

بسم الله الرحمن الرحيم

استاتیک

بخش سوم: اجسام صلب (قسمت اول: گشتاور)



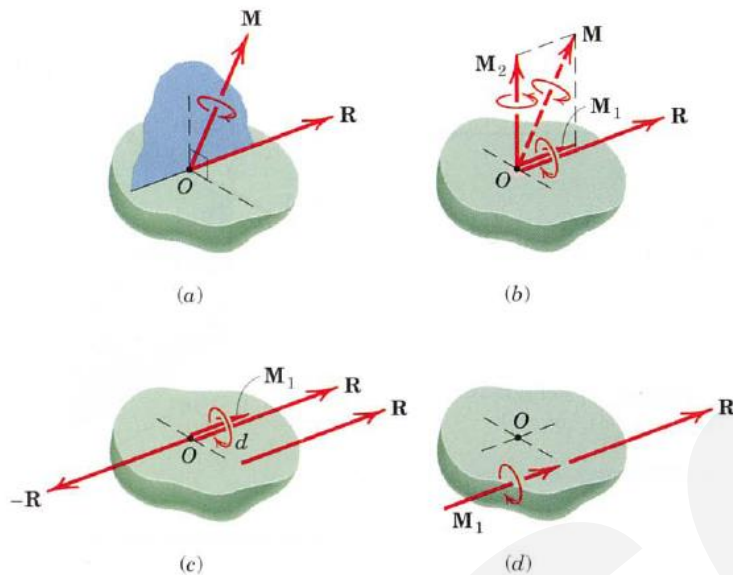
مدرس: شهاب داودی

www.sdvd.ir

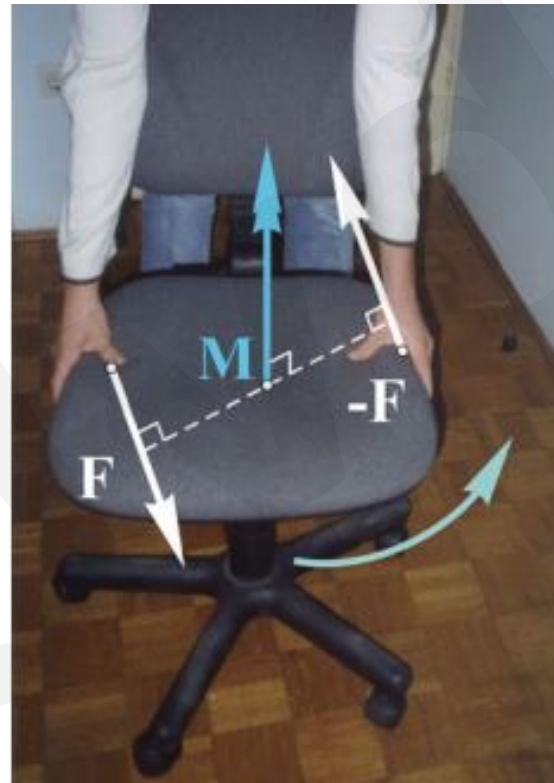
davoudi@gmail.com

هدف فصل

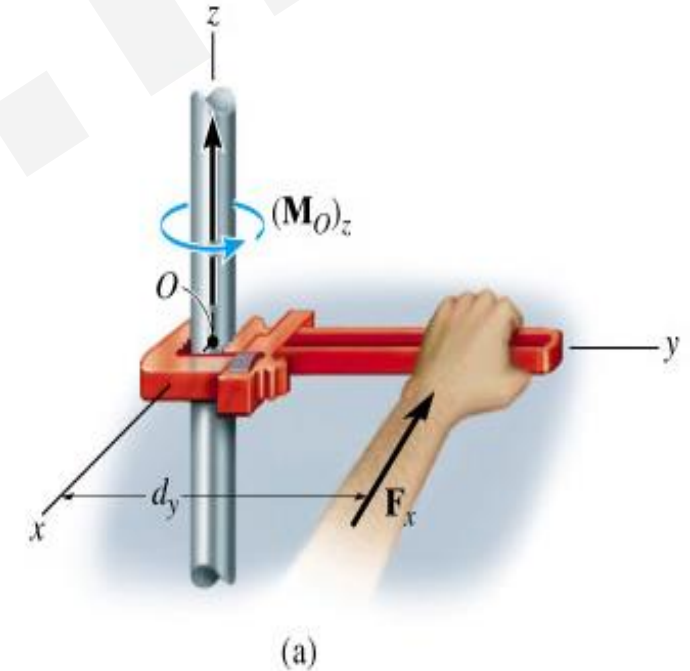
سیستم‌های نیرو-گشتاور



گشتاور زوج نیرو

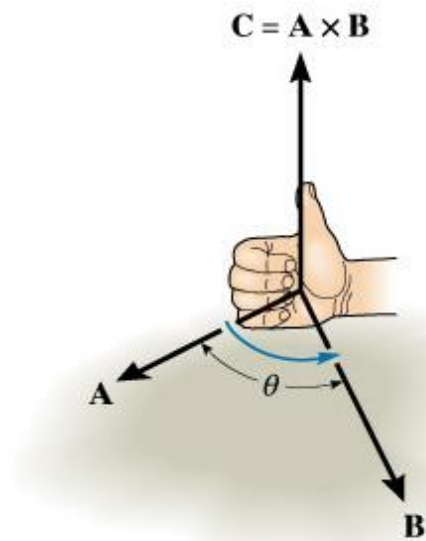


گشتاور و کاربرد آن در فضای 2D و 3D



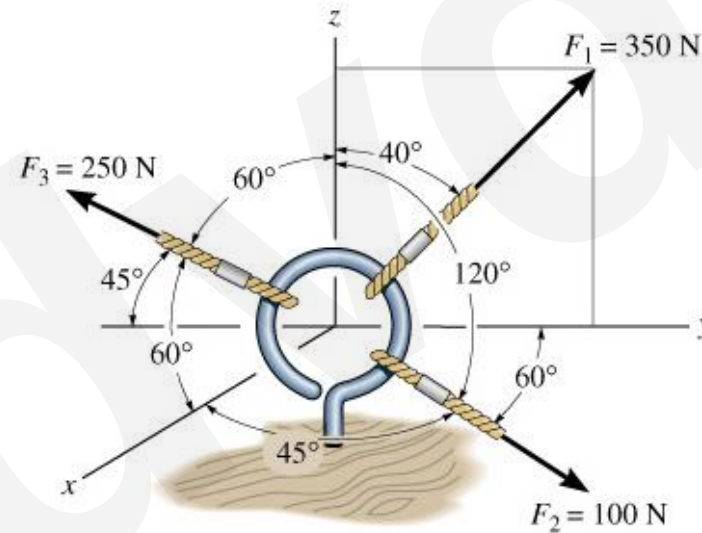
پیش‌نیازهای این فصل

ضرب خارجی دو بردار



$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

تعادل ذرات (تمام مطالب بخش دوم)



جسم صلب

جسمی که در اثر اعمال نیرو تغییر شکل ندهد.

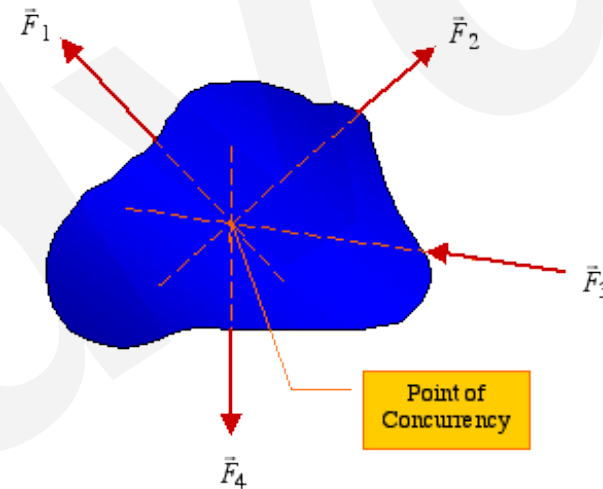


شرط تعادل ذره

$$\sum \vec{F} = 0 \rightarrow \begin{cases} 1D: \begin{cases} \sum F_x = 0 \end{cases} \\ 2D: \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \\ 3D: \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases} \end{cases}$$

نیروهای هم‌گرا

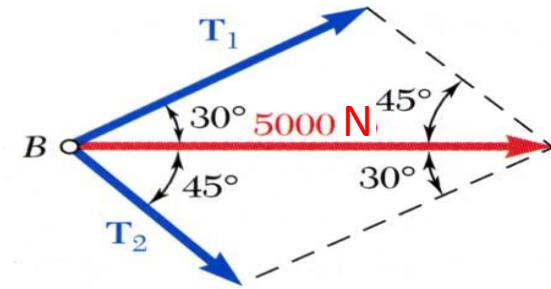
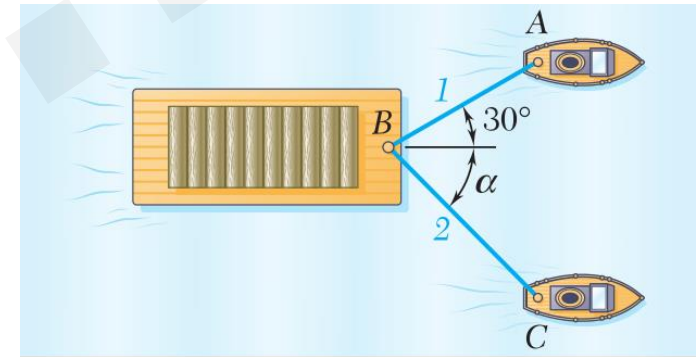
چند نیرو که خط اثر تمامی آنها از یک نقطه مشترک عبور می‌کند.



System of concurrent forces acting on a body

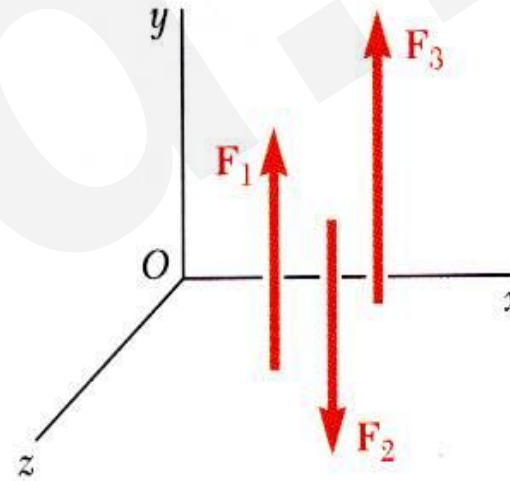
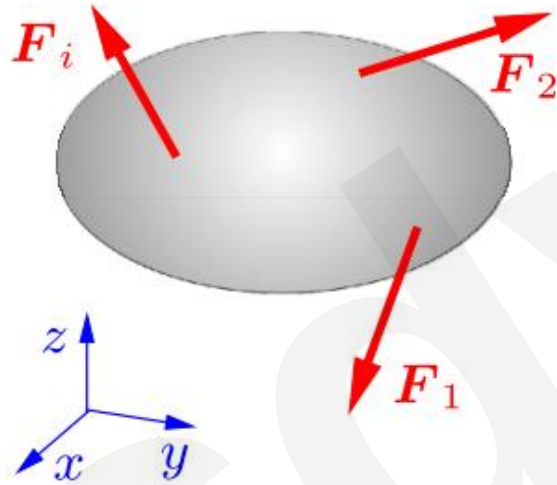
ذره

از ابعاد و شکل جسم می‌توان صرف‌نظر کرد.



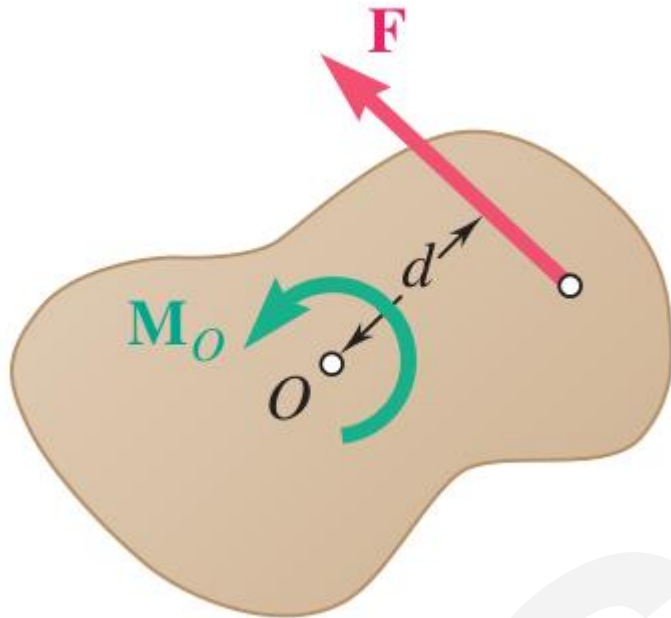
جسم غیر ذره‌ای

- شرایط ذره حاکم نیست: نیروها به یک نقطه همگرا نیستند.



