

استاتیک



مدرس: شهاب داودی

www.sdvd.ir

davoudi@gmail.com

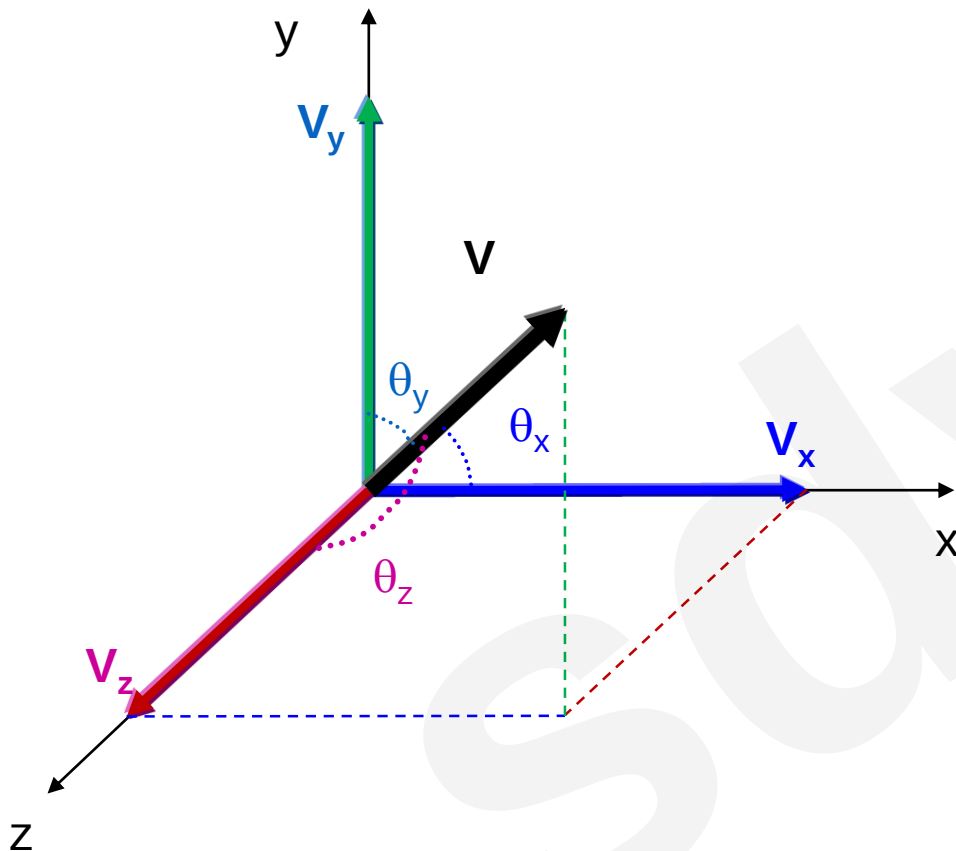
بخش دوم: تعادل ذرات (ادامه: در فضای سه بعدی 3D)

برایند و تعادل ذرات در فضای سه بعدی

مثال و تمرین: تک برگ نیرو در فضای سه بعدی، قسمت ۱ و ۲ و ۳

مرور ریاضیات

بردار بر حسب بردار یکه (۳ بعدی)
در دستگاه مختصات متعامد (قائم یا دکارتی)



$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_x + \mathbf{V}_y + \mathbf{V}_z$$

