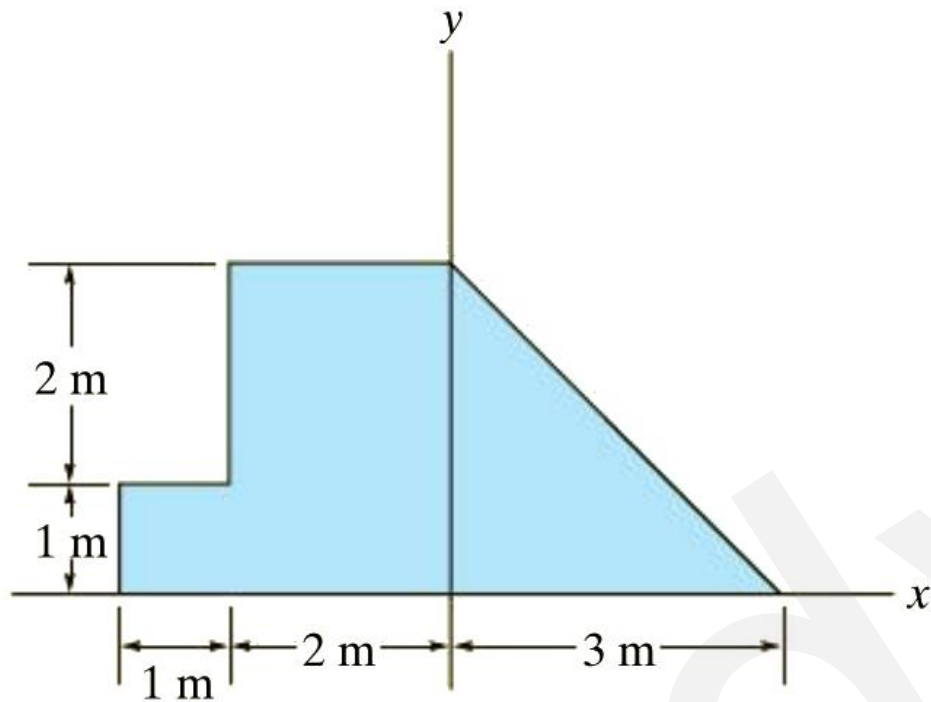
$$I_{2y} = \overline{I_{2y_2}} + A_2 (d_{yy_2})^2 = 2.25 + \frac{3 * 3}{2} * (1 - 0)^2 = 6.75 \text{ m}^4$$

$$I_{3y} = \overline{I_{3y_3}} + A_3 (d_{yy_3})^2 = 0.17 + 1 * 2 * (-2.5 - 0)^2 = 12.67 \text{ m}^4$$

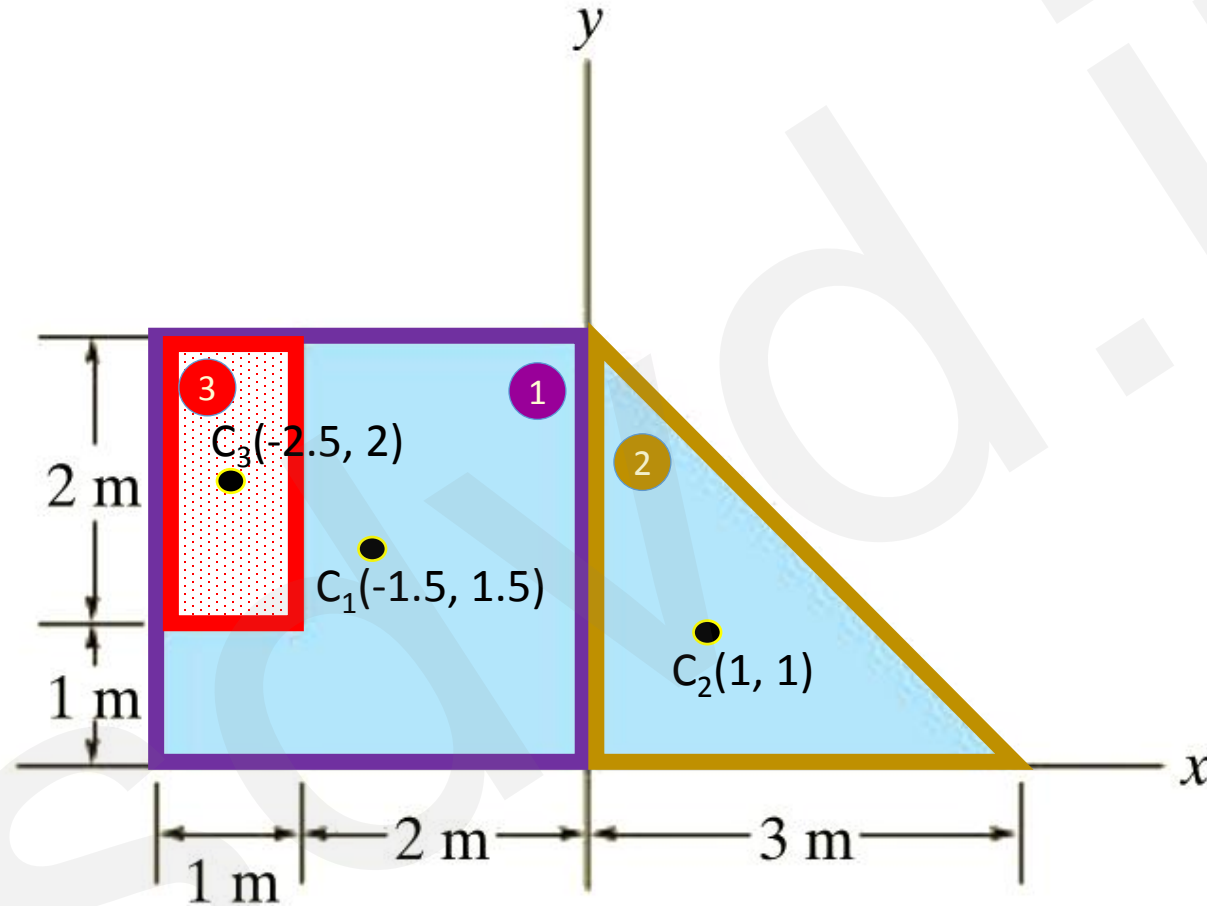
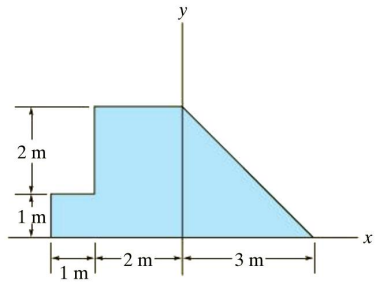
$$I_y = I_{1y} + I_{2y} - I_{3y} = 27 + 6.75 - 12.67 = 21.08 \text{ m}^4$$

