

استاتیک

بخش هشتم: مرکز سطح

مدرس: شهاب داودی

www.sdvd.ir

davoudi@gmail.com

8-1

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

هدف فصل

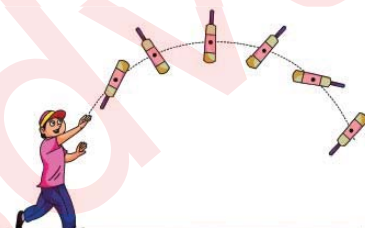
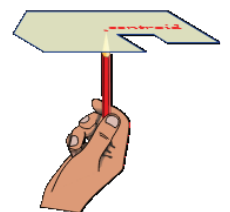
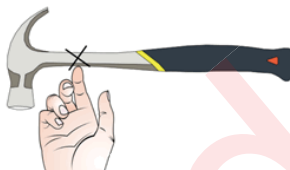
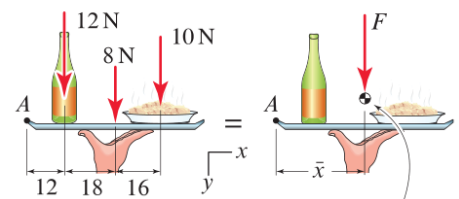


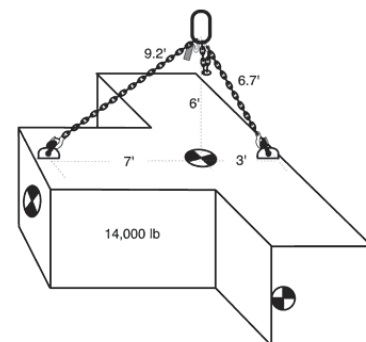
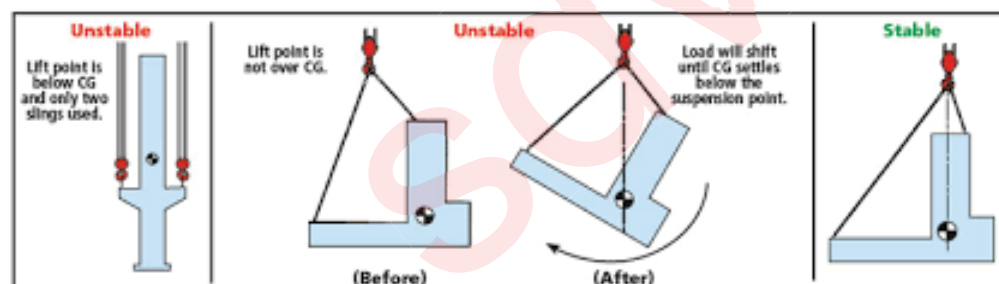
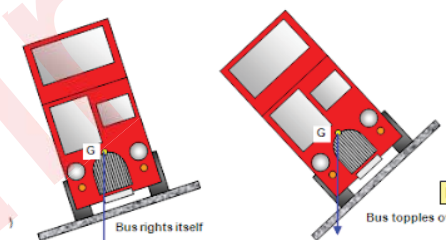
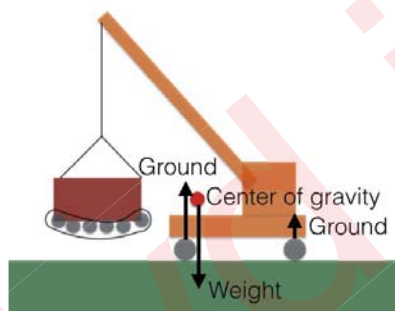
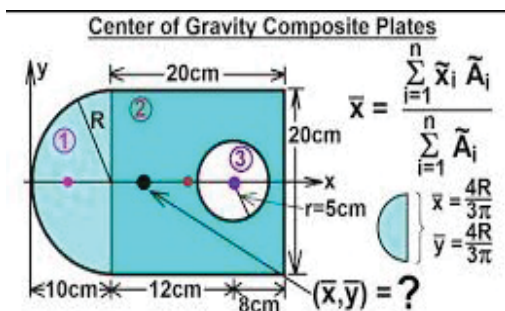
Figure 5.1 Center of mass tracing the path of a parabola



8-2

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

هدف فصل



8-3

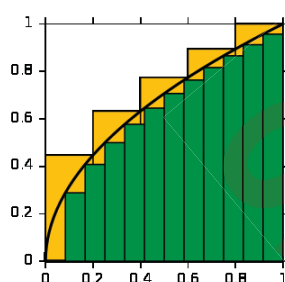
استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