$$\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k}$$

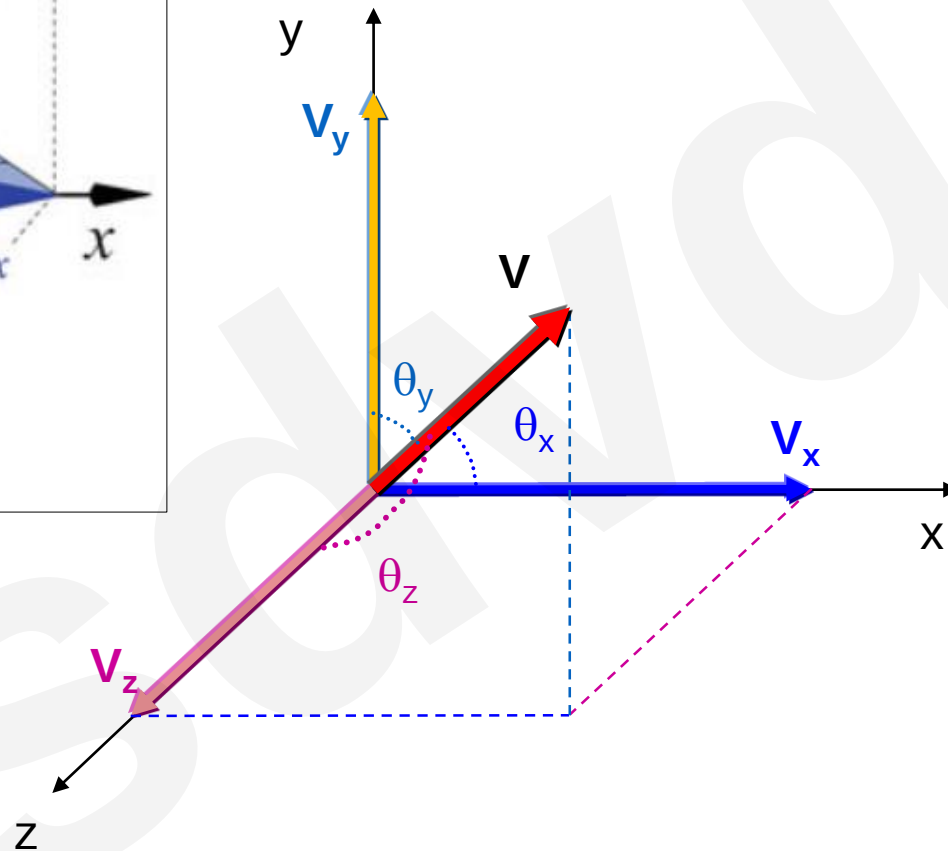
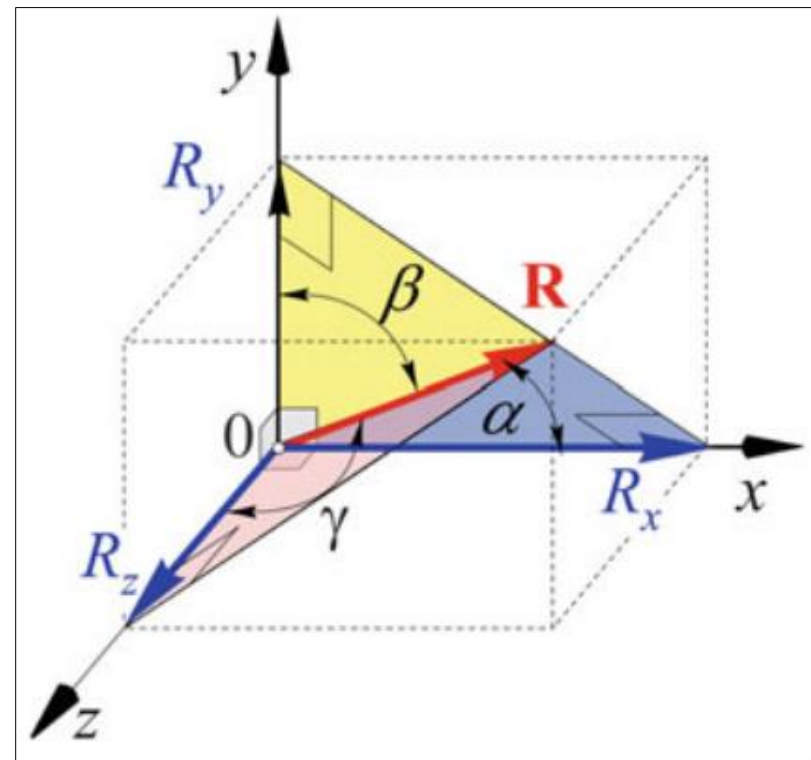
$$V_x = V \cos \theta_x = V_l$$

$$V_y = V \cos \theta_y = V_m$$

$$V_z = V \cos \theta_z = V_n$$

l و m و n را کسینوس‌های هادی بردار می‌نامند.

بردار بر حسب بردار یکه (ادامه)