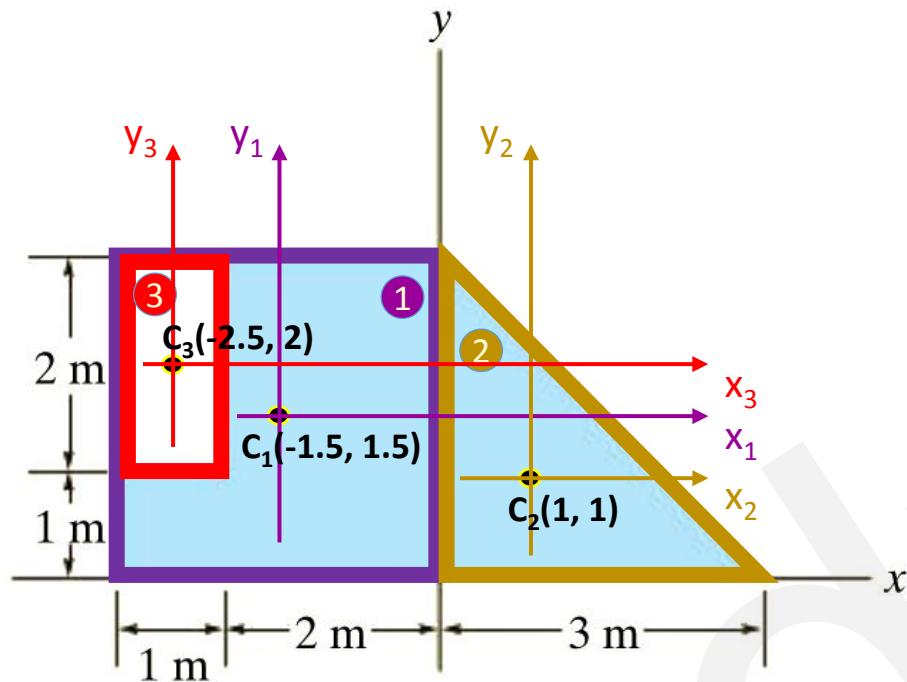
مثال 4

ممان اینرسی سطح مقابل را نسبت به محوره‌های افقی و قائم گذرنده از مرکز سطح بیابید.