پیش نیازها

ریاضیات
انتگرال و مجموع تعداد محدود جزء

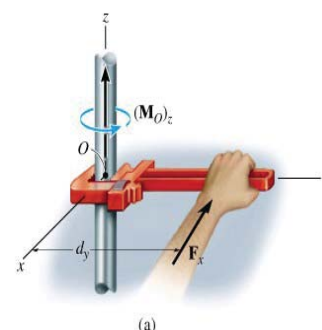
$$\int_{x_1}^{x_2} x \, dA$$

$$\sum_{i=1}^n x_i \Delta A_i$$



گشتاور و کوپل

$$\sum \vec{M} = 0$$

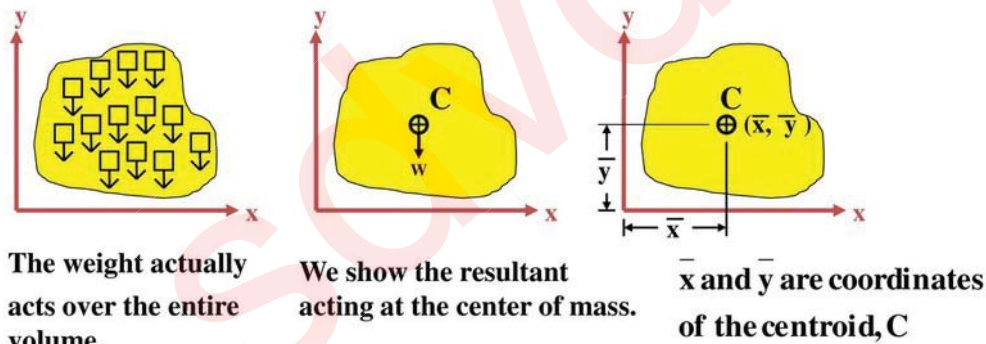


8-4

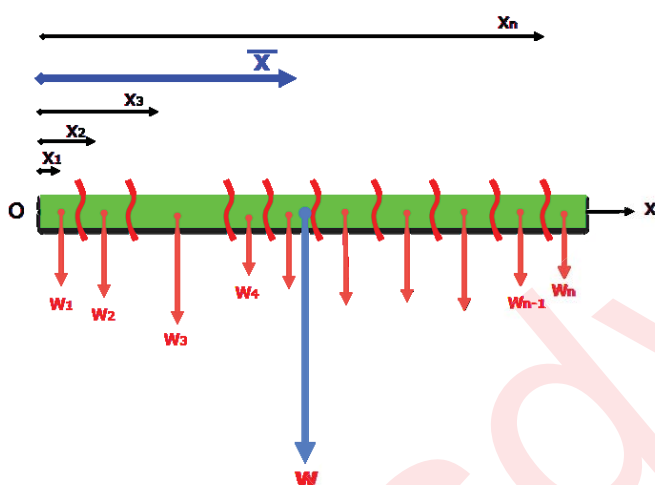
استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

مرکز سطح (مرکز جرم) (مرکز ثقل) چیست؟

- نیروی گرانش زمین به تمام ذرات جسم اثر می‌کند. می‌توان نیروی گرانش را با یک نیروی معادل که مساوی وزن جسم است (W) جایگزین کرد. نیروی برآیند به نقطه‌ای به نام **مرکز ثقل جسم** (center of gravity) اثر می‌کند.
- در یک جسم همگون، **مرکز سطح** (centroid of area) بر مرکز ثقل منطبق است.



تعریف مرکز ثقل جسم یک بعدی (میله‌ای)



$$W = w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n = \sum_{i=1}^n w_i$$

$$\sum M_o = -w_1 x_1 - w_2 x_2 - \dots - w_n x_n = - \sum_{i=1}^n w_i x_i$$

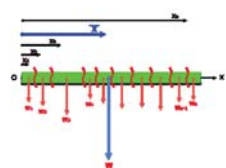
$$\sum M_o = -W \bar{X}$$

$$W \bar{X} = \sum_{i=1}^n w_i x_i$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{W} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$$

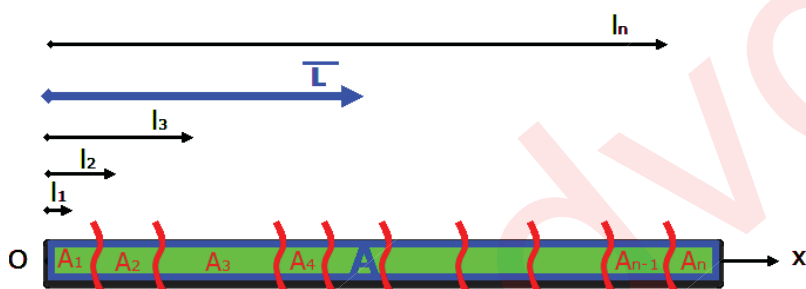
$$\bar{X} = \frac{\int x \, dw}{\int dw}$$

تعریف مرکز طول جسم یک بعدی (میله‌ای)



با فرض همگن بودن (Homogenous) میله

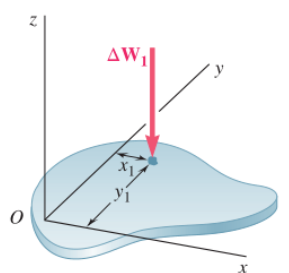
$$W = mg = \rho Vg = \rho Slg$$



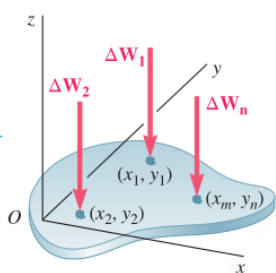
$$\frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} = \frac{\sum \rho S l_i g x_i}{\sum \rho S l_i g} = \frac{\rho S g \sum l_i x_i}{\rho S g \sum l_i} = \frac{\sum l_i x_i}{\sum l_i}$$

$$\bar{X} = \frac{\int x \, dl}{\int dl}$$

تعریف مرکز ثقل جسم دو بعدی (صفحه‌ای)