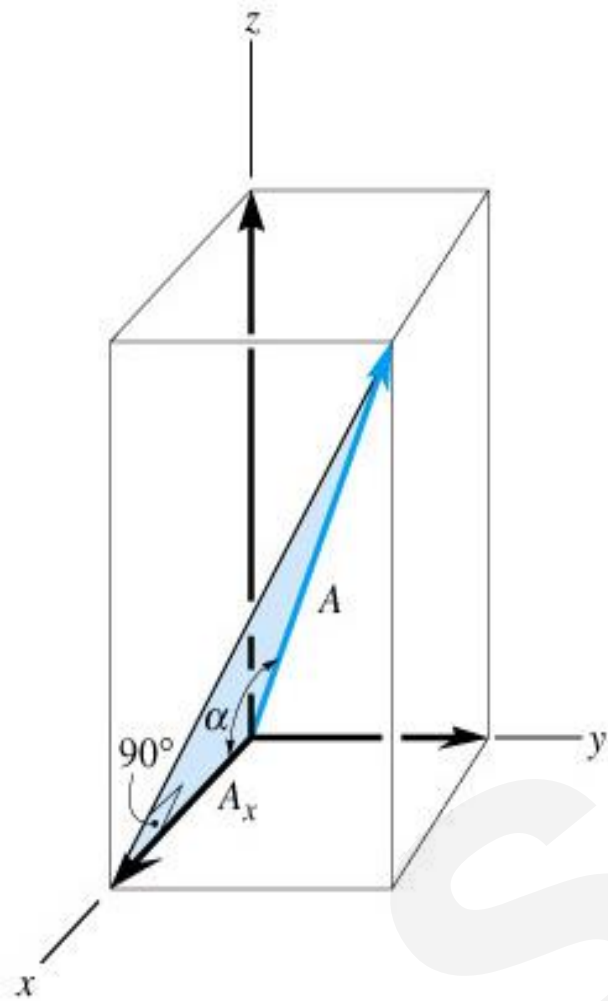
$$l = \cos \theta_x = \cos \alpha$$

$$m = \cos \theta_y = \cos \beta$$

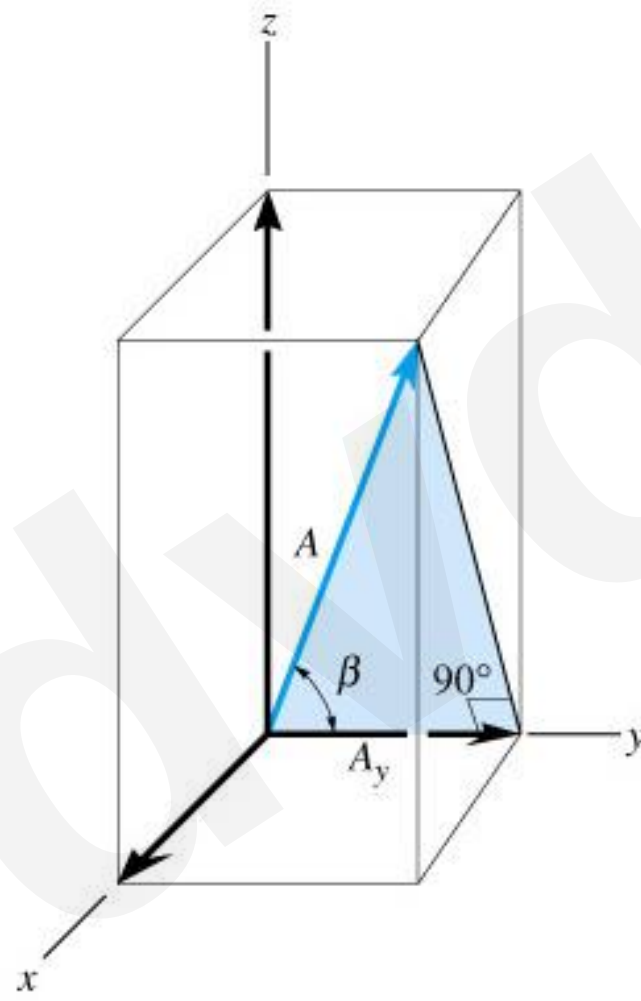
$$n = \cos \theta_z = \cos \gamma$$

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

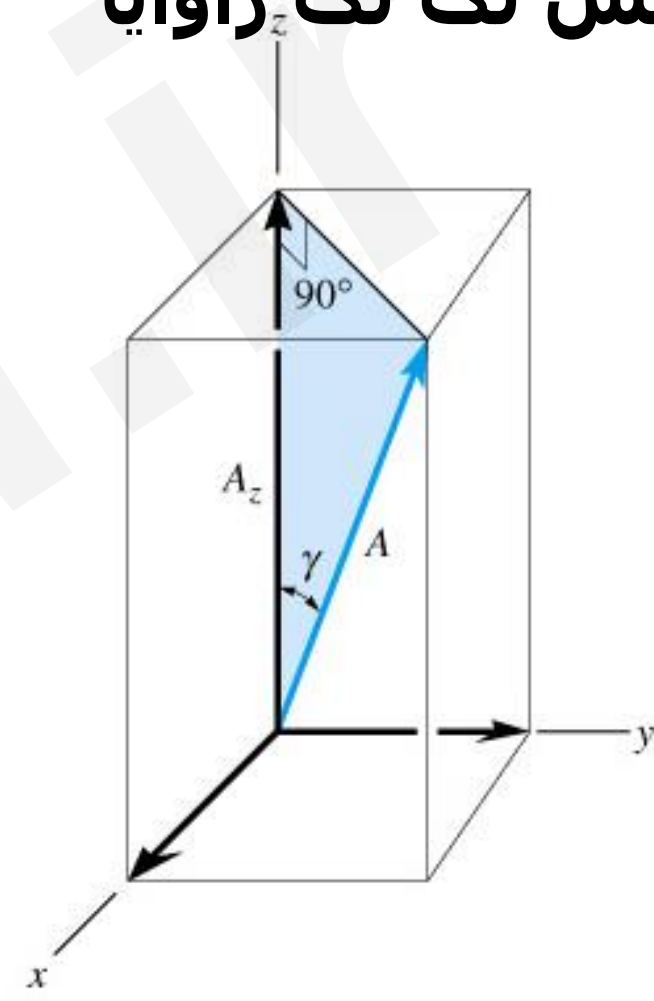
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$



(a)