مثال 4





$$\overline{I_{1x_1}} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{3 * 3^3}{12} = 6.75 \text{ m}^4$$

$$\overline{I_{1y_1}} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{3 * 3^3}{12} = 6.75 \text{ m}^4$$

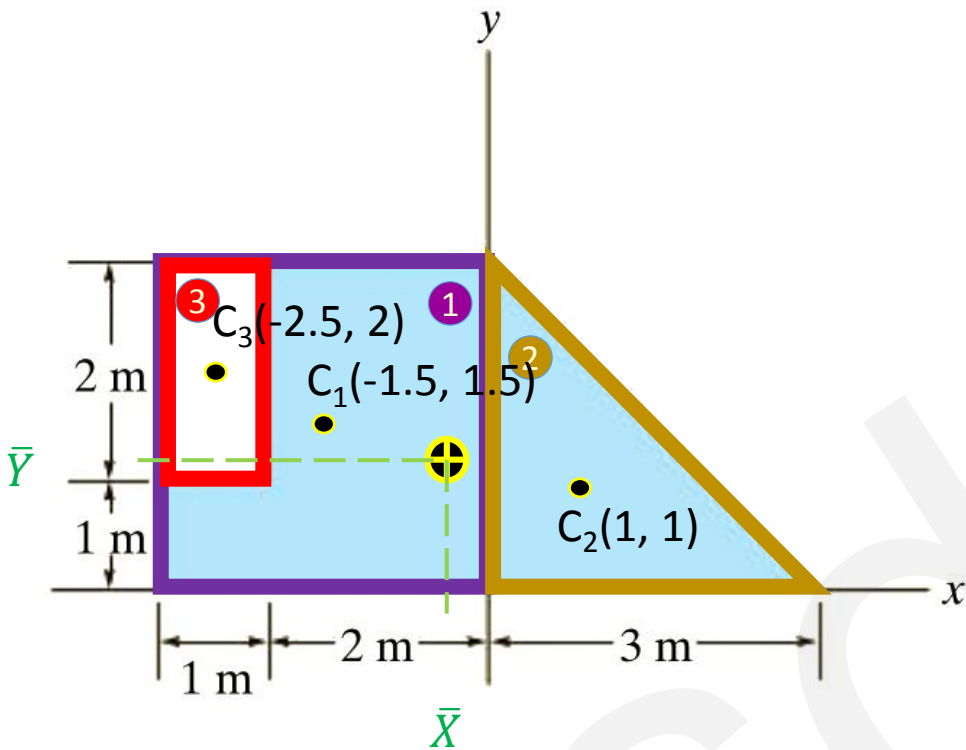
$$\overline{I_{2x_2}} = \frac{b_2 h_2^3}{36} = \frac{3 * 3^3}{36} = 2.25 \text{ m}^4$$

$$\overline{I_{2y_2}} = \frac{h_2 b_2^3}{36} = \frac{3 * 3^3}{36} = 2.25 \text{ m}^4$$

$$\overline{I_{3x_3}} = \frac{b_3 h_3^3}{12} = \frac{1 * 2^3}{12} = 0.67 \text{ m}^4$$

$$\overline{I_{3y_3}} = \frac{h_3 b_3^3}{12} = \frac{2 * 1^3}{12} = 0.17 \text{ m}^4$$