(a) Single element of the plate



(b) Multiple elements of the plate

$$W = w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n = \sum_{i=1}^n w_i$$

$$\sum M_y = -w_1 x_1 - w_2 x_2 - \dots - w_n x_n = -W \bar{x}$$

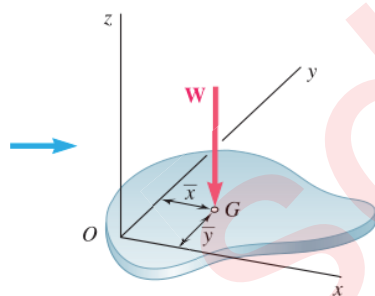
$$\bar{x} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$$

$$\sum M_x = -w_1 y_1 - w_2 y_2 - \dots - w_n y_n = -W \bar{y}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum w_i y_i}{\sum w_i}$$

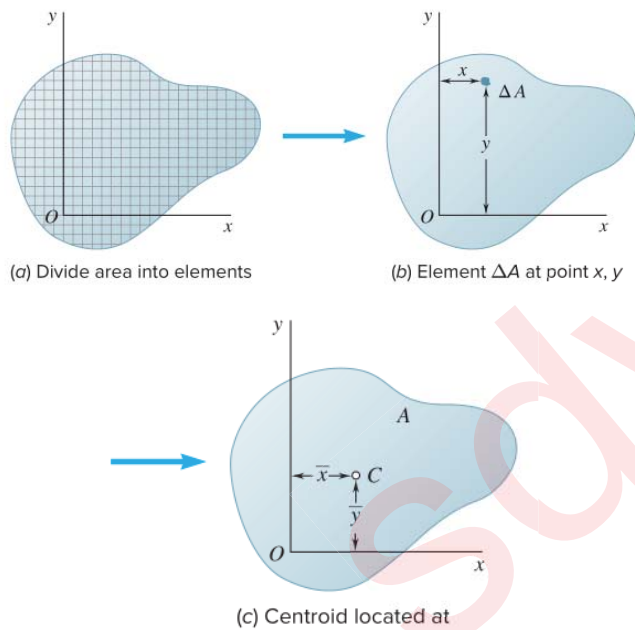
$$\bar{x} = \frac{\int x \, dw}{\int dw}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y \, dw}{\int dw}$$



(c) Center of gravity

تعریف مرکز سطح جسم دو بعدی (صفحه‌ای)



با فرض همگن بودن (Homogenous) صفحه

$$W = mg = \rho Vg = \rho \Delta A t g$$

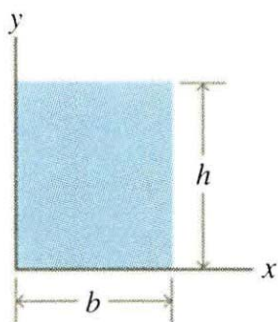
$$\bar{x} = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} = \dots = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum w_i y_i}{\sum w_i} = \dots = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

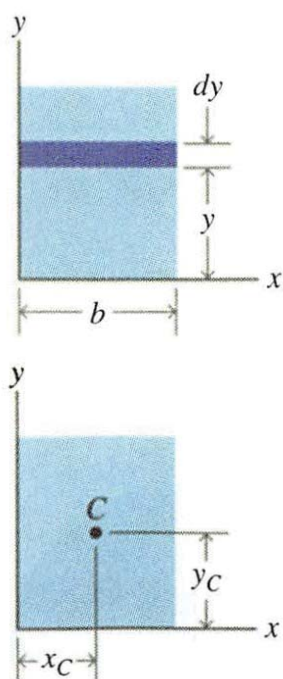
$$\bar{x} = \frac{\int x \, dA}{\int dA}$$

$$\bar{y} = \frac{\int y \, dA}{\int dA}$$

مثال



مرکز سطح مستطیل به ارتفاع h و پهنای b را به دست آورید.



$$\bar{y} = \frac{\int y \, dA}{\int dA} = \frac{\int_0^h y (b \, dy)}{\int_0^h b \, dy} = \frac{b \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^h}{b[y]_0^h} = \frac{b \frac{h^2}{2}}{bh} = \frac{h}{2}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x \, dA}{\int dA} = \frac{\int_0^b x (h \, dx)}{\int_0^b h \, dx} = \frac{h \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^b}{h[x]_0^b} = \frac{h \frac{b^2}{2}}{hb} = \frac{b}{2}$$