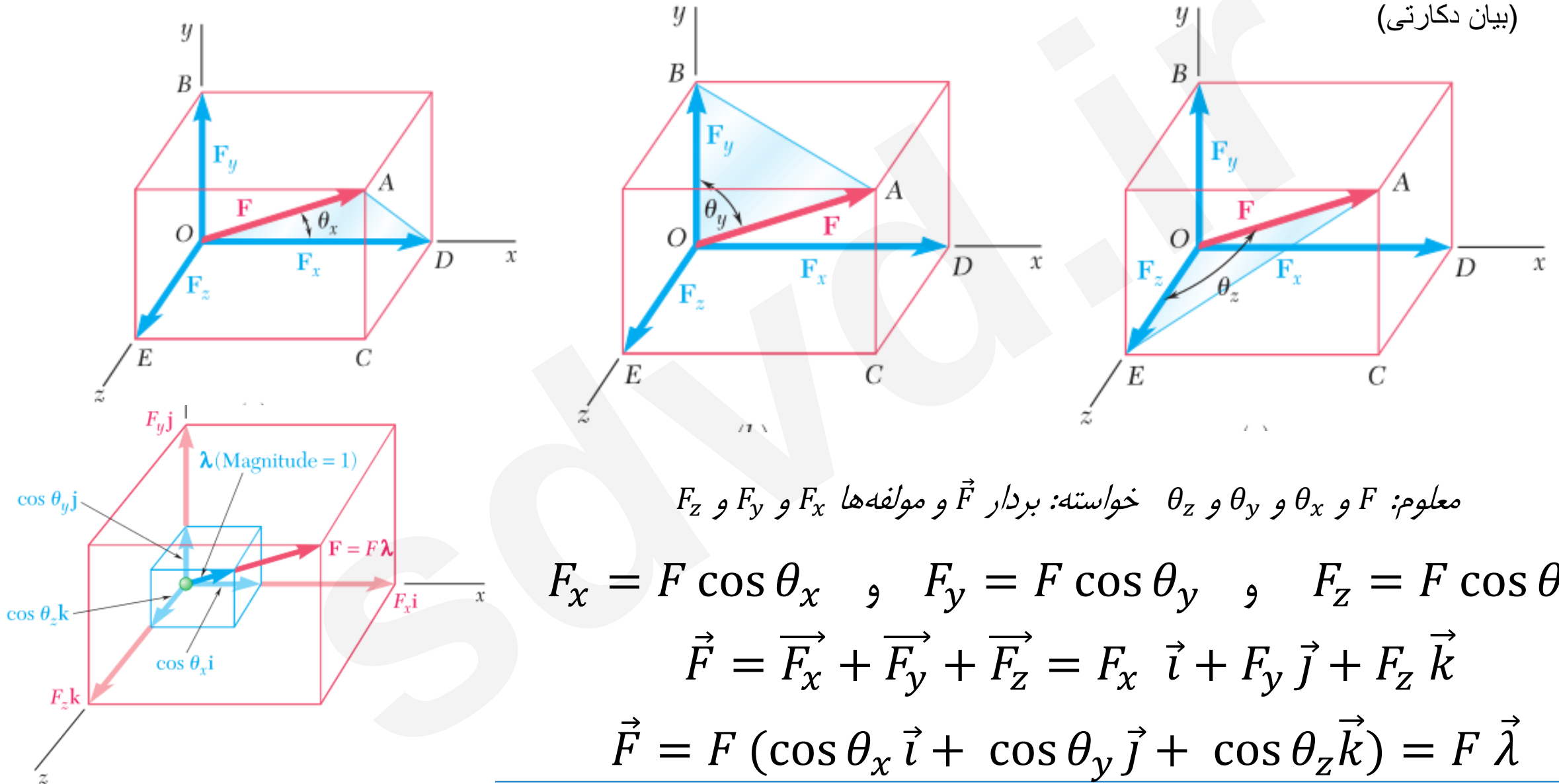
(b)



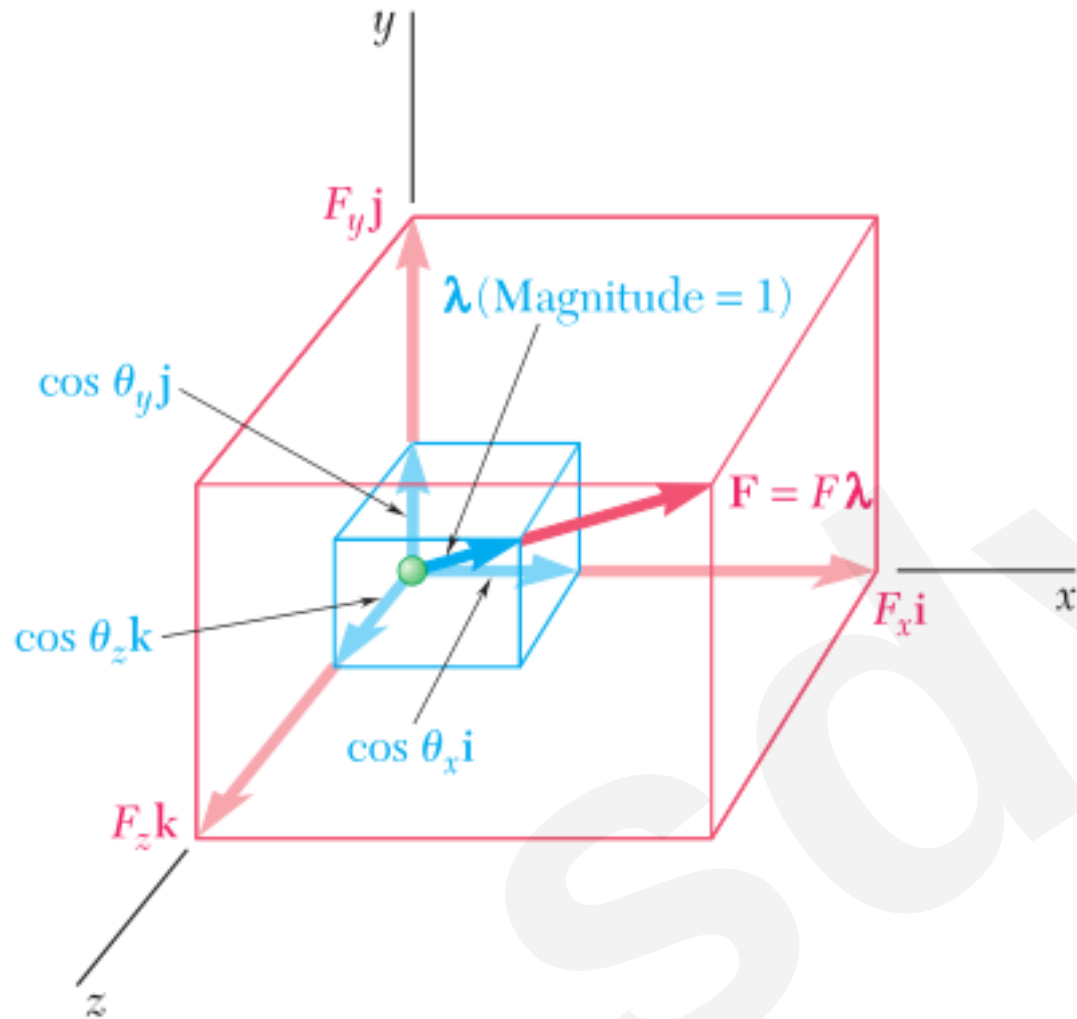
(c)