مثال 4

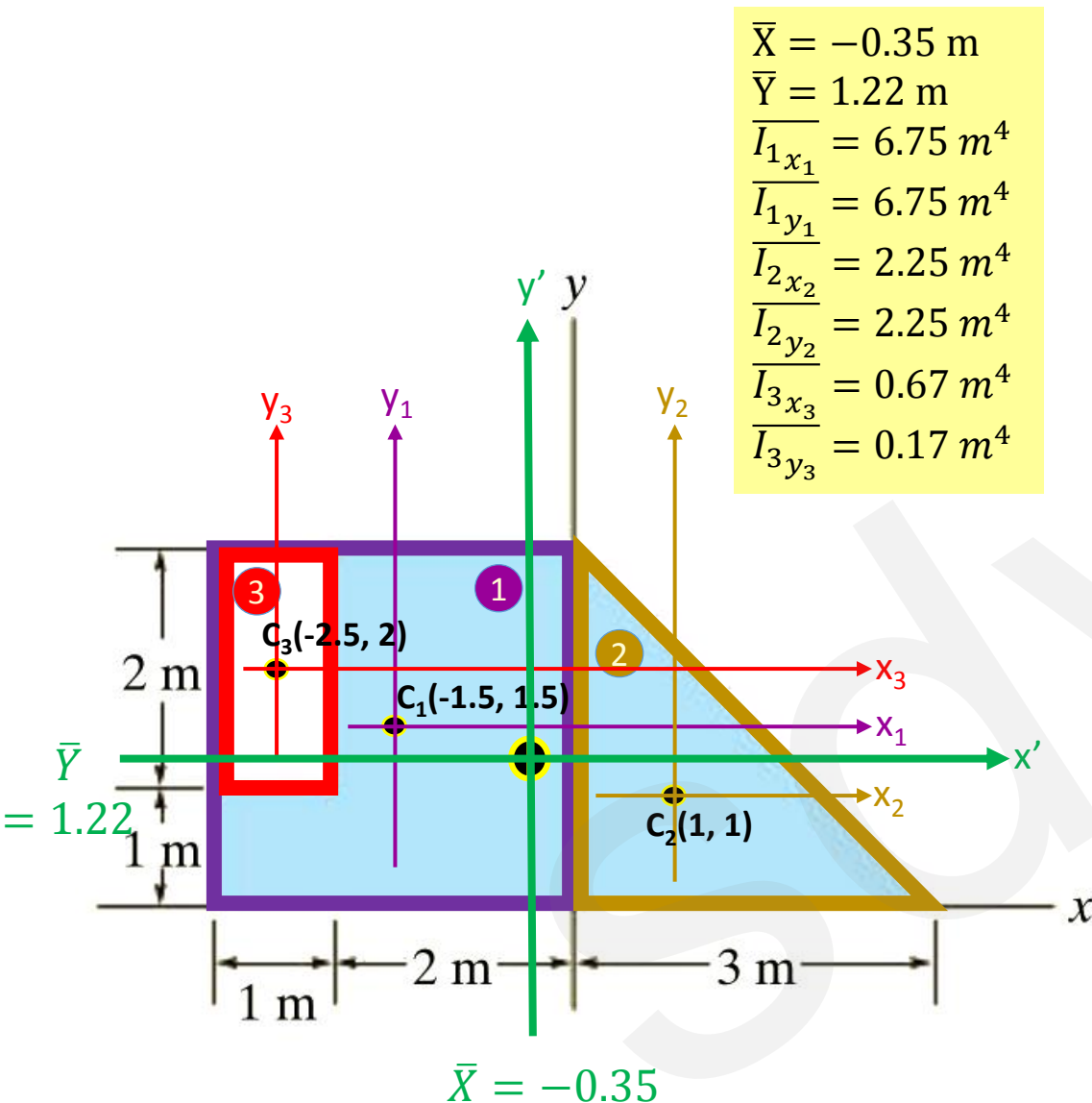


i	A_i	x_i	y_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1	$3 \times 3 = 9$	-1.5	1.5	$9 \times (-1.5) = -13.5$	$9 \times 1.5 = 13.5$
2	$3 \times 3 / 2 = 4.5$	1	1	$4.5 \times 1 = 4.5$	$4.5 \times 1 = 4.5$
3*	$-1 \times 2 = -2$	-2.5	2	$-2 \times (-2.5) = +5$	$-2 \times 2 = -4$
$\sum A_i = 11.5$				$\sum A_i x_i = -4$	$\sum A_i y_i = 14$

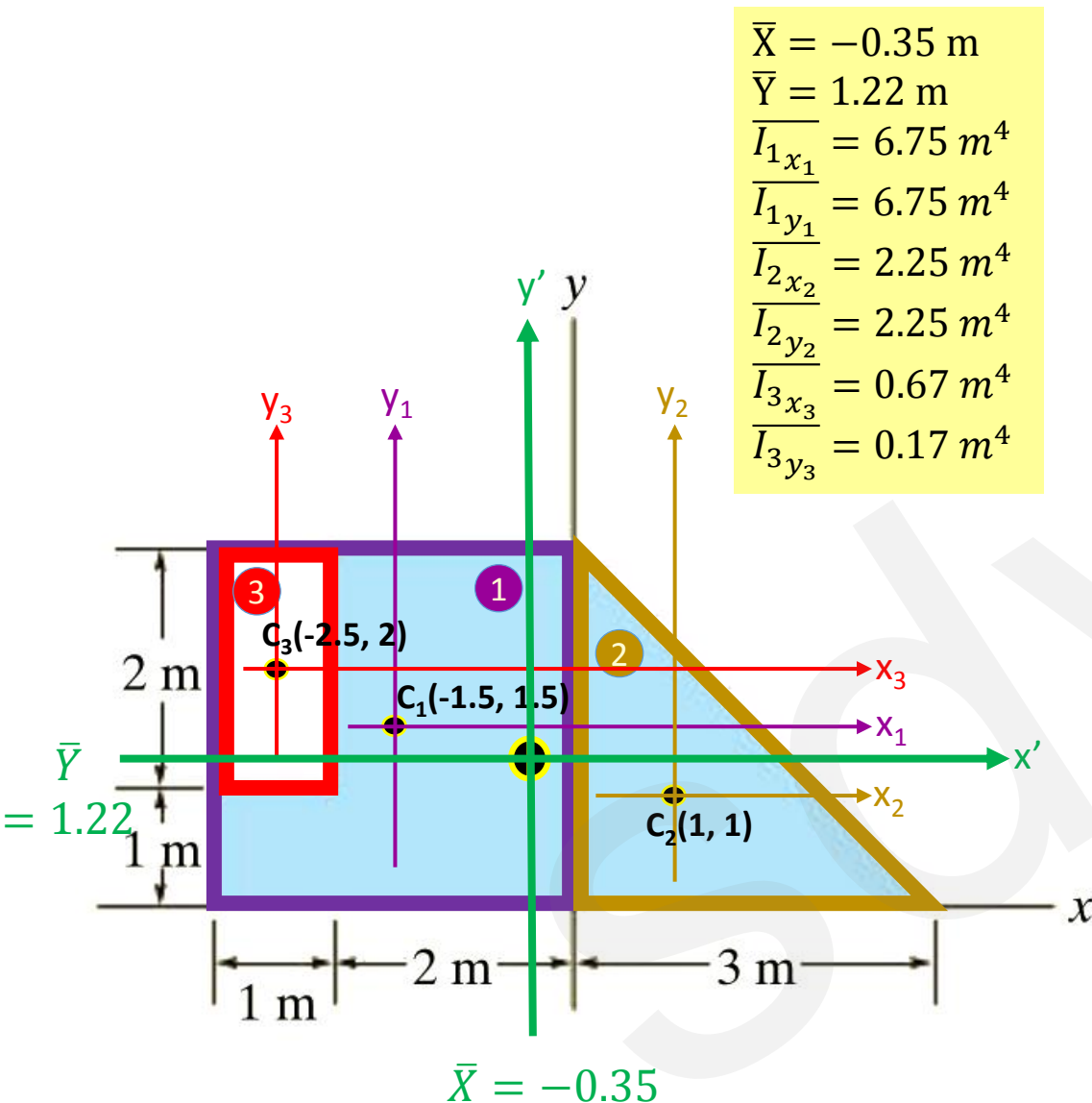
$$\bar{X} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{-4}{11.5} = -0.35 \text{ m}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{14}{11.5} = 1.22 \text{ m}$$