$$C \left| \begin{array}{l} \frac{b}{2} \\ \frac{h}{2} \end{array} \right.$$

8-11

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

جدول مختصات مرکز سطح شکل‌های پایه هندسی

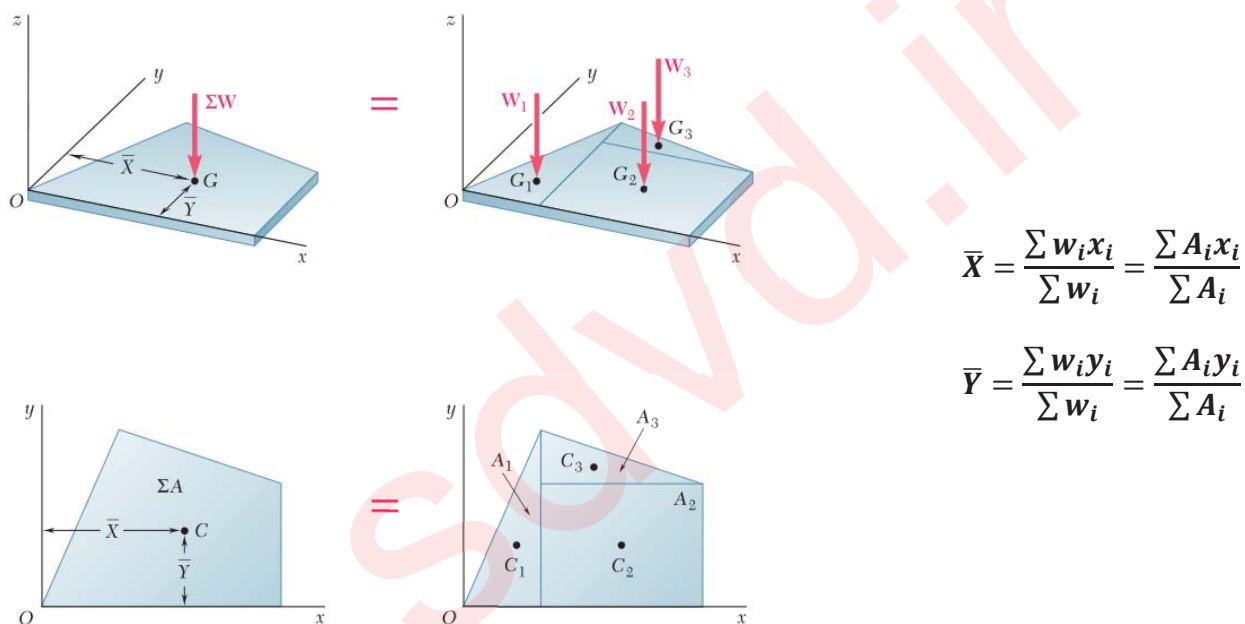
Shape	Area	Centroid
	$b \times d$	$\bar{x} = \frac{b}{2}$ $\bar{y} = \frac{h}{2}$
	$\frac{1}{2}bh$	$\bar{x} = \frac{b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$
	πr^2	$\bar{x} = 0 \quad \bar{y} = 0$

	$\frac{\pi \cdot r^2}{2}$	$\bar{x} = r, \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$
	$\frac{\pi \cdot r^2}{4}$	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi} \quad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$

8-12

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

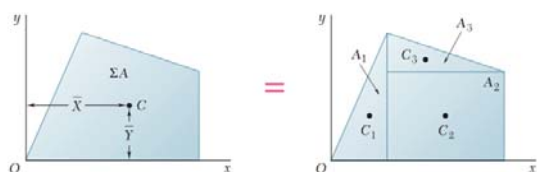
مرکز ثقل/سطح سطوح مرکب



8-13

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

مرکز سطح سطوح مرکب



i	A_i	x_i	y_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
	$\sum A_i$			$\sum A_i x_i$	$\sum A_i y_i$

$$\bar{X} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

گام‌های حل

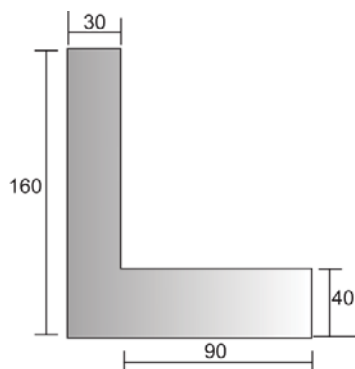
- انتخاب دستگاه و مبدا مختصات تا انتهای حل تغییر نکند.
 - اگر از قبل معلوم است، همان استفاده شود.
 - بهتر است شکل در ربع اول قرار گیرد.
 - اگر شکل تقارن دارد، محور مختصات بر محور تقارن قرار گیرد.
- تجزیه سطح مرکب به سطوح پایه هندسی و شماره گذاری هر سطح
 - سطوح ممکن است اضافه شده (مثبت) یا برداشته شده (منفی) باشند.
 - حداقل تعداد ممکن بهتر است.
- تعیین مختصات مرکز هر یک از سطوح پایه هندسی نسبت به دستگاه و مبدا مختصات
 - مساحت سطوح برداشته شده منفی (-) است.
- تنظیم اطلاعات در جدول وضعیت (برای راحتی کار)
- انتقال اطلاعات جدول وضعیت به رابطه‌ها
- محاسبات، و اعلام مناسب پاسخ طبق خواست سوال
 - ترجیحاً نمایش مرکز سطح مرکب روی شکل و بررسی منطقی بودن پاسخ