تاثیر نیرو بر اجسام غیر ذره‌ای

- تاثیر نیرو بر اجسام
- حرکت یا تمایل به حرکت
- دوران یا تمایل به دوران حول یک نقطه (مرکز دوران)



- اگر نیرو یا نیروهایی به جسم غیر ذره‌ای وارد شود، علاوه بر «حرکت یا تمایل به حرکت»، «دوران یا تمایل به دوران حول یک مرکز یا محور» نیز ایجاد می‌شود.
- در این حالت ابعاد اهمیت می‌یابد.

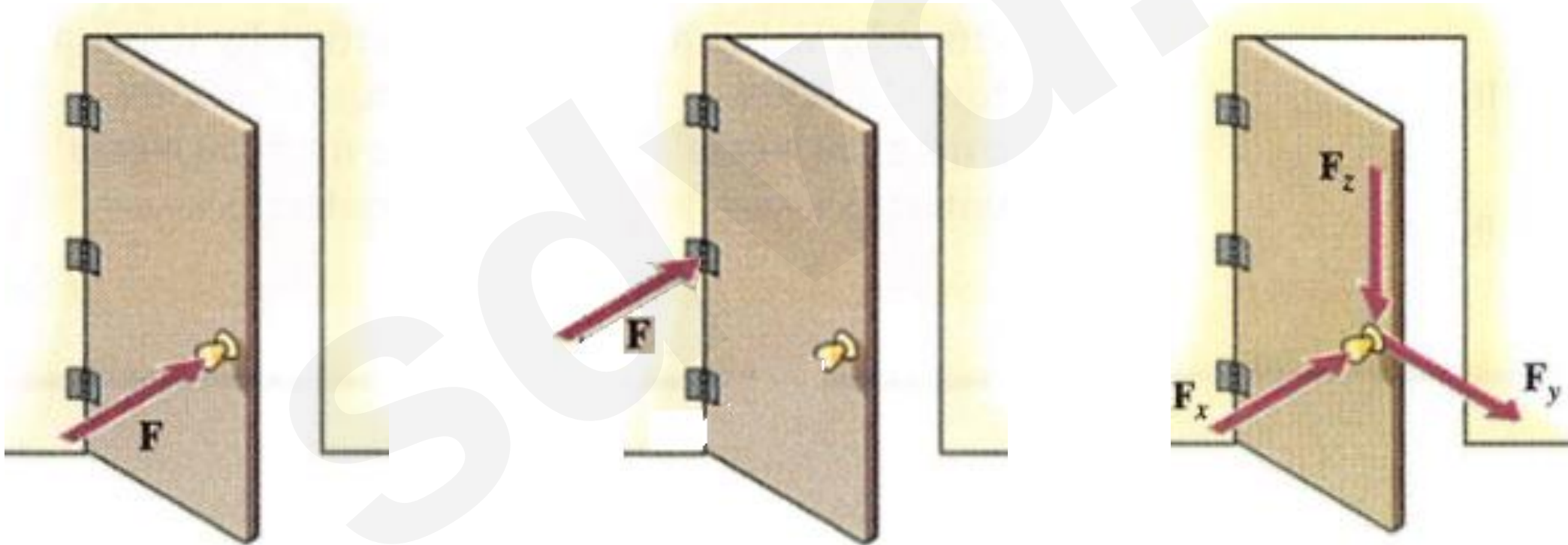
عامل دوران: گشتاور (گشت + آور)

• عوامل دوران / ایجاد گشتاور

• نیرو

• فاصله نقطه اثر نیرو از مرکز یا محور دوران: **بازو** (یا بازوی گشتاور)

• وضعیت خط اثر نیرو: **(زاویه)**



عامل دوران: گشتاور

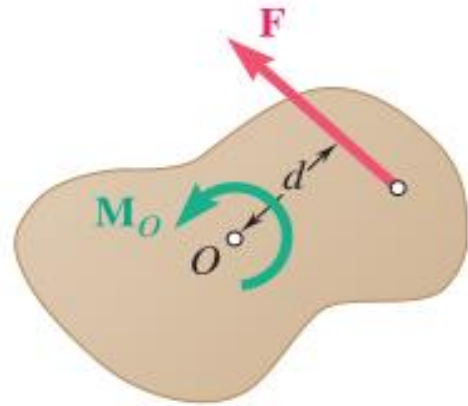
• عوامل دوران / ایجاد گشتاور

• نیرو

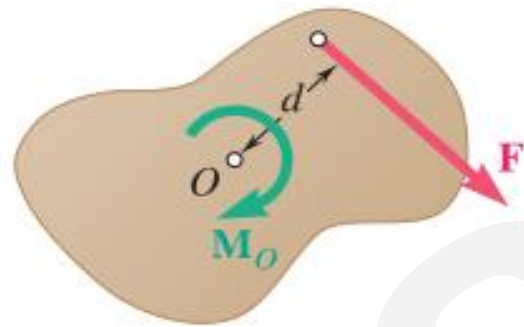
• فاصله نقطه اثر نیرو از مرکز/محور دوران
(بازو (یا بازوی گشتاور))

• وضعیت خط اثر نیرو (زاویه)

بازوی عمود



(a) $M_O = +Fd$



(b) $M_O = -Fd$

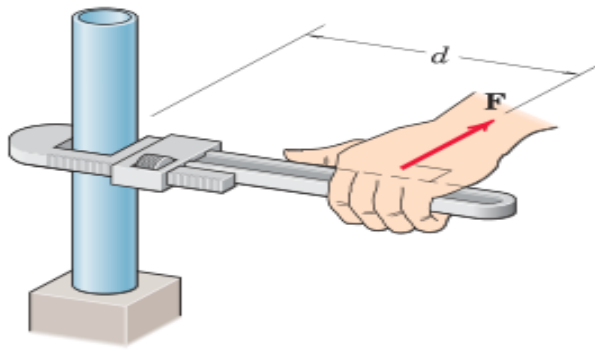
• تعریف رابطه گشتاور

$$M_O^F = Fd$$

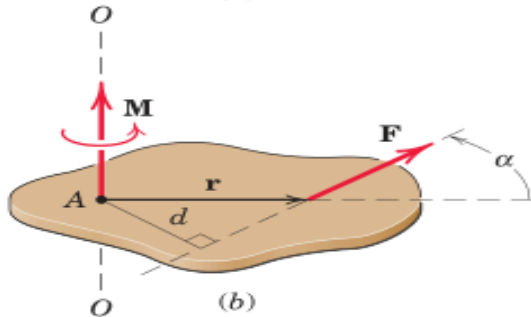
بازوی عمود گشتاور

• بازوی عمود (d)

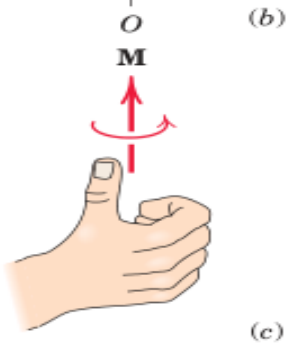
• از مرکز/محور گشتاور به خط اثر نیرو عمود است.
(مفهوم و تعریف هندسی فاصله نقطه از خط)



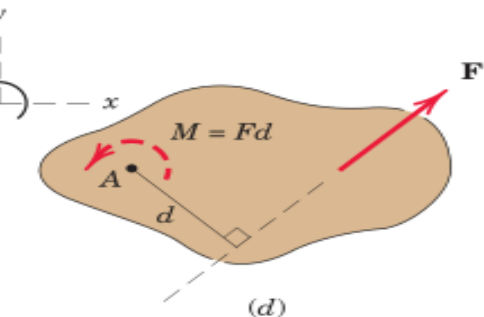
(a)



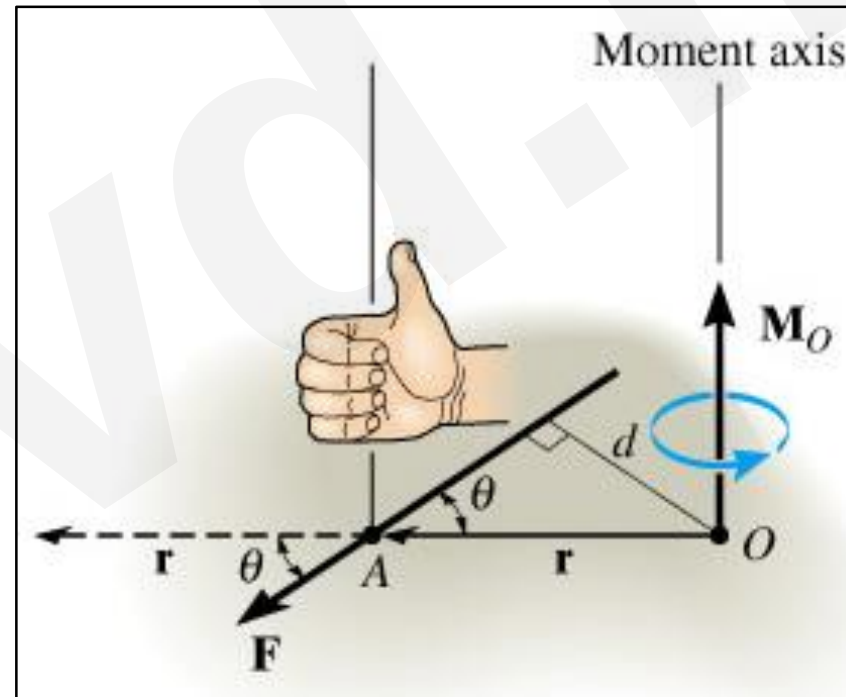
(b)



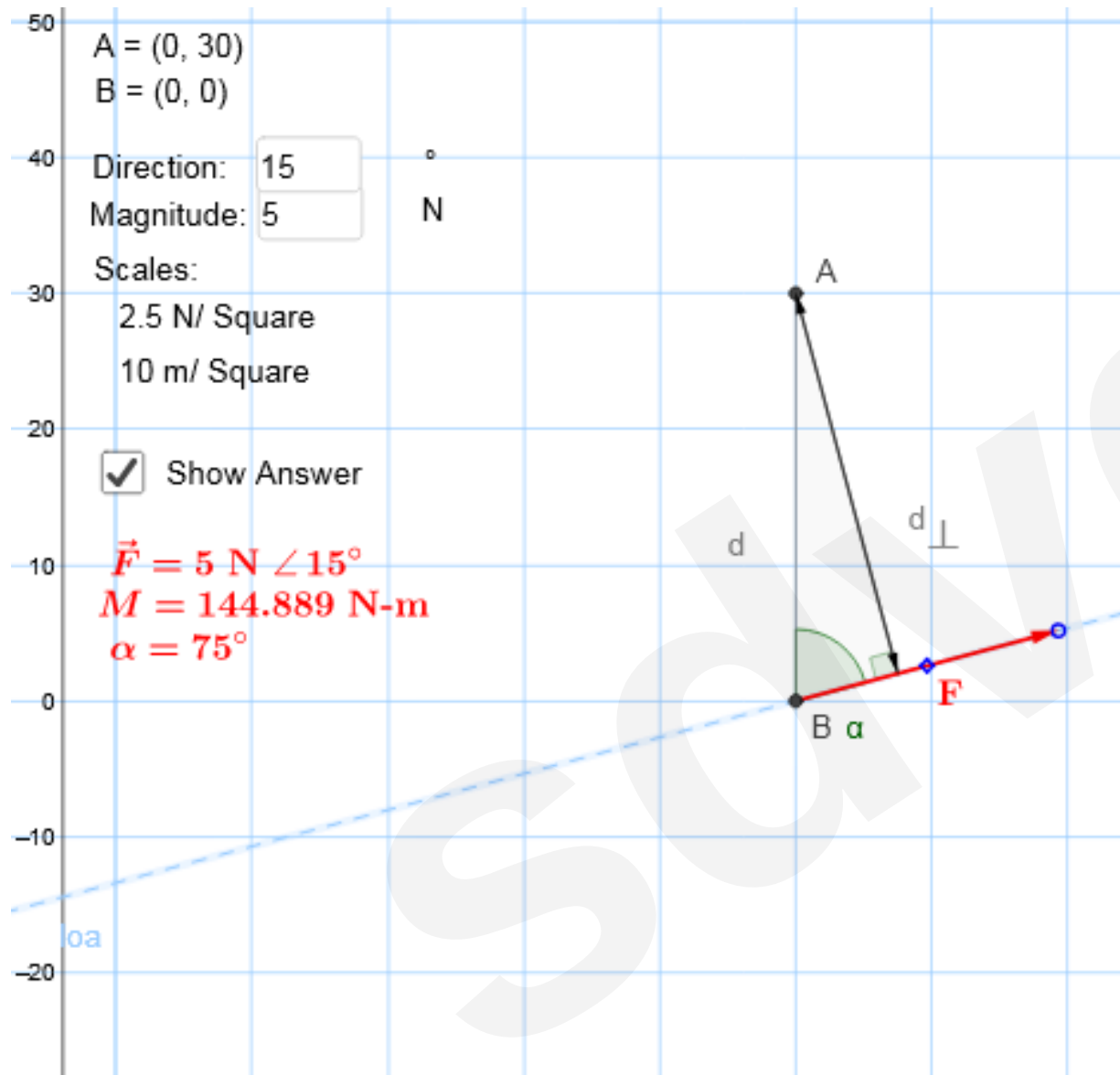
(c)