مثال 4



مثال 4



$$I_{1y'} = \bar{I}_{1y_1} + A_1 (d_{y'y_1})^2 = 6.75 + 3 * 3 * (-1.5 - (-0.35))^2 = 18.65 \text{ m}^4$$

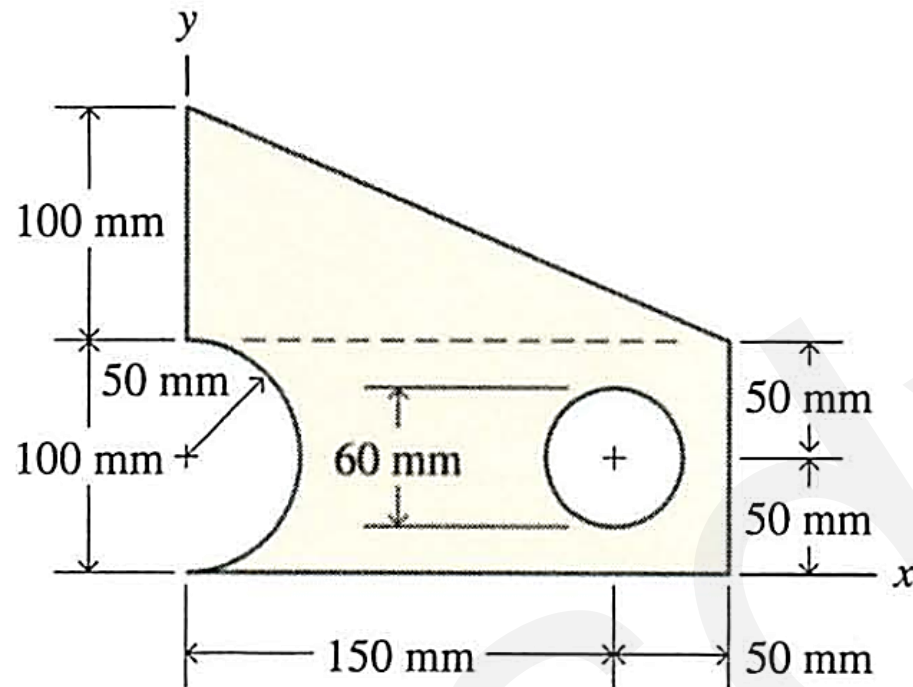
$$I_{2y'} = \bar{I}_{2y_2} + A_2 (d_{y'y_2})^2 = 2.25 + \frac{3 * 3}{2} * (1 - (-0.35))^2 = 10.45 \text{ m}^4$$