8-14

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

مثال ۱

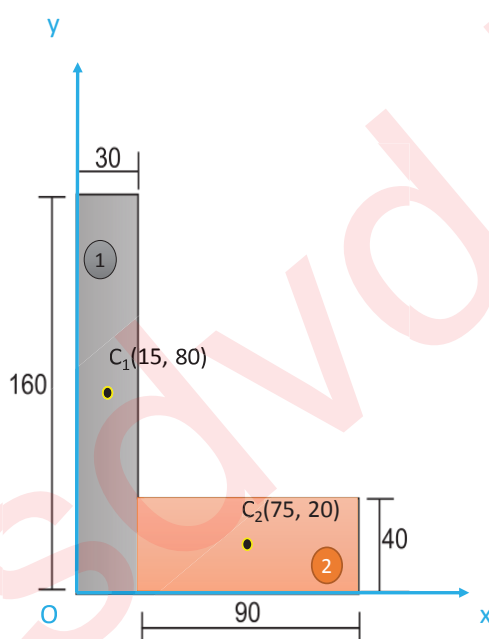
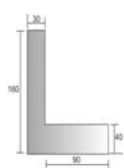
مختصات مرکز سطح شکل مقابل را بیابید. (ابعاد به mm)



8-15

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

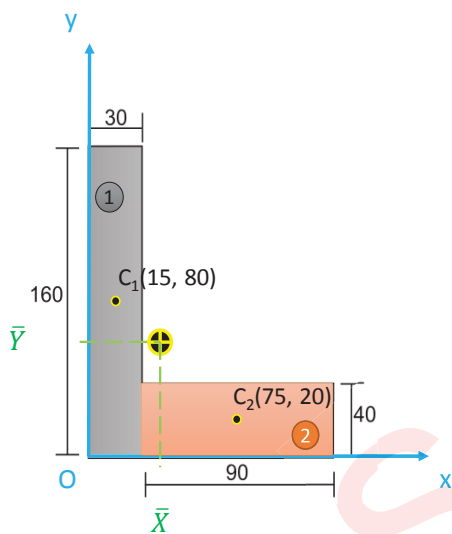
مثال ۱



8-16

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

مثال ۱



i	A_i	x_i	y_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1	$30 \times 160 = 4800$	15	80	$4800 \times 15 = 72000$	$4800 \times 80 = 384000$
2	$90 \times 40 = 3600$	75	20	$3600 \times 75 = 270000$	$3600 \times 20 = 72000$
	$\Sigma A_i = 8400$			$\Sigma A_i x_i = 342000$	$\Sigma A_i y_i = 456000$

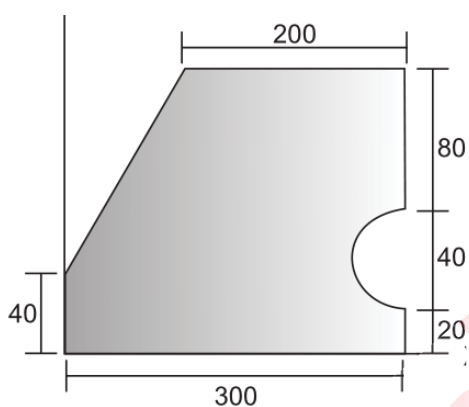
$$\bar{X} = \frac{\Sigma A_i x_i}{\Sigma A_i} = \frac{342000}{8400} = 40.71 \text{ mm}$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \frac{456000}{8400} = 54.28 \text{ mm}$$

8-17

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

مثال ۲

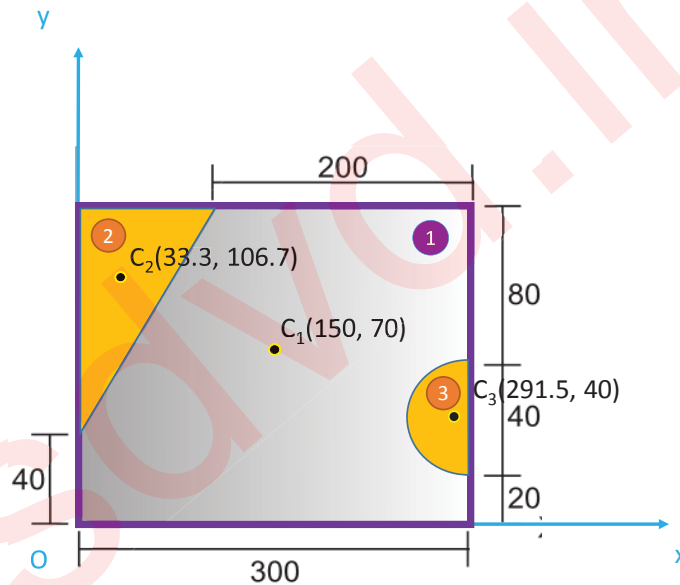
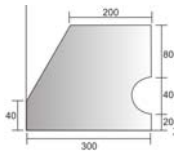


مختصات مرکز سطح شکل مقابل را بیابید.
(مقیاس رعایت نشده است) (ابعاد به mm)