مولفه‌های متعامد یک نیرو و بردار یکه (دستگاه دکارتی سه بعدی)

(بیان دکارتی)



مولفه‌های متعامد یک نیرو و بردار یکه (دستگاه دکارتی سه بعدی)



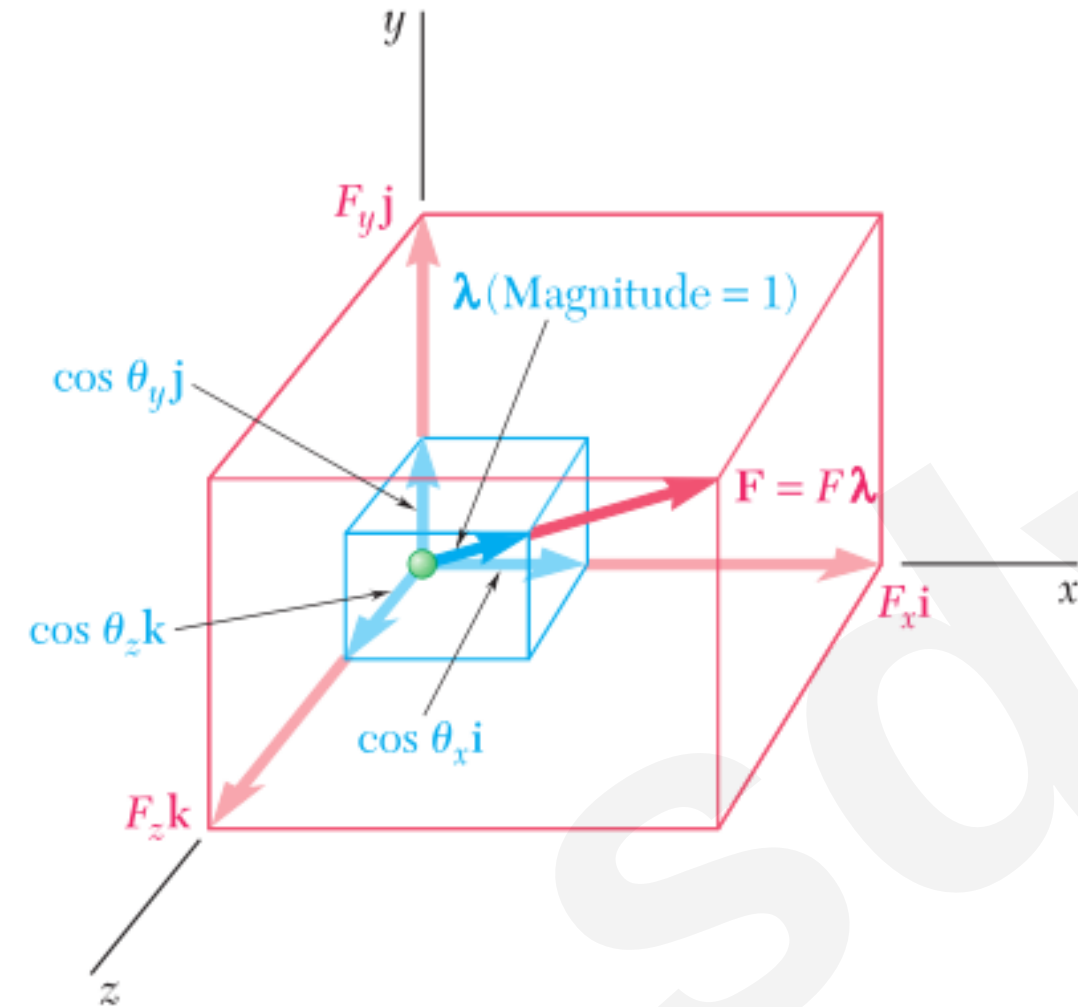
$$\vec{F} = F (\cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k}) = F \vec{\lambda}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{F}}{F} = \frac{F_x}{F} \vec{i} + \frac{F_y}{F} \vec{j} + \frac{F_z}{F} \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{\lambda} &= \cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k} \\ &= \lambda_x \vec{i} + \lambda_y \vec{j} + \lambda_z \vec{k} \end{aligned}$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow \cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