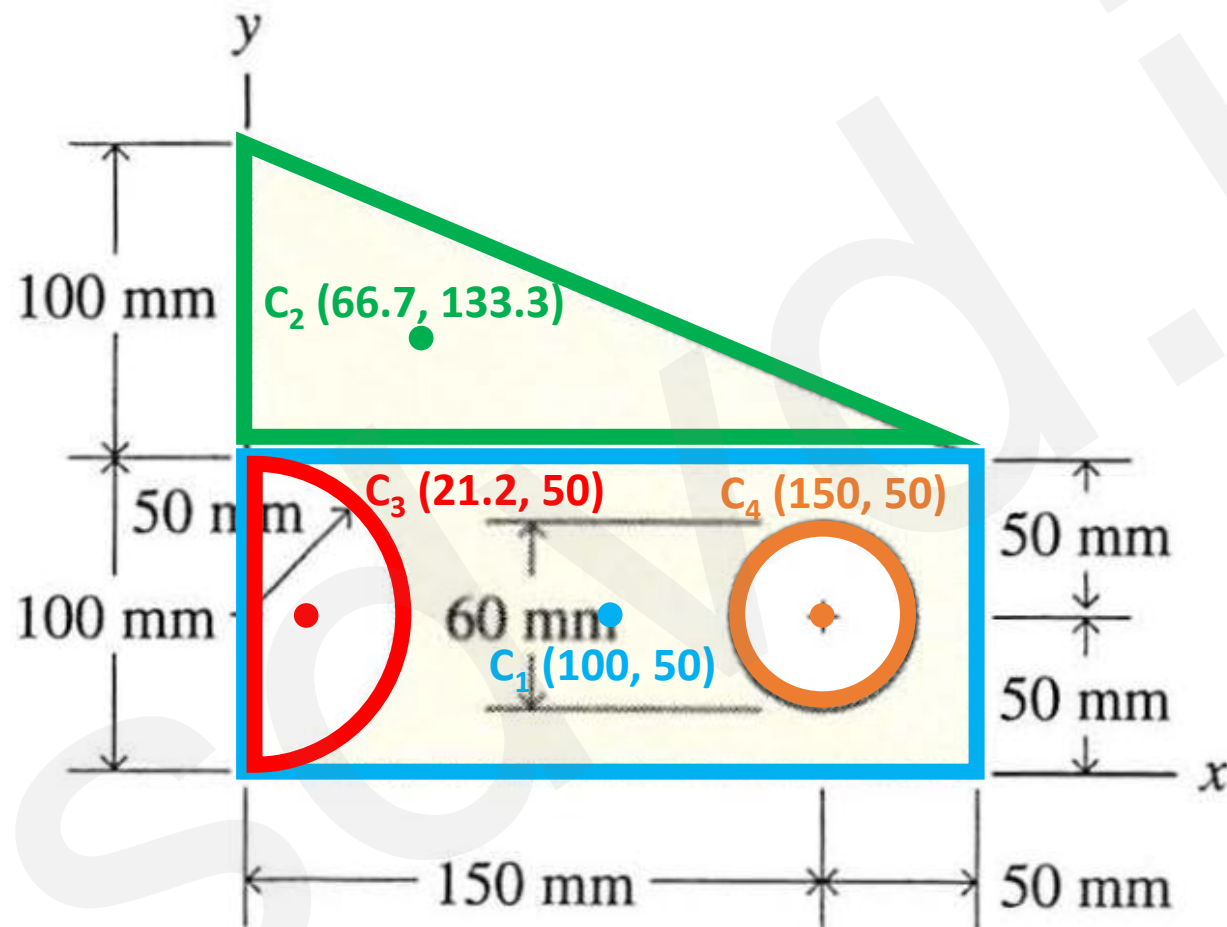
$$I_{3y'} = \bar{I}_{3y_3} + A_3 (d_{y'y_3})^2 = 0.17 + 1 * 2 * (-2.5 - (-0.35))^2 = 9.42 \text{ m}^4$$

$$\bar{I}_y = I_{1y'} + I_{2y'} - I_{3y'} = 18.65 + 10.45 - 9.42 = 19.68 \text{ m}^4$$