8-18

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

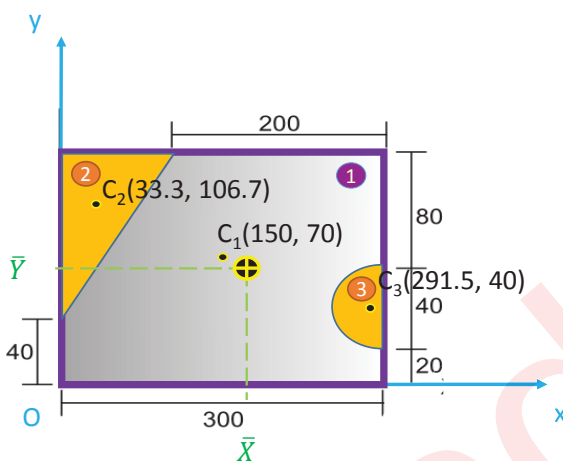
مثال ۲



8-19

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

مثال ۲



i	A_i	x_i	y_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1	$300 \times 140 = 42000$	150	70	$42000 \times 150 = 6300000$	$42000 \times 70 = 2940000$
2*	$-100 \times 100 / 2 = -5000$	33.3	106.7	$-5000 \times 33.3 = -166500$	$-5000 \times 106.7 = -533500$
3*	$-\pi \times 20^2 / 2 = -628.3$	291.5	40	$628.3 \times 291.5 = -183149.5$	$628.3 \times 40 = -25132$
	$\Sigma A_i = 36371.7$			$\Sigma A_i x_i = 5950350.6$	$\Sigma A_i y_i = 2381368$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma A_i x_i}{\Sigma A_i} = \frac{5950350.6}{36371.7} = 163.6 \text{ mm}$$

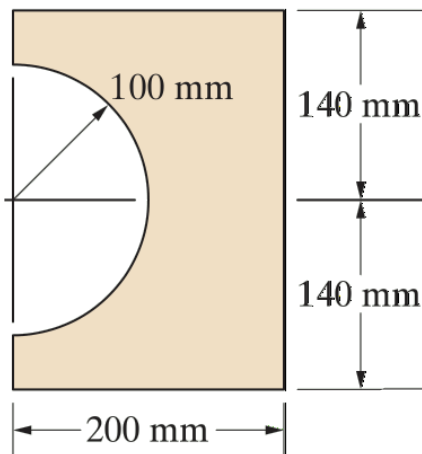
$$\bar{Y} = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \frac{2381368}{36371.7} = 65.5 \text{ mm}$$

8-20

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

مثال ۳

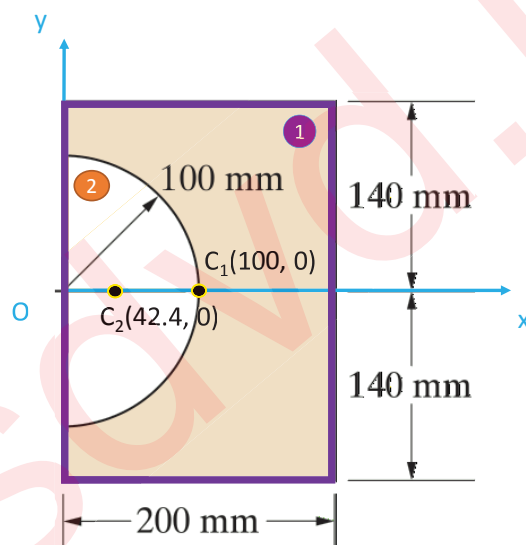
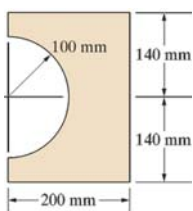
مختصات مرکز سطح شکل مقابل را بیابید.



8-21

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

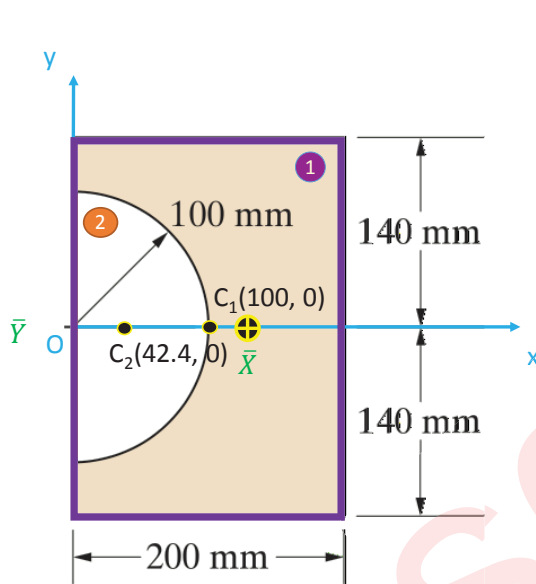
مثال ۳



8-22

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

مثال ۳



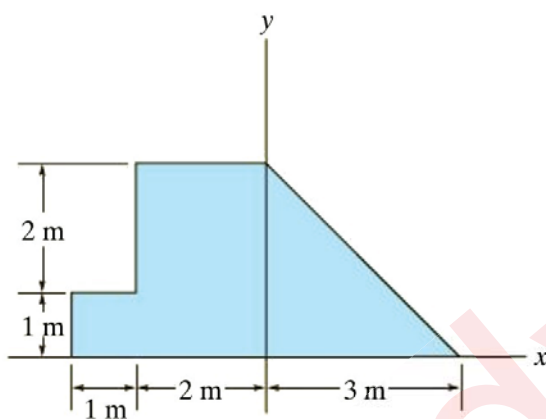
i	A_i	x_i	y_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1	$200 \times 280 = 56000$	100	0	$56000 \times 100 = 5600000$	$56000 \times 0 = 0$
2*	$-\pi \times 100^2 / 2 = -15708.0$	42.4	0	$-15708.0 \times 42.4 = -666017.1$	$-15708.0 \times 0 = 0$
	$\Sigma A_i = 40292.0$			$\Sigma A_i x_i = 4933982.9$	$\Sigma A_i y_i = 0$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma A_i x_i}{\Sigma A_i} = \frac{4933982.9}{40292.0} = 122.5 \text{ mm}$$