(d)



• بازو (r)
(بازوی غیر عمود) یا (بازوی واصل)



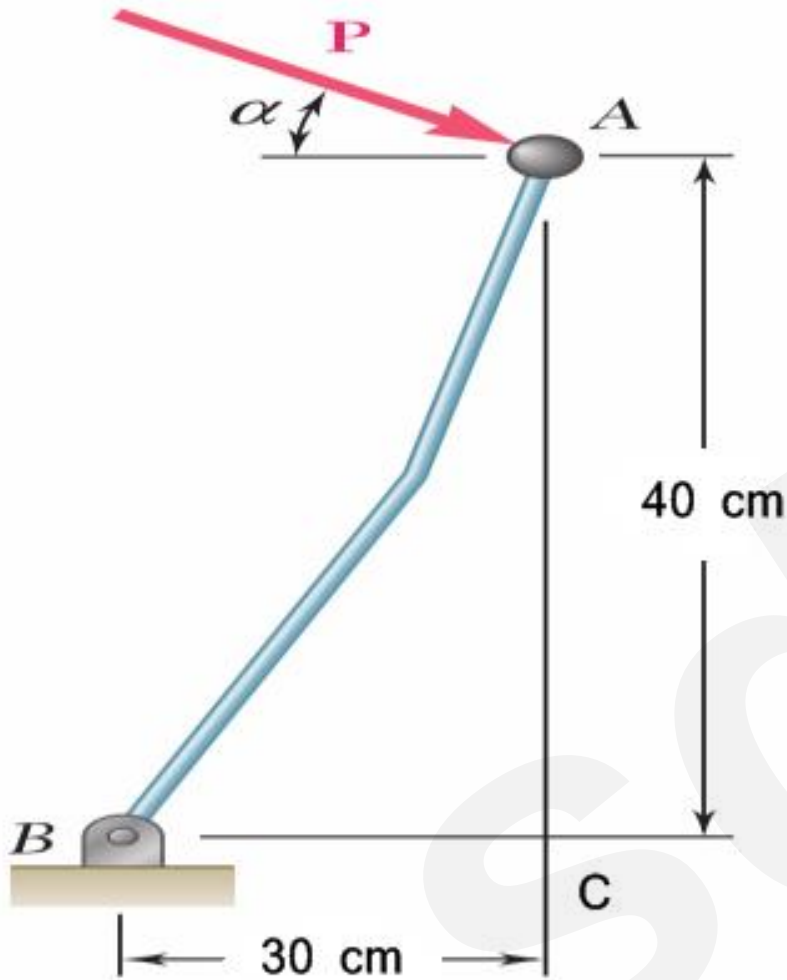
Moment Visualizer 1.webm

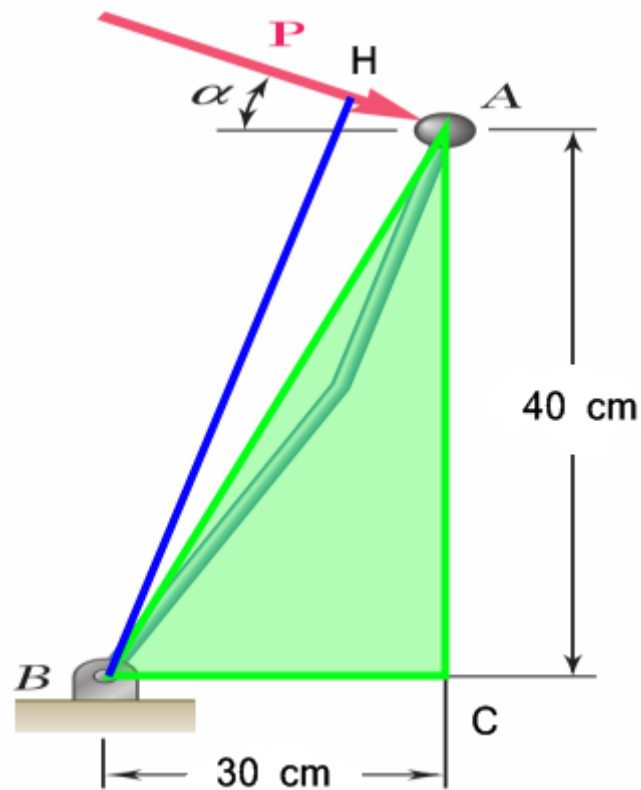
مثال

• مطلوبست گشتاور نیروی $P=60\text{N}$ که به نقطه A از دسته کنترل یک جک هیدرولیک وارد می‌شود، حول نقطه B .

$$\alpha = 25^\circ$$

❖ این مساله را با ۴ روش حل خواهیم کرد.





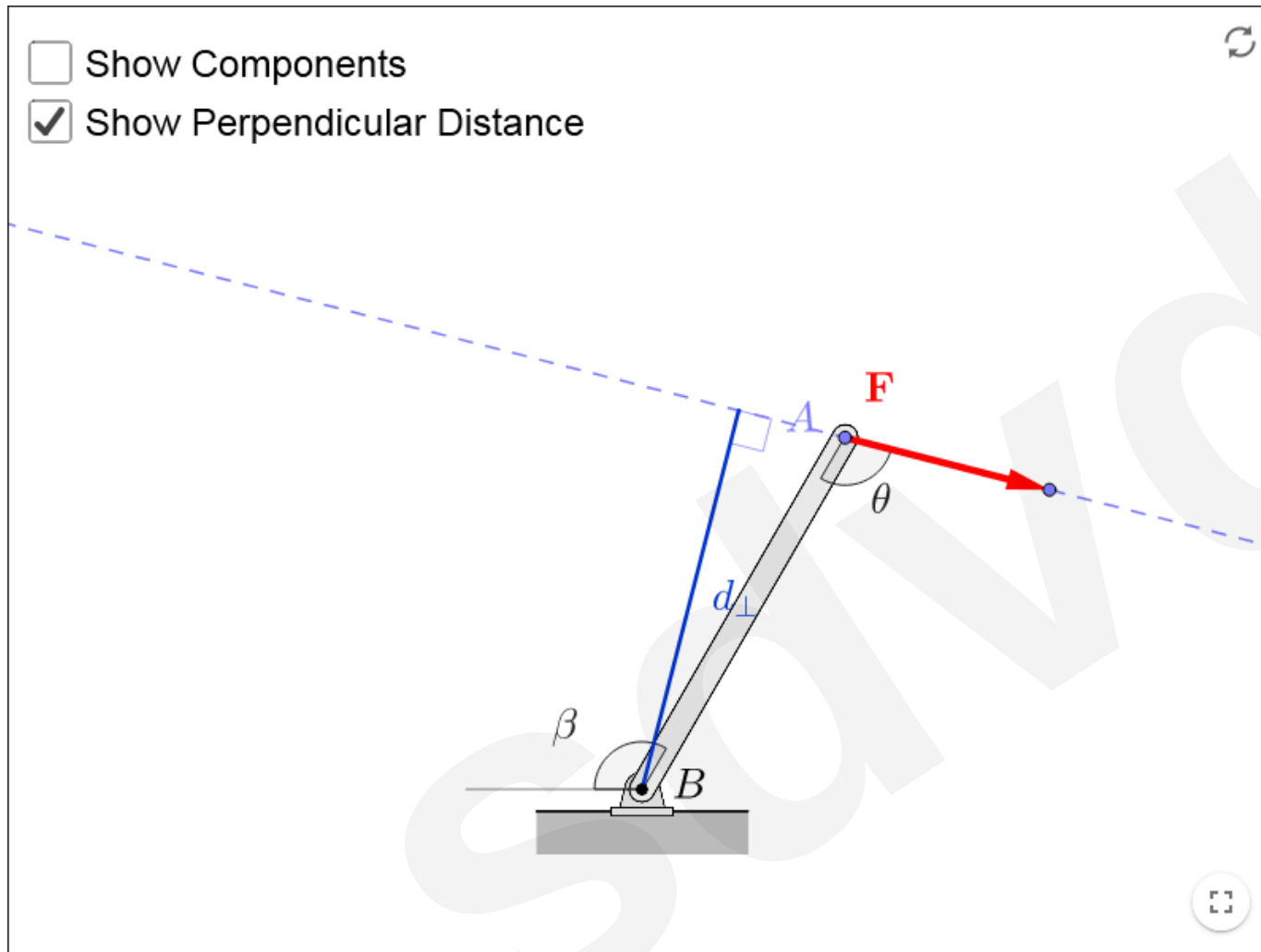
- مطلوبست گشتاور نیروی $P=50\text{N}$ که به نقطه A از دسته کنترل جک هیدرولیک وارد می‌شود حول نقطه B. $\alpha=25^\circ$

• روش اول: بازوی عمود

- ΔABC : $\angle C = 90^\circ$, $AB = 50\text{ cm}$, $\angle A \cong 36.9^\circ$
- ΔABH : $BH \perp P$, $\angle H = 90^\circ$, $\angle A = 25 + 90 - 36.9 = 78.1$,

$$\frac{BH}{\sin A} = \frac{AB}{\sin 90} \rightarrow \frac{BH}{\sin 78.1} = \frac{50}{\sin 90} \rightarrow BH = 48.9$$

$$\begin{aligned} \bullet M_B^P &= P \cdot d = P \cdot (BH) = 50 * 48.9 = 2935.5 \text{ N.cm} \\ &= 29.4 \text{ N.m} \end{aligned}$$

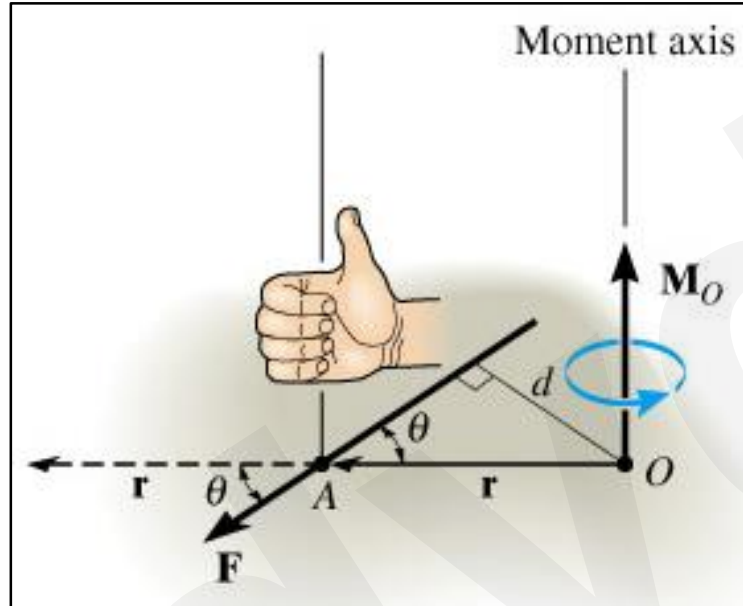


Moment of Force about a point.webm

بازوی گشتاور (با هر زاویه)

• بازوی عمود (d)

• از مرکز گشتاور به خط اثر نیرو عمود است.



• بازو (r) (بازوی غیر عمود)

• از مرکز/محور گشتاور به هر

نقطه‌ای روی خط اثر نیرو با

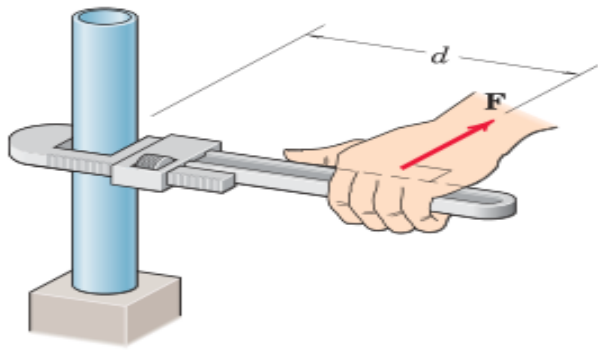
هر زاویه‌ای وصل می‌شود.