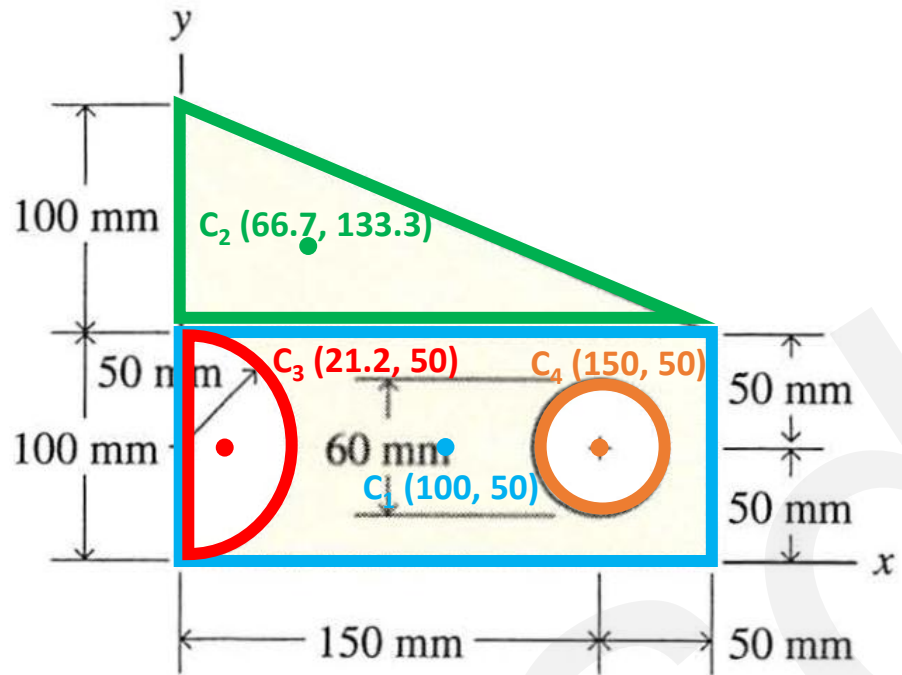
مثال 5

ممان اینرسی سطح مقابل را نسبت به محورهای افقی و قائم مشخص شده بیابید.





مثال 5



$$\overline{I_{1x_1}} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{200 * 100^3}{12} = 16.67 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\overline{I_{1y_1}} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{100 * 200^3}{12} = 66.67 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\overline{I_{2x_2}} = \frac{b_2 h_2^3}{36} = \frac{200 * 100^3}{36} = 5.56 * 10^6 \text{ mm}^4$$

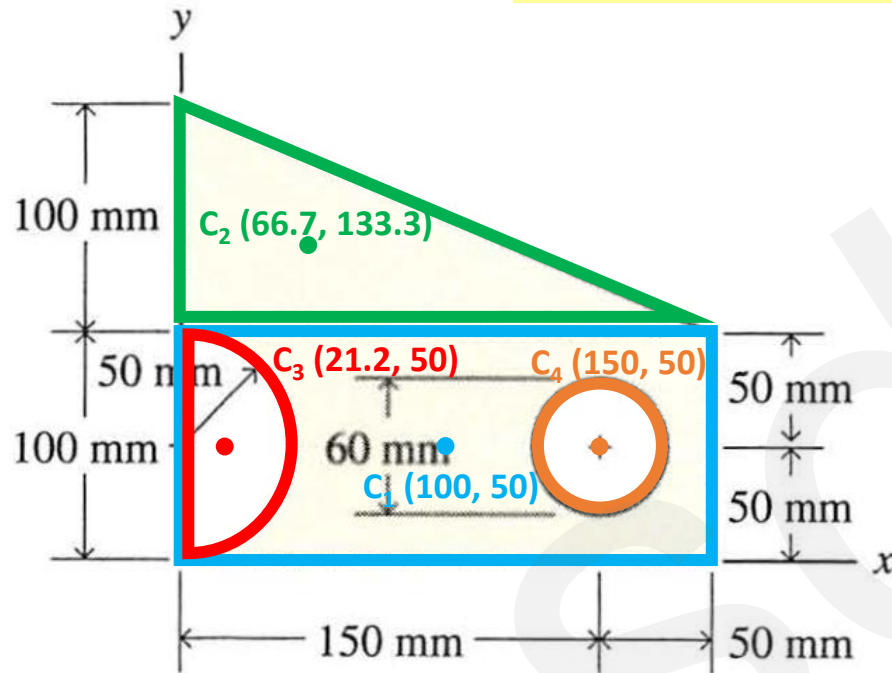
$$\overline{I_{2y_2}} = \frac{h_2 b_2^3}{36} = \frac{100 * 200^3}{36} = 22.22 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\overline{I_{3x_3}} = \overline{I_{3y_3}} = \frac{\pi r_3^4}{8} = \frac{\pi * 50^4}{8} = 2.45 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\overline{I_{4x_4}} = \overline{I_{4y_4}} = \frac{\pi r_4^4}{4} = \frac{\pi * 30^4}{4} = 0.64 * 10^6 \text{ mm}^4$$

مثال 5

$$\begin{aligned}\overline{I_{1x_1}} &= 16.67 * 10^6 \text{ mm}^4 \\ \overline{I_{1y_1}} &= 66.67 * 10^6 \text{ mm}^4 \\ \overline{I_{2x_2}} &= 5.56 * 10^6 \text{ mm}^4 \\ \overline{I_{2y_2}} &= 22.22 * 10^6 \text{ mm}^4 \\ \overline{I_{3x_3}} &= \overline{I_{3y_3}} = 2.45 * 10^6 \text{ mm}^4 \\ \overline{I_{4x_4}} &= \overline{I_{4y_4}} = 0.64 * 10^6 \text{ mm}^4\end{aligned}$$



$$I_{1x} = \overline{I_{1x_1}} + A_1 (d_{xx_1})^2 = 16.67 * 10^6 + 200 * 100 * (50 - 0)^2 = 66.67 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{2x} = \overline{I_{2x_2}} + A_2 (d_{xx_2})^2 = 5.56 * 10^6 + \frac{200 * 100}{2} * (133.3 - 0)^2 = 183.25 * 10^6 \text{ mm}^4$$