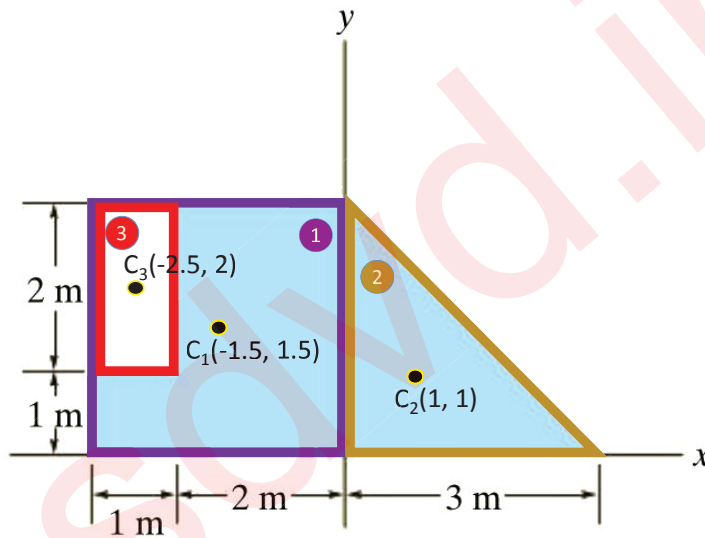
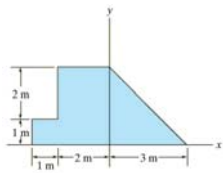
$$\bar{Y} = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \frac{0}{40292.0} = 0 \text{ mm}$$

مثال ۴

مختصات مرکز سطح شکل مقابل را بیابید.



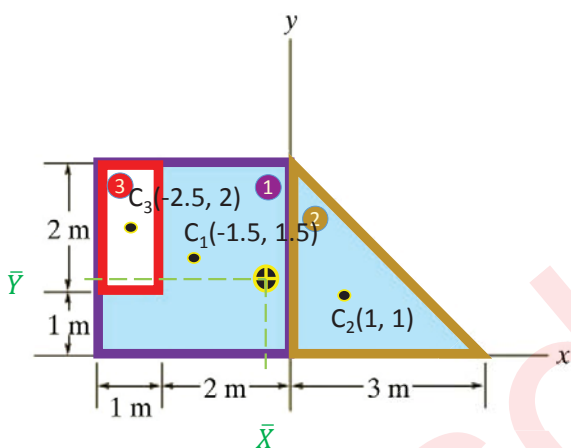
مثال ۴



8-25

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

مثال ۴



i	A_i	x_i	y_i	$A_i x_i$	$A_i y_i$
1	$3 \times 3 = 9$	-1.5	1.5	$9 \times (-1.5) = -13.5$	$9 \times 1.5 = 13.5$
2	$3 \times 3/2 = 4.5$	1	1	$4.5 \times 1 = 4.5$	$4.5 \times 1 = 4.5$
3*	$-1 \times 2 = -2$	-2.5	2	$-2 \times (-2.5) = +5$	$-2 \times 2 = -4$
$\Sigma A_i = 11.5$				$\Sigma A_i x_i = -4$	$\Sigma A_i y_i = 14$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma A_i x_i}{\Sigma A_i} = \frac{-4}{11.5} = -0.35 \text{ m}$$

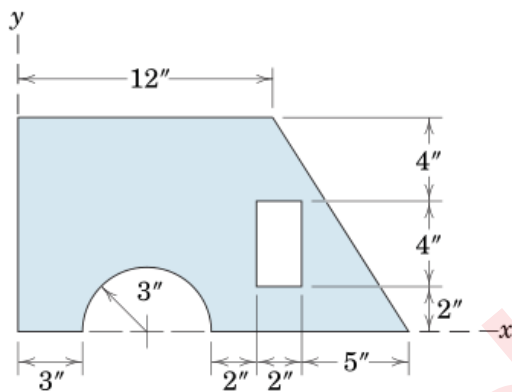
$$\bar{Y} = \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} = \frac{14}{11.5} = 1.22 \text{ m}$$

8-26

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

مثاله

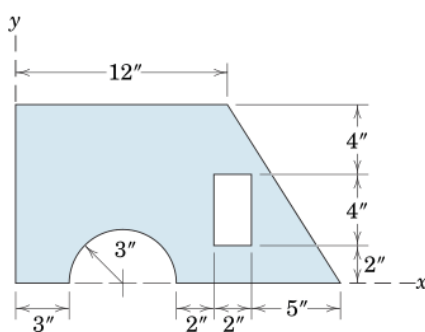
Locate the centroid of the shaded area.