مولفه‌های متعامد یک نیرو و بردار یکه (دستگاه دکارتی سه بعدی)

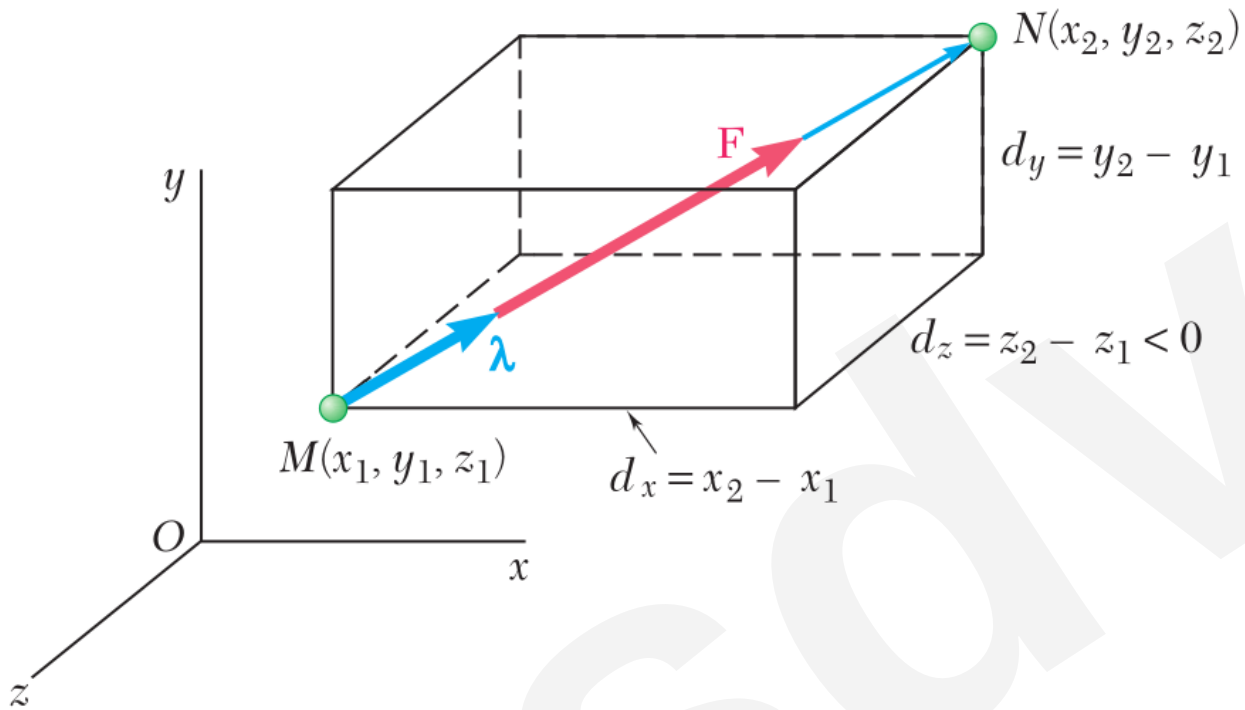


معلوم: بردار $\vec{F}$ و مولفه‌ها F_x و F_y و F_z خواسته: F و θ_x و θ_y و θ_z

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{F_x}{F} \quad , \quad \theta_y = \cos^{-1} \frac{F_y}{F} \quad , \quad \theta_z = \cos^{-1} \frac{F_z}{F}$$