• (نقطه روی خط اثر نیرو طوری انتخاب شود که مختصات آن یا معلوم باشد، یا به سهولت قابل محاسبه باشد.)

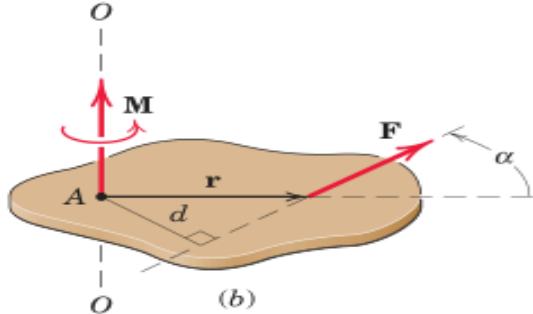
• θ = زاویه بین خط اثر نیرو و بازو

❖ اگر $\theta = 90^\circ$ باشد، بازو به بازوی عمود تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} M_O^F &= rF \sin \theta \\ &= F(r \sin \theta) \\ &= Fd \end{aligned}$$



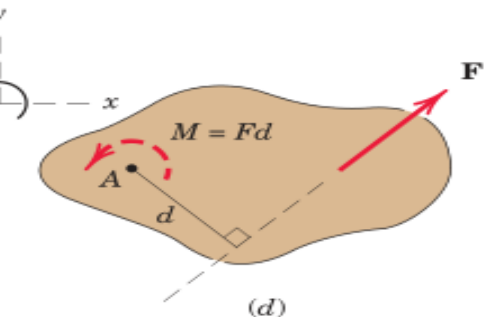
(a)



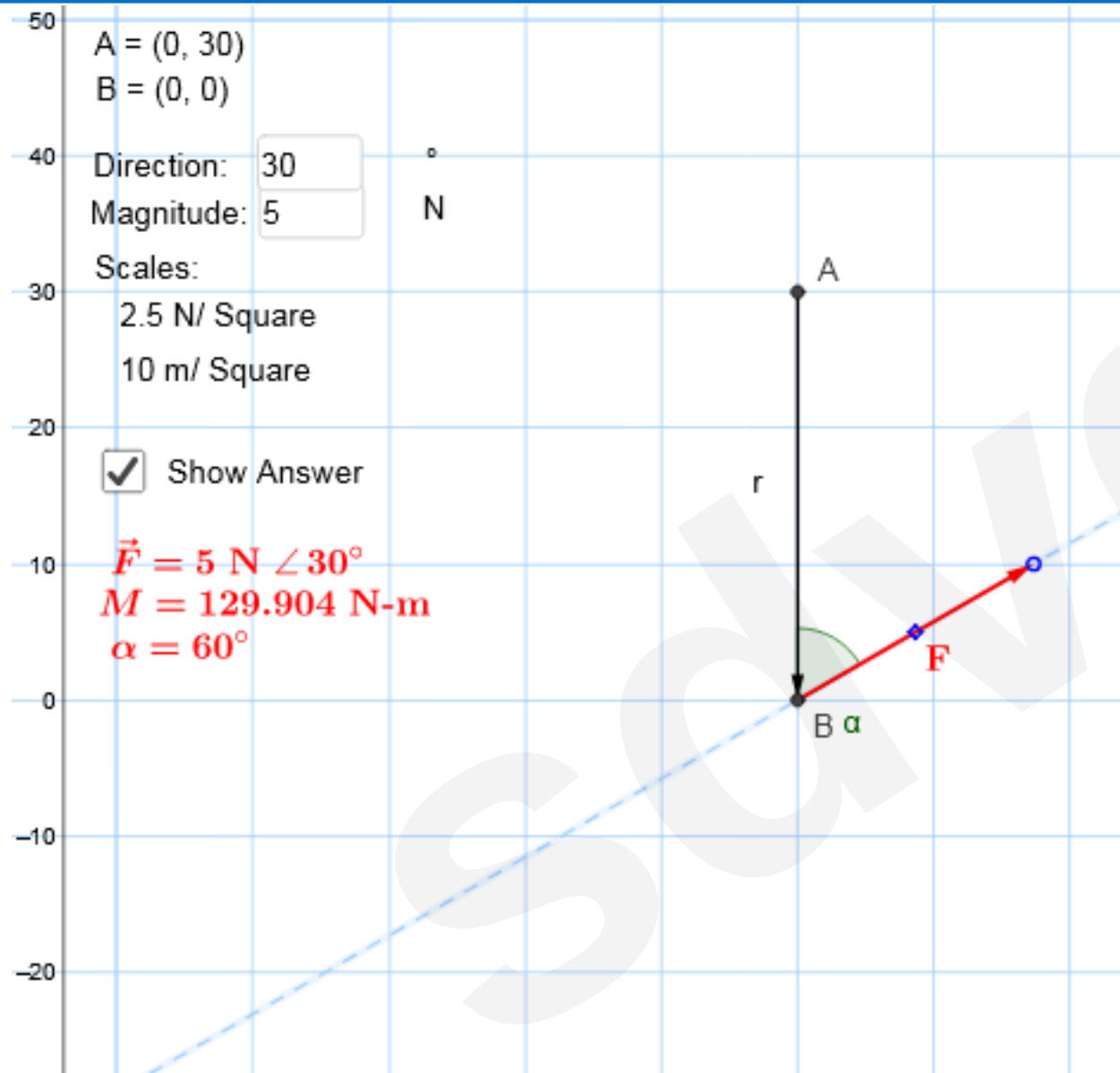
(b)



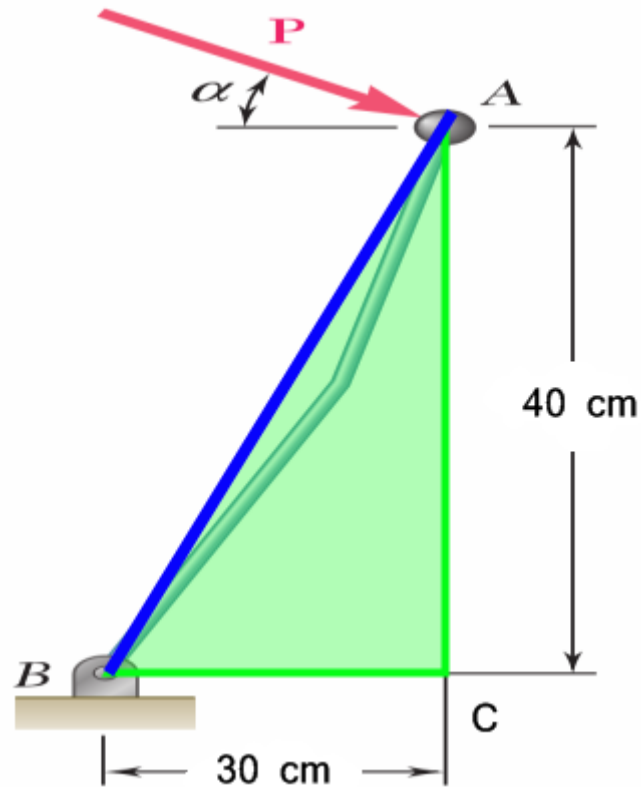
(c)



(d)



Moment Visualizer 3.webm



- مطلوبست گشتاور نیروی $P=50\text{N}$ که به نقطه A از دسته کنترل جک هیدرولیک وارد می‌شود حول نقطه B. $\alpha=25^\circ$

- **روش دوم: بازو** (بازوی غیر عمود) (زاویه بین خط اثر نیرو و بازو)

- ΔABC : $\angle C = 90^\circ$, $AB = 50\text{ cm}$, $\angle A \cong 36.9^\circ$

- $\angle P \& AB = 25 + 90 - 36.9 = 78.1^\circ$

- $M_B^P = P \cdot r \cdot \sin(\theta) = 60 * 50 * \sin(78.1) = 2935.5\text{ N.cm}$
 $= 29.4\text{ N.m}$

بردار گشتاور

• طبق تعریف (قرارداد)

• اندازه

$$M_O^F = F \cdot d = F \cdot r \cdot \sin(\theta)$$

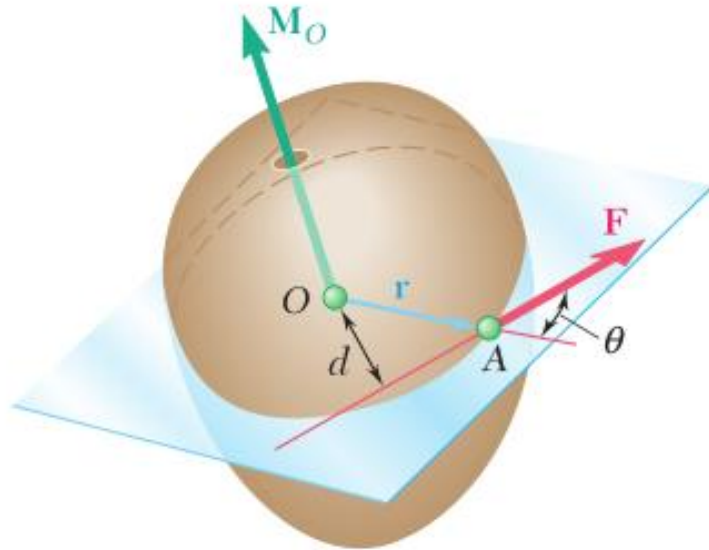
• خط اثر

محور دوران

یا عمود بر صفحه دوران

• جهت اثر

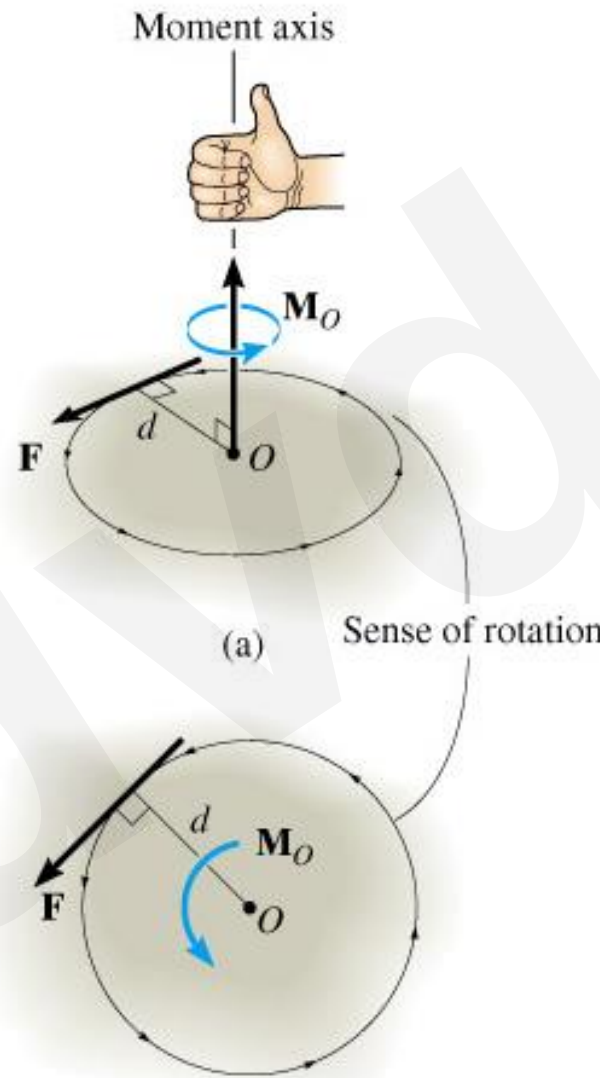
قاعده دست راست
(جهت شست دست راست،
وقتی انگشتان جهت دوران
بسته شوند.)