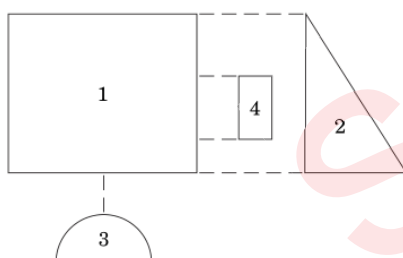
8-27

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

مثاله



PART	A in. ²	$\bar{x}$ in.	$\bar{y}$ in.	$\bar{x}A$ in. ³	$\bar{y}A$ in. ³
1	120	6	5	720	600
2	30	14	10/3	420	100
3	-14.14	6	1.273	-84.8	-18
4	-8	12	4	-96	-32
TOTALS	127.9			959	650



$$\left[\bar{X} = \frac{\sum A\bar{x}}{\sum A} \right]$$

$$\bar{X} = \frac{959}{127.9} = 7.50 \text{ in.}$$

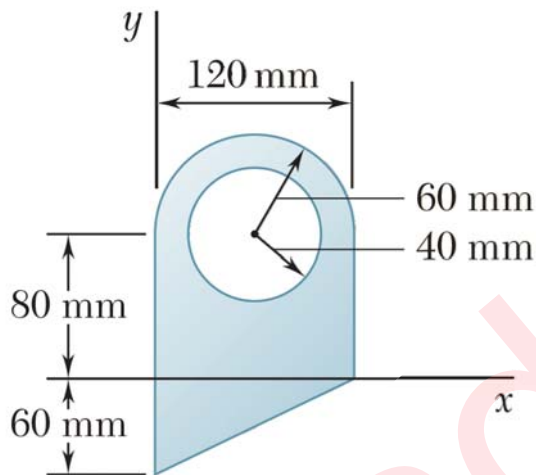
$$\left[\bar{Y} = \frac{\sum A\bar{y}}{\sum A} \right]$$

$$\bar{Y} = \frac{650}{127.9} = 5.08 \text{ in.}$$

8-28

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

مثال ۶

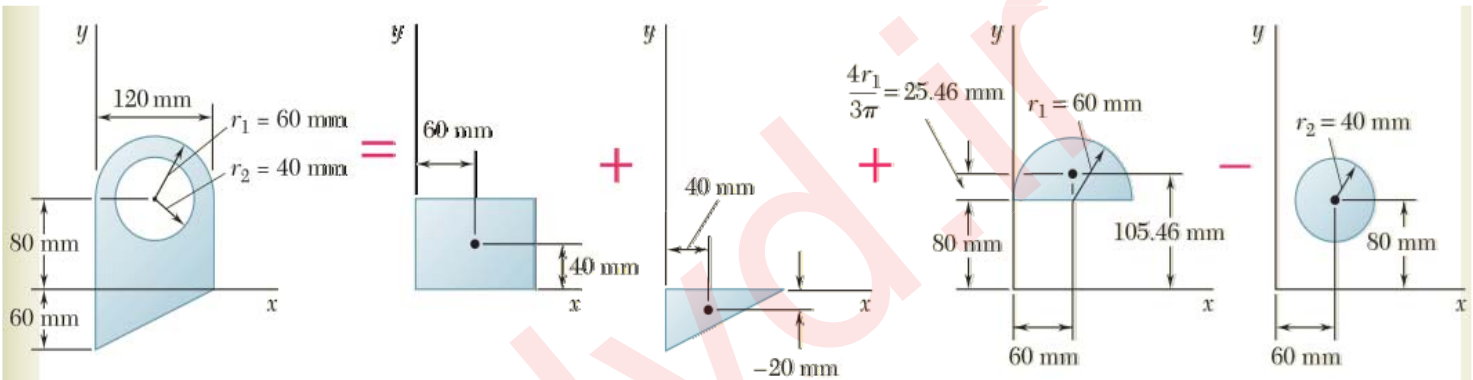


For the plane area shown, determine
(a) the first moments with respect to the x and y axes, (b) the location of the centroid.

8-29

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

مثال ۶



Component	A, mm^2	$\bar{x}, \text{mm}$	$\bar{y}, \text{mm}$	$\bar{x}A, \text{mm}^3$	$\bar{y}A, \text{mm}^3$
Rectangle	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triangle	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	-20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semicircle	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Circle	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma \bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma \bar{y}A = +506.2 \times 10^3$

8-30

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

a. First Moments of the Area.

$$\begin{aligned} Q_x &= \Sigma \bar{y}A = 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3 & Q_x &= 506 \times 10^3 \text{ mm}^3 \\ Q_y &= \Sigma \bar{x}A = 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3 & Q_y &= 758 \times 10^3 \text{ mm}^3 \end{aligned}$$

b. Location of Centroid.

$$\begin{aligned} \bar{X}\Sigma A &= \Sigma \bar{x}A: & \bar{X}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) &= 757.7 \times 10^3 \text{ mm}^3 & \bar{X} &= 54.8 \text{ mm} \\ \bar{Y}\Sigma A &= \Sigma \bar{y}A: & \bar{Y}(13.828 \times 10^3 \text{ mm}^2) &= 506.2 \times 10^3 \text{ mm}^3 & \bar{Y} &= 36.6 \text{ mm} \end{aligned}$$