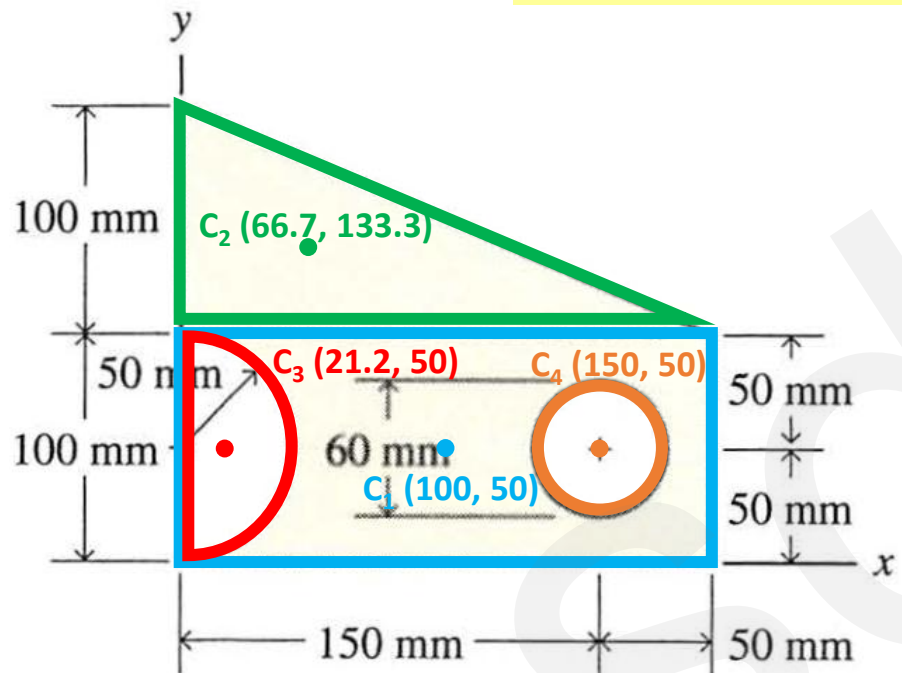
$$I_{3x} = \overline{I_{3x_3}} + A_3 (d_{xx_3})^2 = 2.45 * 10^6 + \frac{\pi * 50^2}{2} * (50 - 0)^2 = 12.27 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{4x} = \overline{I_{4x_4}} + A_4 (d_{xx_4})^2 = 0.64 * 10^6 + \pi * 30^2 * (50 - 0)^2 = 7.71 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = I_{1x} + I_{2x} - I_{3x} - I_{4x} = (66.67 + 183.25 - 12.27 - 7.71) * 10^6 = 229.94 * 10^6 \text{ mm}^4$$

مثال 5

$$\begin{aligned}\overline{I_{1x_1}} &= 16.67 * 10^6 \text{ mm}^4 \\ \overline{I_{1y_1}} &= 66.67 * 10^6 \text{ mm}^4 \\ \overline{I_{2x_2}} &= 5.56 * 10^6 \text{ mm}^4 \\ \overline{I_{2y_2}} &= 22.22 * 10^6 \text{ mm}^4 \\ \overline{I_{3x_3}} &= \overline{I_{3y_3}} = 2.45 * 10^6 \text{ mm}^4 \\ \overline{I_{4x_4}} &= \overline{I_{4y_4}} = 0.64 * 10^6 \text{ mm}^4\end{aligned}$$



$$I_{1y} = \overline{I_{1y_1}} + A_1 (d_{yy_1})^2 = 66.67 * 10^6 + 200 * 100 * (100 - 0)^2 = 266.67 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{2y} = \overline{I_{2y_2}} + A_2 (d_{yy_2})^2 = 22.22 * 10^6 + \frac{200 * 100}{2} * (66.7 - 0)^2 = 66.71 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{3y} = \overline{I_{3y_3}} + A_3 (d_{yy_3})^2 = 2.45 * 10^6 + \frac{\pi * 50^2}{2} * (21.2 - 0)^2 = 4.21 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{4y} = \overline{I_{4y_4}} + A_4 (d_{yy_4})^2 = 0.64 * 10^6 + \pi * 30^2 * (150 - 0)^2 = 64.26 * 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = I_{1y} + I_{2y} - I_{3y} - I_{4y} = (266.67 + 66.71 - 4.21 - 64.26) * 10^6 = 264.91 * 10^6 \text{ mm}^4$$