(a)



(b)

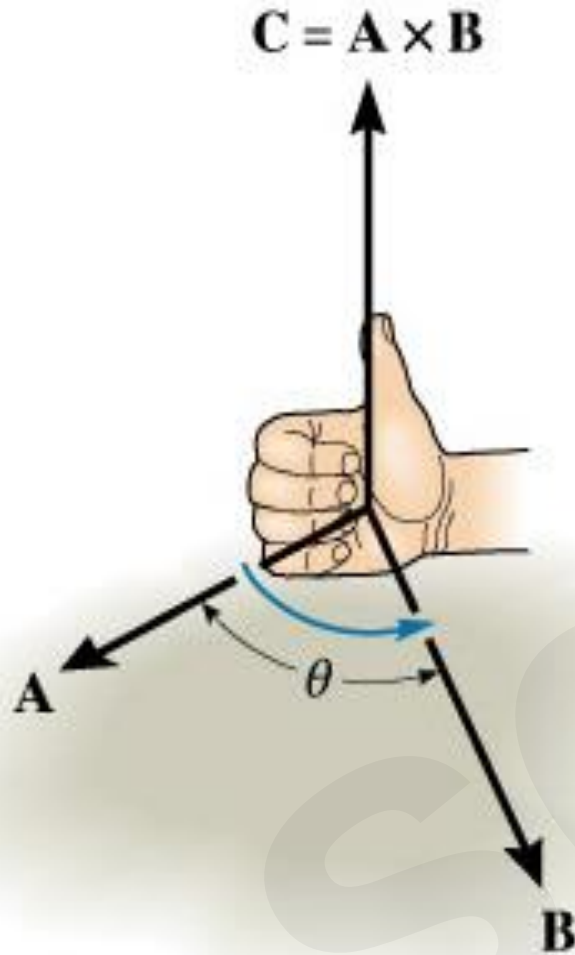


(a)

مرور ریاضیات: ضرب خارجی (بردار) دو بردار

• تعریف

طبق تعریف، ضرب خارجی دو بردار **A** و **B**، برداری مثل **C** است که به صورت زیر نوشته می‌شود.



$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

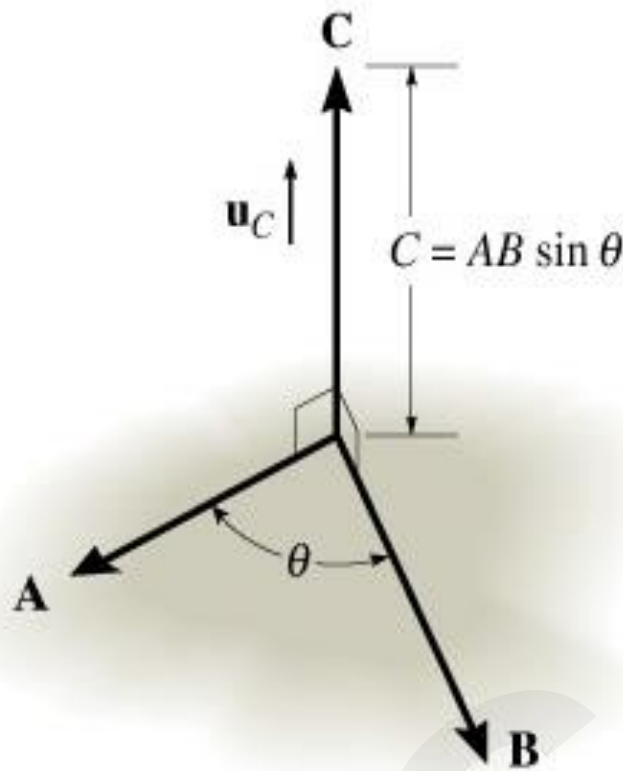
چون نتیجه حاصلضرب خارجی بردار است، باید بزرگی، خط اثر، جهت اثر و نقطه اثر آن تعریف شوند.

مرور ریاضیات: ضرب خارجی (بردار) دو بردار

1. اندازه (بزرگی، مقدار)

مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط دو بردار ساخته می‌شود.

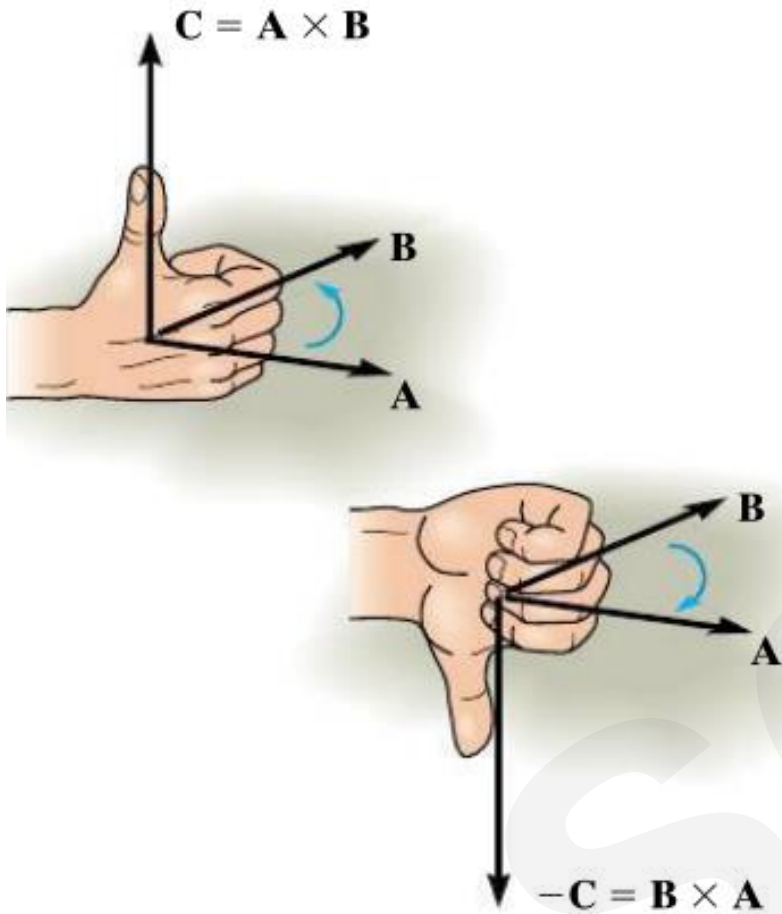
$$C = AB \sin \theta$$



مرور ریاضیات: ضرب خارجی (برداري) دو بردار

2. خط اثر

عمود بر صفحه دو بردار **A** و **B**.

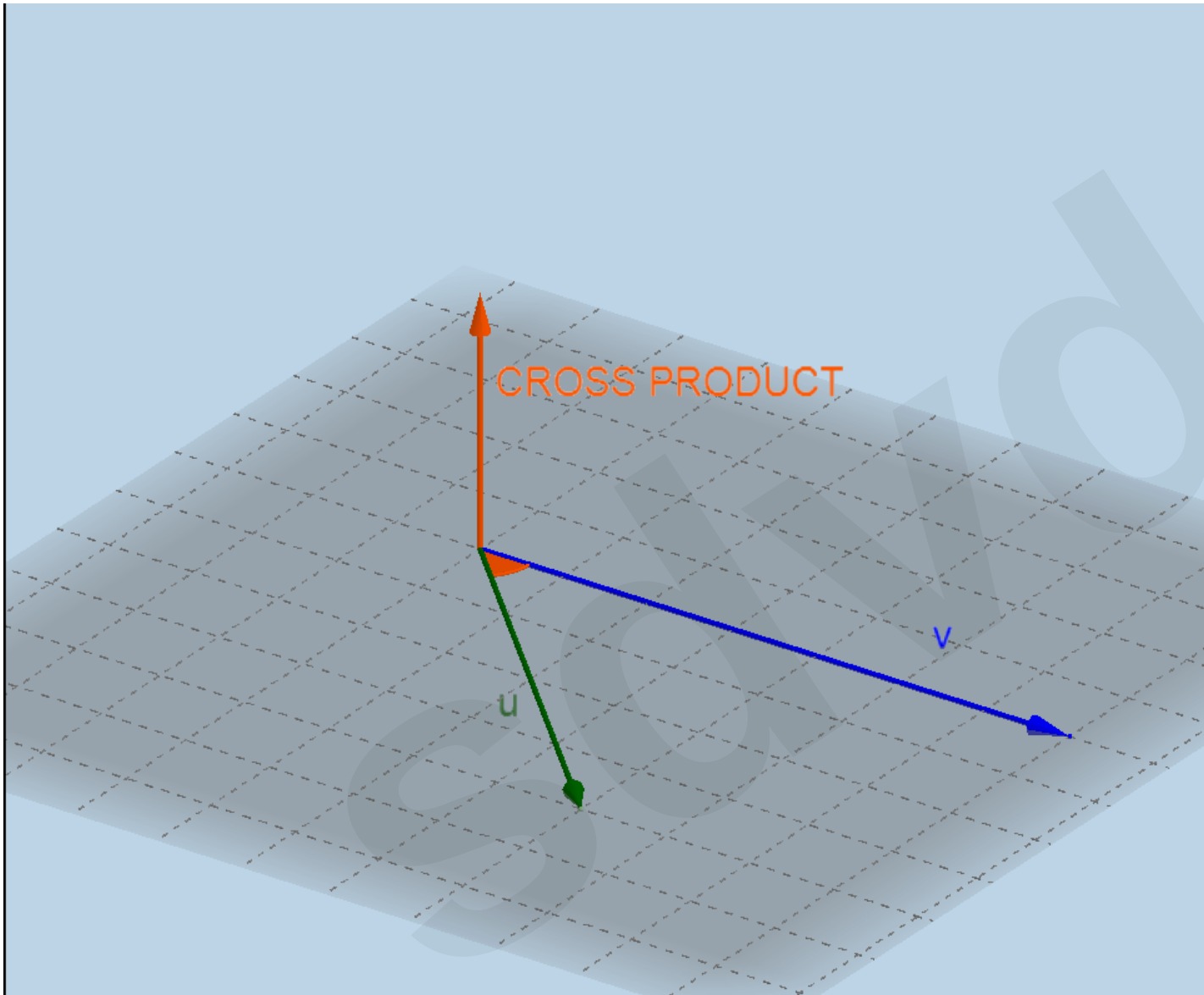


3. جهت اثر

مطابق قاعده دست راست: جهت شست دست راست، وقتی انگشتان از بردار اول به سمت بردار دوم بسته شوند.

4. نقطه اثر

اگر بردار ثابت باشد، نقطه برخورد دو بردار **A** و **B**.



Vector (Cross) Product.webm

مرور ریاضیات: ضرب خارجی دو بردار

• محاسبه ضرب خارجی

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} = & + (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} \\ & - (A_x B_z - A_z B_x) \mathbf{j} \\ & + (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \end{aligned}$$

For element $\mathbf{i}$: $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(A_y B_z - A_z B_y)$

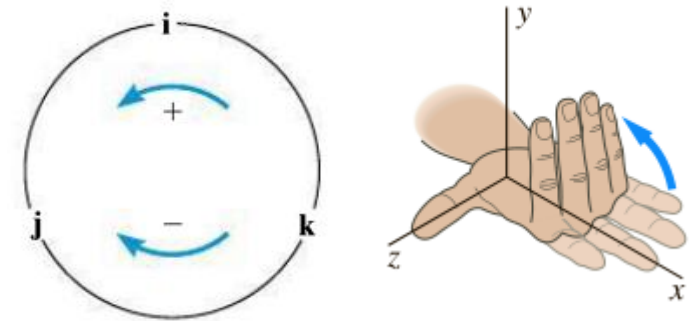
For element $\mathbf{j}$: $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\mathbf{j}(A_x B_z - A_z B_x)$

For element $\mathbf{k}$: $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{k}(A_x B_y - A_y B_x)$

Remember the negative sign

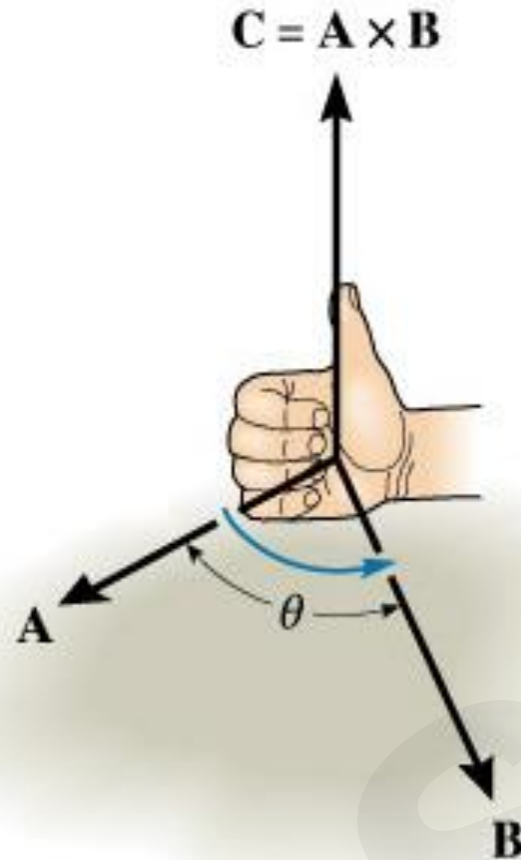
$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0, \dots$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \dots$$