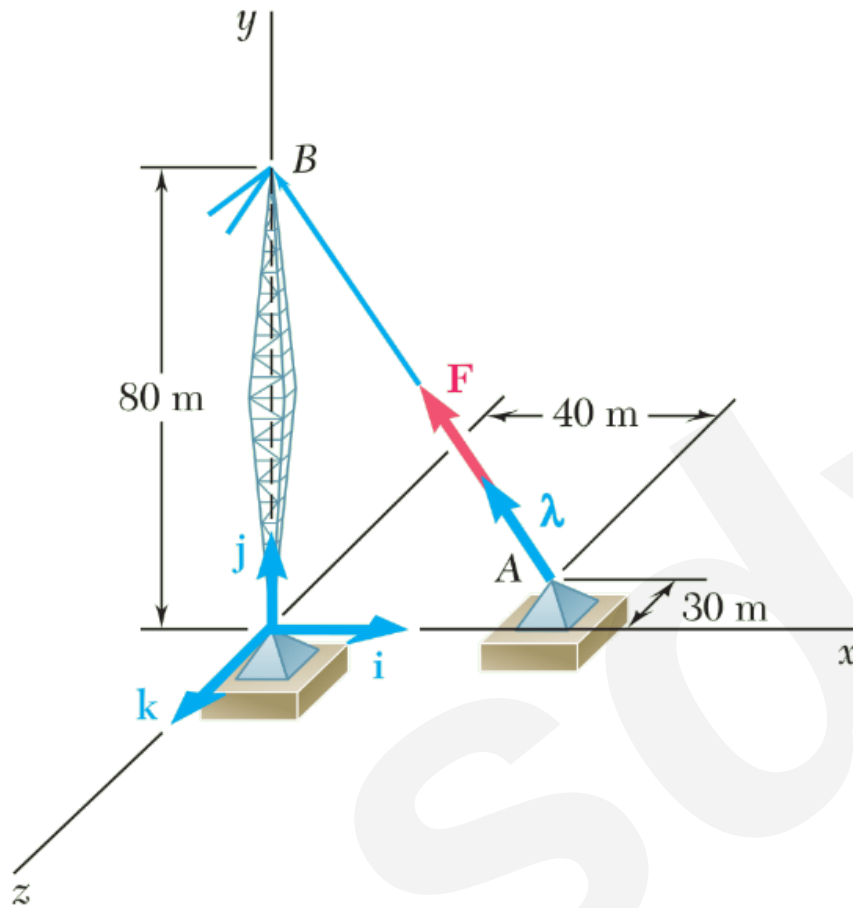
محاسبه بردار یکه ($\vec{\lambda}$) با داشتن دو نقطه



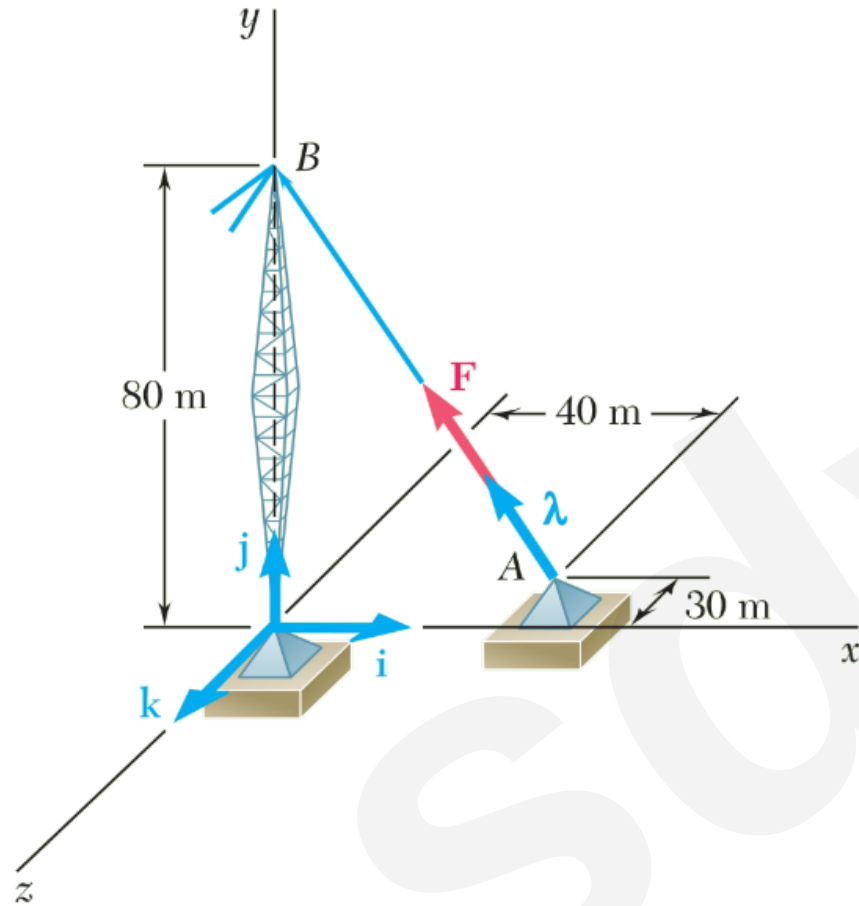
$$\begin{aligned}\vec{\lambda}_F &= \vec{\lambda}_{MN} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} \\ &= \frac{(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}\end{aligned}$$

مثال: کابل نگه‌دارنده دکل

- نیروی کابل نگه‌دارنده دکل 2500 N است. بردار نیروی وارد بر تکیه‌گاه A و زوایای این نیرو را تعیین کنید.