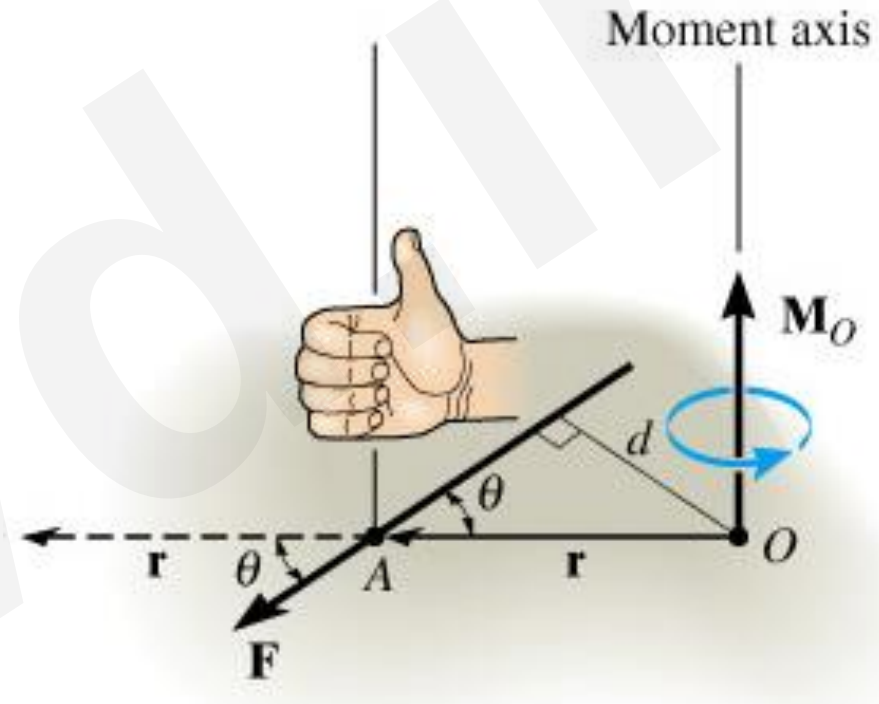


تعریف گشتاور با کمک ضرب خارجی دو بردار

- تشابه تعریف گشتاور با ضرب خارجی دو بردار (اندازه + خط اثر + جهت اثر)



$$C = A.B.\sin \theta$$

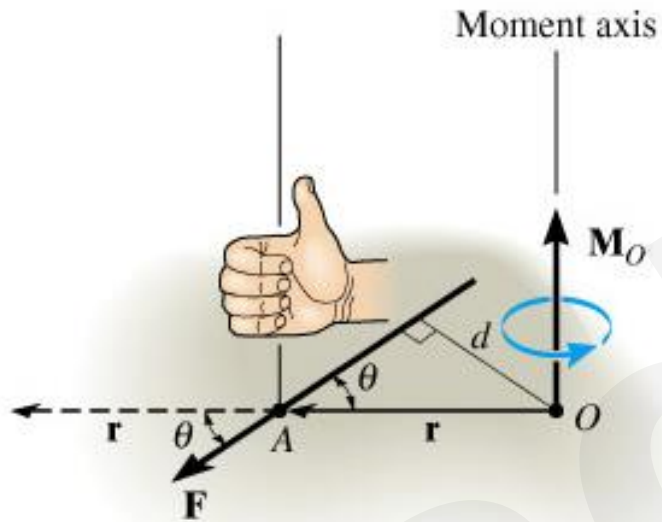


r : بردار بازو

$$M = F.r.\sin(\theta)$$

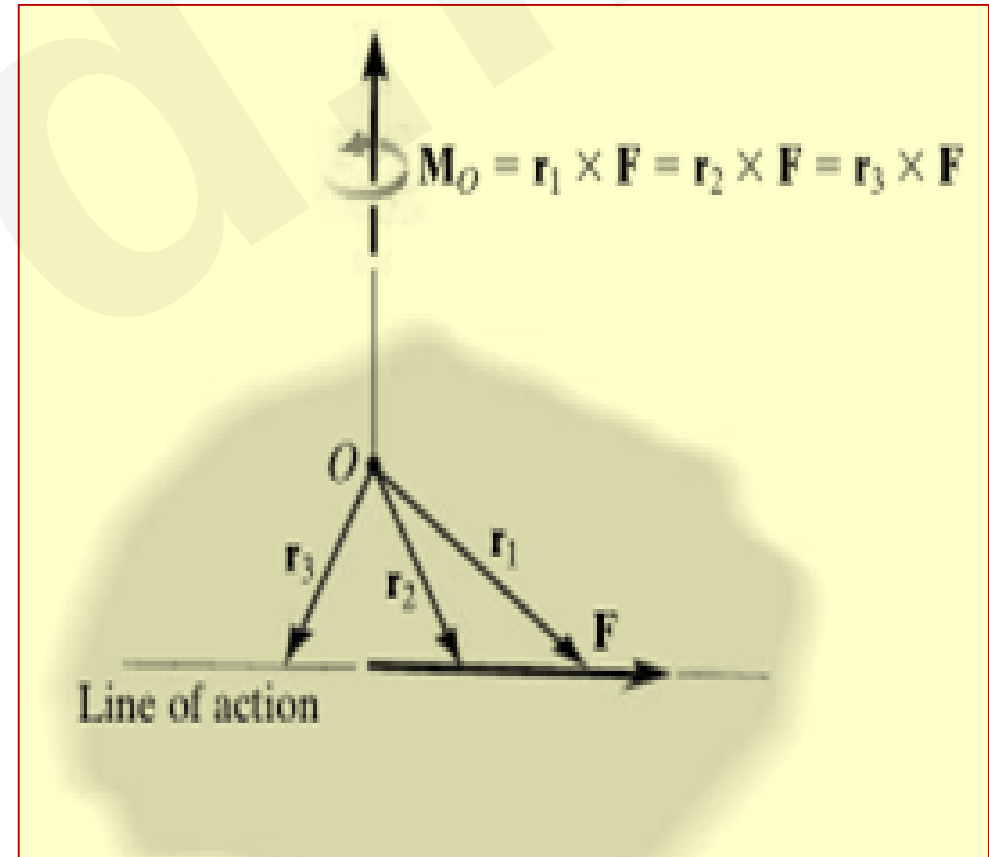
تعریف گشتاور با کمک ضرب خارجی دو بردار

- **بردار بازو:** برداری که از مرکز گشتاور به یک نقطه روی خط اثر نیرو وصل می‌شود.
- (هیچ محدودیتی برای نقطه روی خط اثر نیرو وجود ندارد و کاملاً دلخواه است. اما بهتر است نقطه روی خط اثر نیرو به نحوی انتخاب شود که مختصات آن یا معلوم باشد، یا به سهولت قابل محاسبه باشد.)

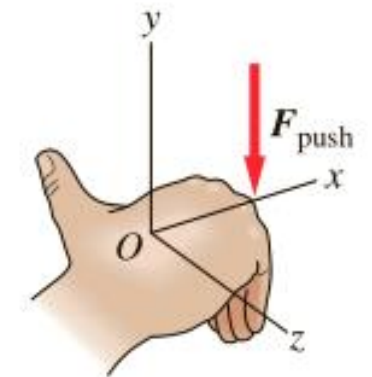
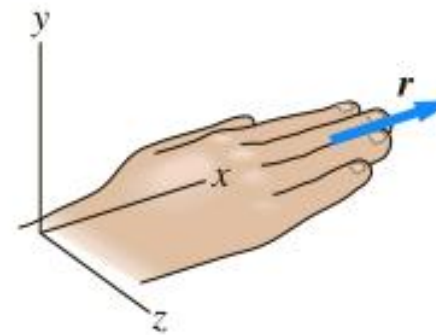
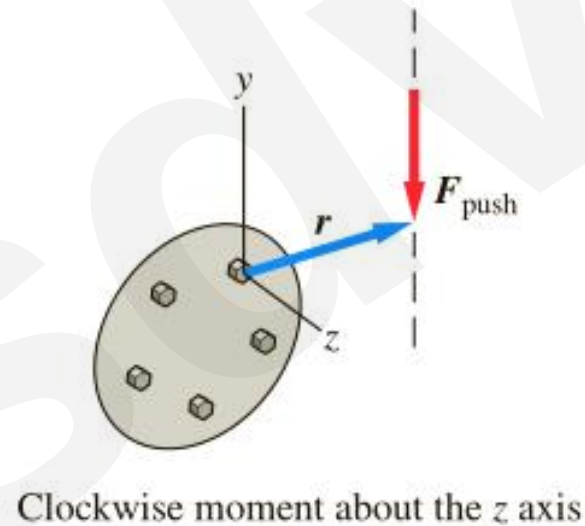
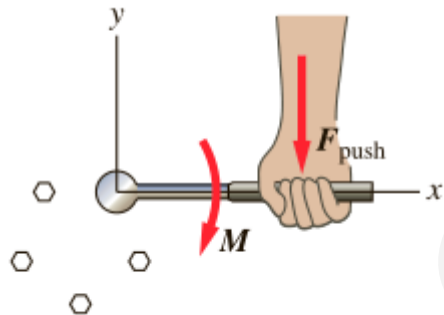
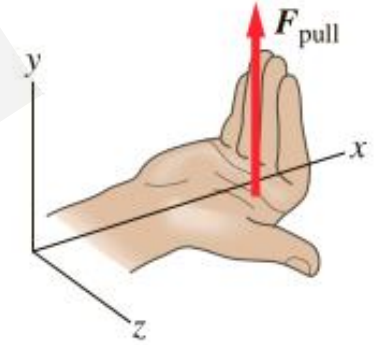
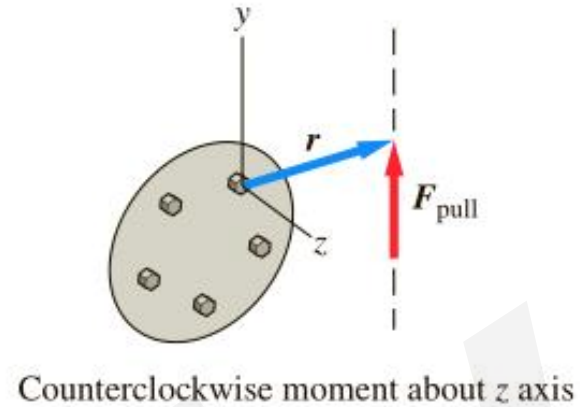
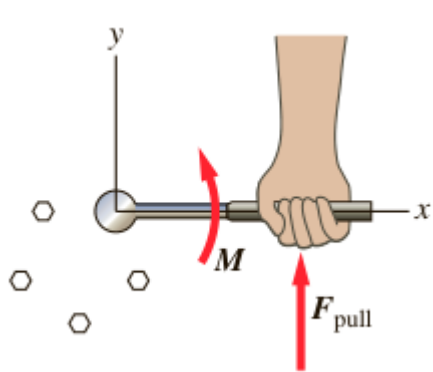


ر: بردار بازو

$$M = F \cdot r \cdot \sin(\theta)$$



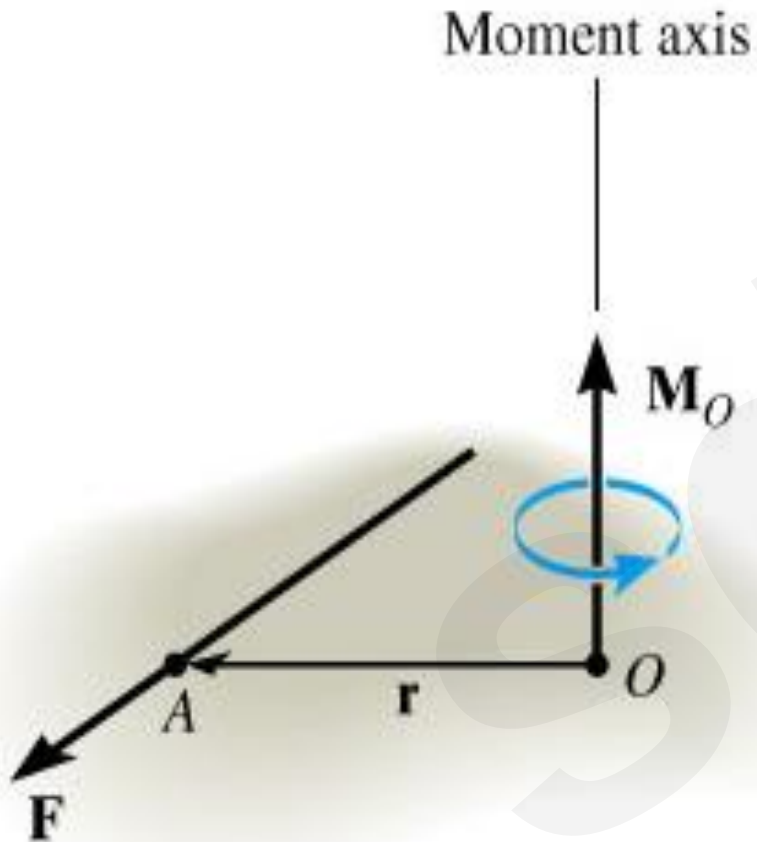
تعیین جهت گشتاور با قانون دست راست



تعریف گشتاور با کمک ضرب خارجی دو بردار

$$\mathbf{M}_O^F = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

ترتیب $\mathbf{r}$ و $\mathbf{F}$ مهم است،
تا جهت اثر صحیح باشد.

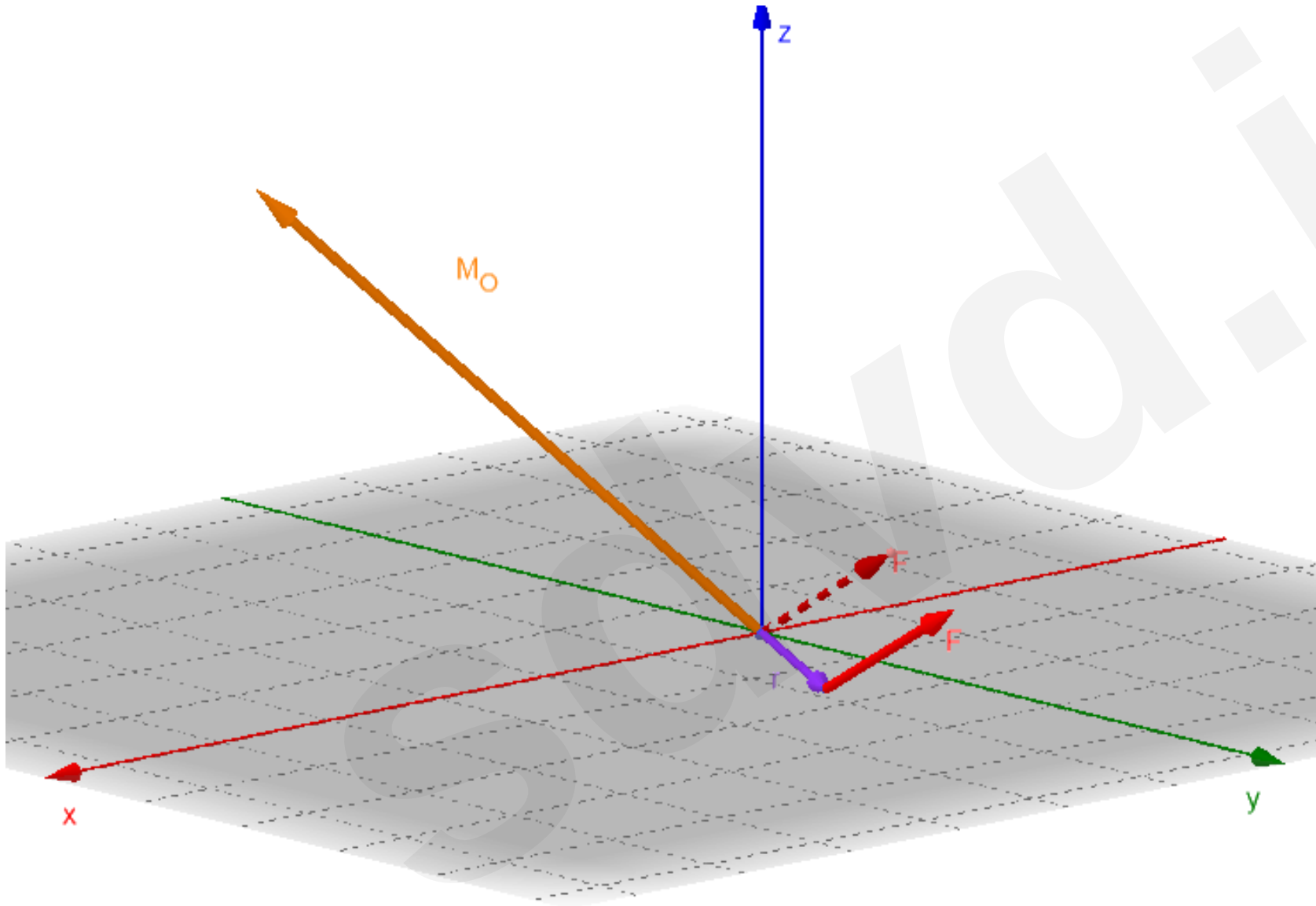


$$\mathbf{r} = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j} + r_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_O^F = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

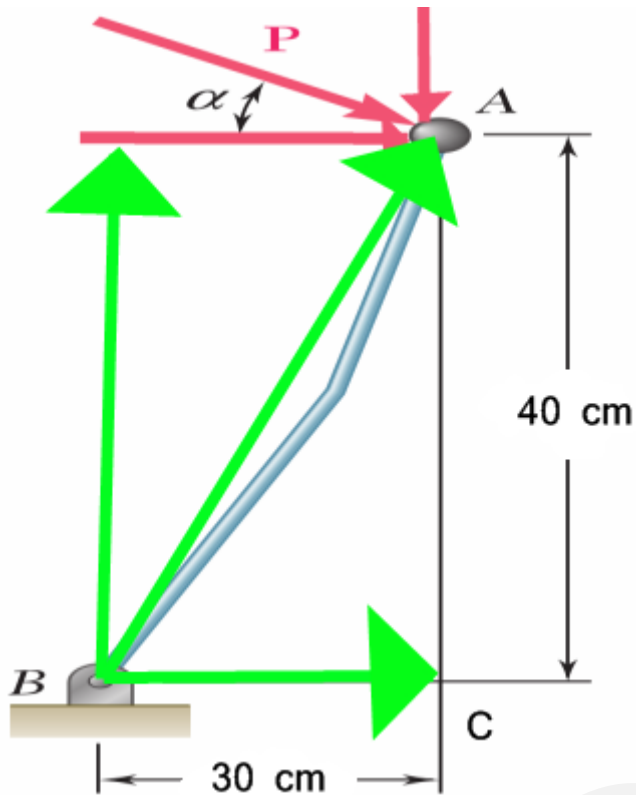
$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O^F = & (r_y F_z - r_z F_y) \mathbf{i} \\ & - (r_x F_z - r_z F_x) \mathbf{j} \\ & + (r_x F_y - r_y F_x) \mathbf{k} \end{aligned}$$



3D Moment.webm

- مطلوبست گشتاور نیروی $P=60\text{N}$ که به نقطه A از دسته کنترل جک هیدرولیک وارد می‌شود حول نقطه B. $\alpha=25^\circ$

• روش سوم: برداری



- $\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} = P \cos \alpha \vec{i} + P \sin \alpha \vec{j}$
 $\vec{P} = 60 \cos 25 \vec{i} - 60 \sin 25 \vec{j} = 54.38 \vec{i} - 25.36 \vec{j} \text{ N}$

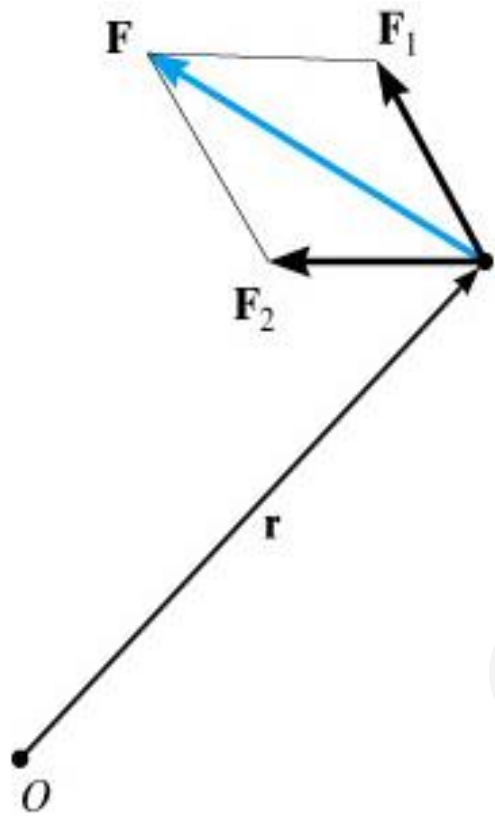
- $\vec{r} = \vec{BA} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} = 30 \vec{i} + 40 \vec{j} \text{ cm}$

- $\vec{M}_B^P = \vec{r} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 30 & 40 & 0 \\ 54.38 & -25.36 & 0 \end{vmatrix}$
 $= (40 * 0 - 0 * (-25.36)) \vec{i} - (30 * 0 - 0 * 54.38) \vec{j} + (30 * (-25.36) - 40 * 54.38) \vec{k}$
 $\vec{M}_B^P = 0 \vec{i} + 0 \vec{j} - 2936 \vec{k}$

- $M_B^P = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-2936)^2} = 2936 \text{ N.cm}$
 $= 29.4 \text{ N.m}$

قضیه وارینون (اصل گشتاور)

- برای نیروهای واقع در یک صفحه، گشتاور یک نیرو حول هر نقطه برابر حاصل جمع گشتاورهای مولفه‌های نیرو حول همان نقطه می‌باشد.



$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O^F &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2\end{aligned}$$

روش حل با مولفه‌های متعامد نیرو و بردار واصل

• مطابق قضیه وارینون برای مسائل 2D

$$\mathbf{M}_O^F = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}$$

$$\mathbf{M}_O^F = \mathbf{r} \times (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}) = \mathbf{r} \times F_x \mathbf{i} + \mathbf{r} \times F_y \mathbf{j} = M_O^{F_x} + M_O^{F_y}$$

با توجه به شکل، مقادیر عددی مولفه‌های گشتاور از دو رابطه زیر محاسبه می‌شوند.

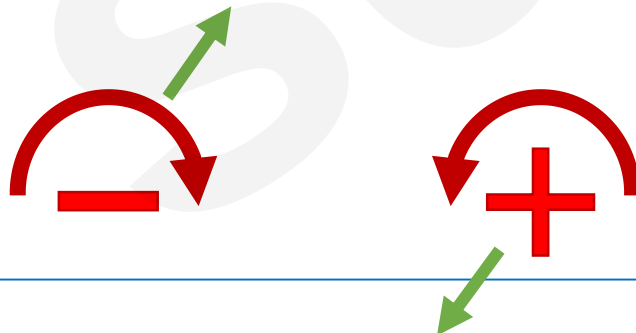
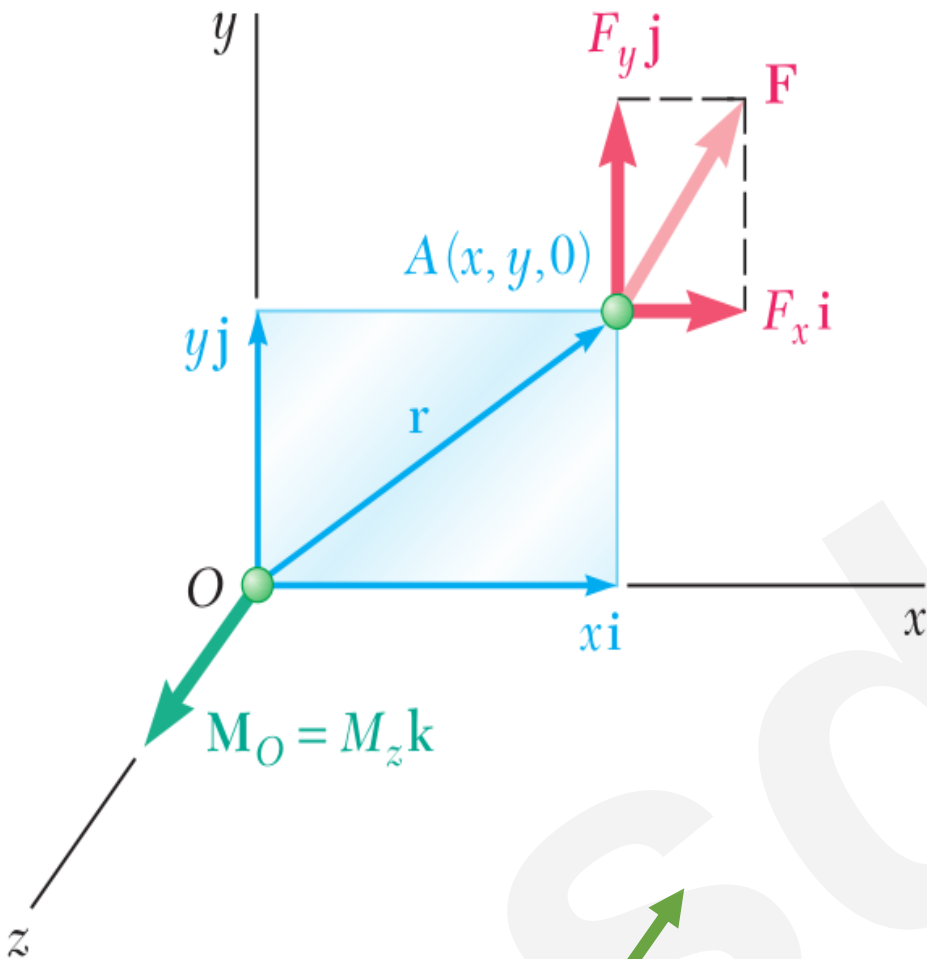
$$M_O^{F_x} = F_x \cdot r_y$$

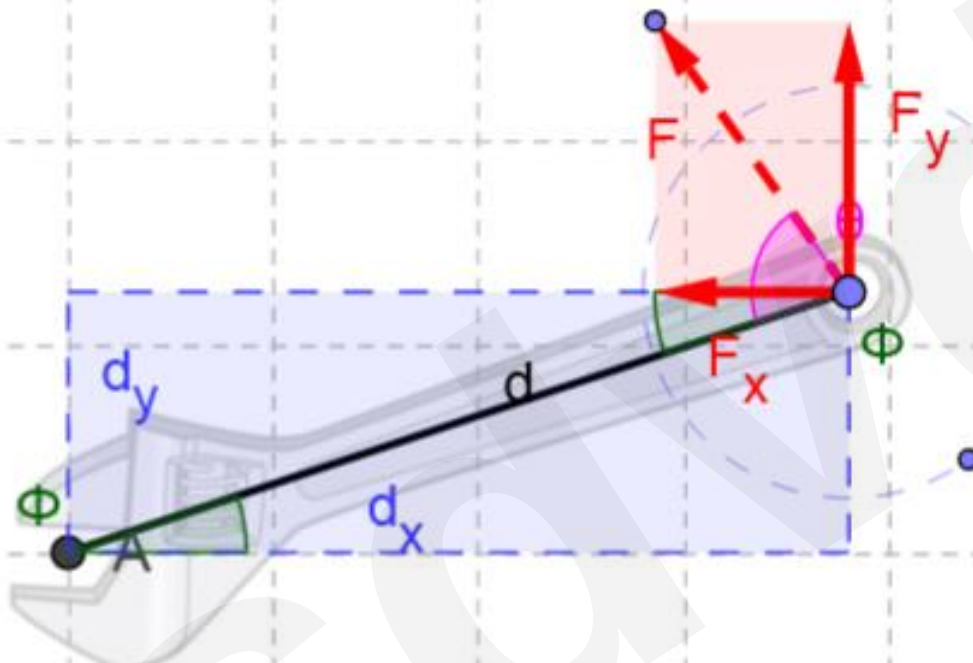
$$M_O^{F_y} = F_y \cdot r_x$$

مقدار عددی گشتاور از این رابطه به دست می‌آید.

$$M_O^F = \pm M_O^{F_x} \pm M_O^{F_y}$$

توجه: علامت هر جمله با توجه به جهت گشتاور تعیین می‌گردد.

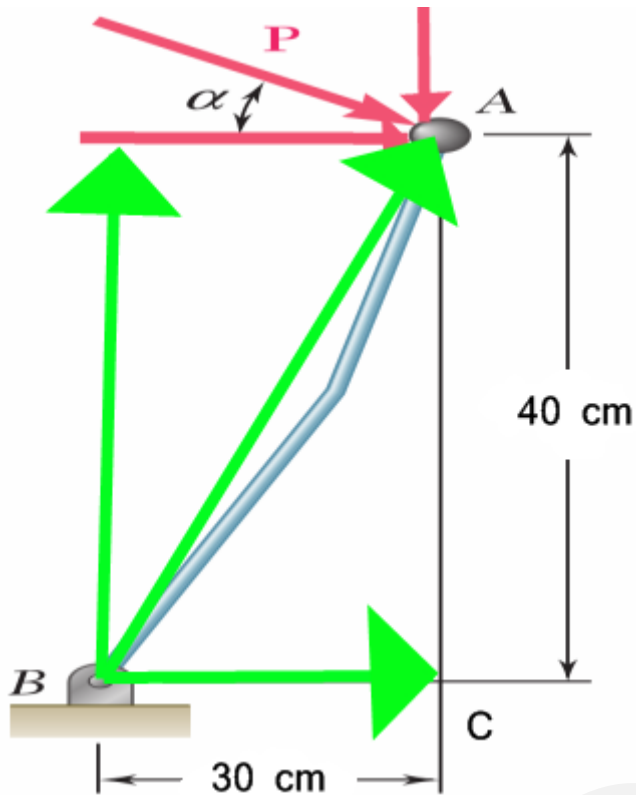




Moments - Horizontal and Vertical Components.webm

- مطلوبست گشتاور نیروی $P=60\text{N}$ که به نقطه A از دسته کنترل جک هیدرولیک وارد می‌شود حول نقطه B. $\alpha=25^\circ$

- روش چهارم: تجزیه به مولفه‌ها



$$\begin{aligned}
 M_B^P &= \pm M_B^{P_x} \pm M_B^{P_y} = -P_x r_y - P_y r_x \\
 &= -60 \cos 25(40) - 60 \sin 25(30) = -2935.8 \text{ N.cm} \\
 &= -29.4 \text{ N.m}
 \end{aligned}$$

- منفی (-) بیانگر این است که گشتاور حول محور Z (عمود بر صفحه مساله) در جهت منفی (به طرف داخل صفحه) است.

روش‌های حل مسائل گشتاور

- حالت 2D

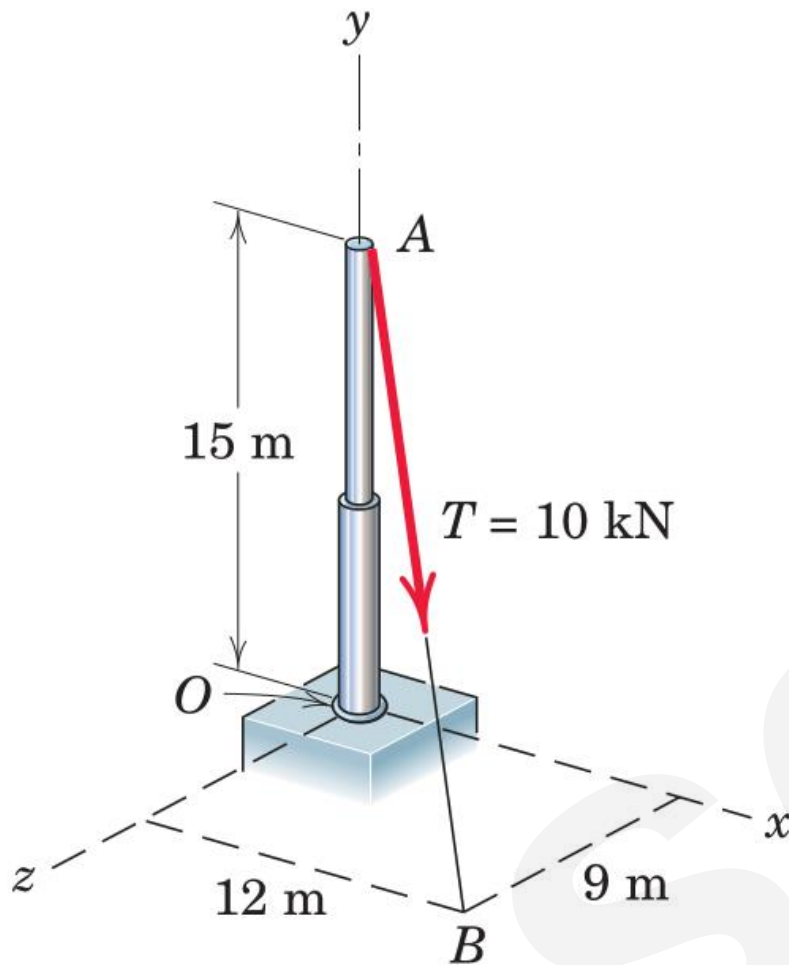
- بازوی عمود
- زاویه بین خط اثر نیرو و بازو (بازوی غیر عمود)
- تجزیه نیرو و بازو به مولفه‌های افقی و قائم
- برداری

- حالت 3D

- ترجیحا برداری

مثال سه بعدی (۱)

مطلوبست گشتاور کشش کابل AB حول نقطه O.



$$\vec{M}_O^T = \vec{r}_{O?} \times \vec{T}$$

$$\vec{r}_{O?} = \vec{r}_{OA} \quad ? \quad \vec{r}_{O?} = \vec{r}_{OB}$$

$$\vec{r}_{OA} = r_{OA_x} \vec{i} + r_{OA_y} \vec{j} + r_{OA_z} \vec{k} = 0\vec{i} - 15\vec{j} + 0\vec{k} \text{ m}$$

$$\vec{T} = T \vec{\lambda}_T$$

$$\vec{\lambda}_T = \vec{\lambda}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{AB_x \vec{i} + AB_y \vec{j} + AB_z \vec{k}}{\sqrt{AB_x^2 + AB_y^2 + AB_z^2}} = \frac{12\vec{i} - 15\vec{j} + 9\vec{k}}{\sqrt{12^2 + (-15)^2 + 9^2}} = \frac{12\vec{i} - 15\vec{j} + 9\vec{k}}{21.21} =$$

$$\vec{\lambda}_T = 0.566\vec{i} - 0.707\vec{j} + 0.424\vec{k}$$

$$\vec{T} = T \vec{\lambda}_T = 10(0.566\vec{i} - 0.707\vec{j} + 0.424\vec{k}) = 5.66\vec{i} - 7.07\vec{j} + 4.24\vec{k} \text{ kN}$$

$$\vec{M}_O^T = \vec{r}_{O?} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{OA_x} & r_{OA_y} & r_{OA_z} \\ T_x & T_y & T_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -15 & 0 \\ 5.66 & -7.07 & 4.24 \end{vmatrix} = -63.6\vec{i} + 0\vec{j} + 84.9\vec{k} \text{ kNm}$$

$$M_O^T = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-63.6)^2 + 0^2 + 84.9^2} = 106 \text{ kNm}$$

مثال سه بعدی (۲)

مطلوبست گشتاور کشش کابل AB ($T_{AB}=2625 \text{ N}$) حول نقطه O.

$$\vec{M}_O^T = \vec{r}_{O?} \times \vec{T}$$

$$\vec{r}_{O?} = \vec{r}_{OA} \quad ? \quad \vec{r}_{O?} = \vec{r}_{OB}$$

$$\vec{r}_{OA} = r_{OA_x} \vec{i} + r_{OA_y} \vec{j} + r_{OA_z} \vec{k} = 1.6\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} \text{ m}$$

$$\vec{T} = T \vec{\lambda}_T$$

$$\vec{\lambda}_T = \vec{\lambda}_{AB} = \frac{\vec{AB}}{AB} = \frac{AB_x \vec{i} + AB_y \vec{j} + AB_z \vec{k}}{\sqrt{AB_x^2 + AB_y^2 + AB_z^2}} = \frac{0.8\vec{i} + 1.5\vec{j} - 2\vec{k}}{\sqrt{0.8^2 + 1.5^2 + 2^2}} = \frac{0.8\vec{i} + 1.5\vec{j} - 2\vec{k}}{2.625}$$

$$\vec{T} = T \vec{\lambda}_T = 2625 \left(\frac{0.8\vec{i} + 1.5\vec{j} - 2\vec{k}}{2.625} \right) = 800\vec{i} + 1500\vec{j} - 2000\vec{k} \text{ N}$$

$$\vec{M}_O^T = \vec{r}_{O?} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_{OA_x} & r_{OA_y} & r_{OA_z} \\ T_x & T_y & T_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1.6 & 0 & 2 \\ 800 & 1500 & -2000 \end{vmatrix} = -3000\vec{i} + 4800\vec{j} + 2400\vec{k} \text{ Nm}$$

$$M_O^T = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-3000)^2 + 4800^2 + 2400^2} = 6148 \text{ Nm}$$