مثال: نیروی کابل نگه‌دارنده دکل



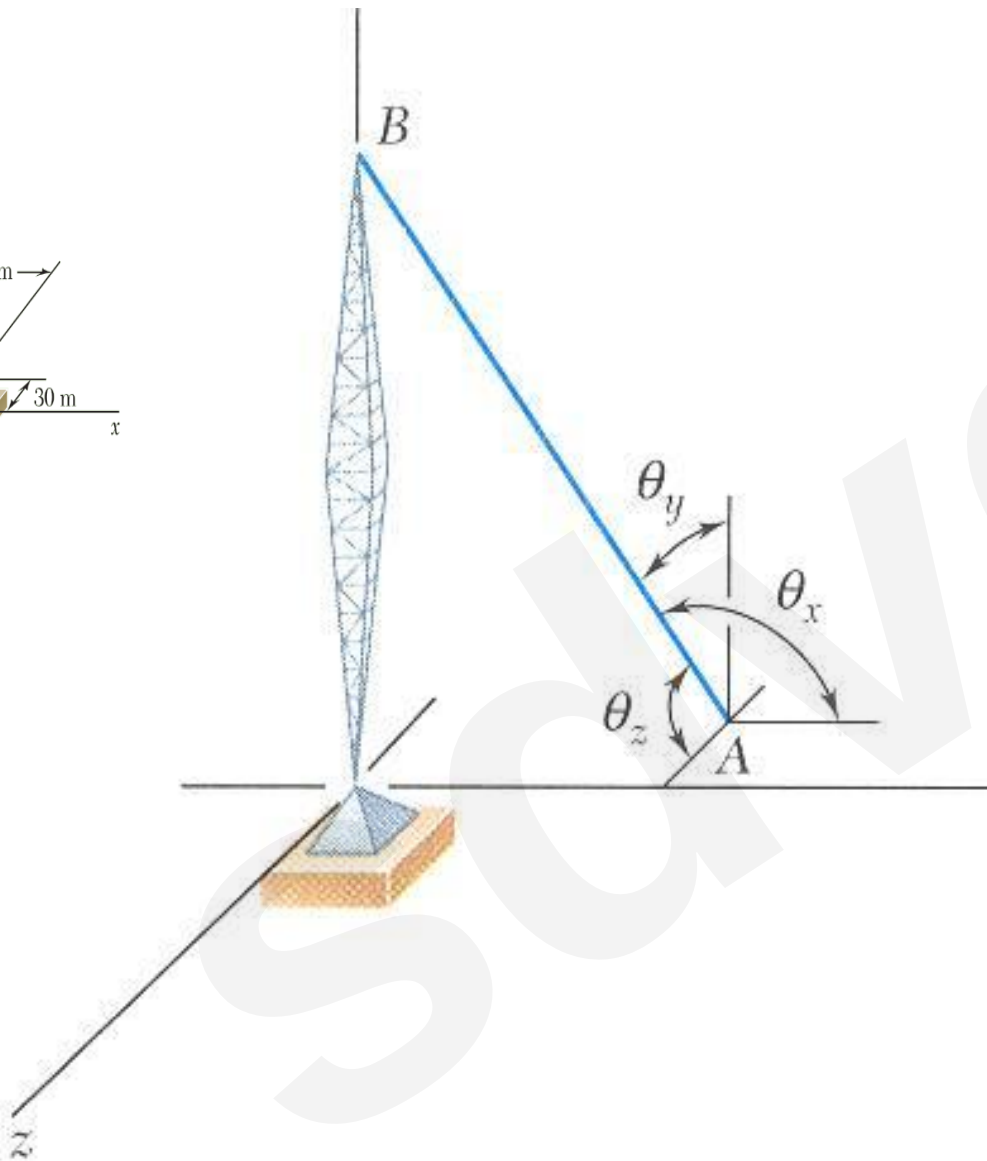
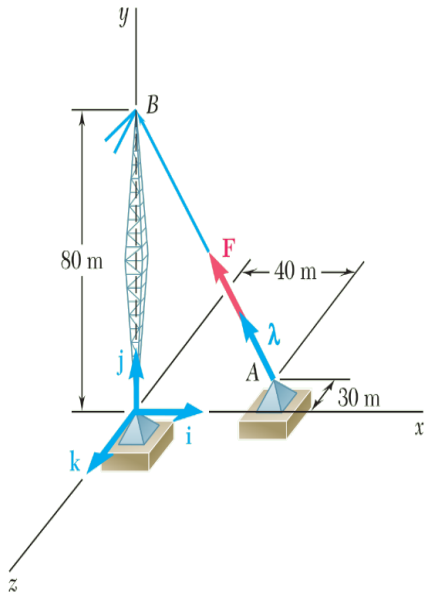
$$\overline{AB} = (-40\text{ m})\vec{i} + (80\text{ m})\vec{j} + (30\text{ m})\vec{k}$$

$$AB = \sqrt{(-40\text{ m})^2 + (80\text{ m})^2 + (30\text{ m})^2} = 94.3\text{ m}$$

$$\vec{\lambda} = \left(\frac{-40}{94.3}\right)\vec{i} + \left(\frac{80}{94.3}\right)\vec{j} + \left(\frac{30}{94.3}\right)\vec{k} = -0.424\vec{i} + 0.848\vec{j} + 0.318\vec{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F\vec{\lambda} \\ &= (2500\text{ N})(-0.424\vec{i} + 0.848\vec{j} + 0.318\vec{k}) \\ &= (-1060\text{ N})\vec{i} + (2120\text{ N})\vec{j} + (795\text{ N})\vec{k}\end{aligned}$$

مثال: نیروی کابل نگه‌دارنده دکل



$$\begin{aligned}\vec{\lambda} &= \cos \theta_x \vec{i} + \cos \theta_y \vec{j} + \cos \theta_z \vec{k} \\ &= -0.424 \vec{i} + 0.848 \vec{j} + 0.318 \vec{k}\end{aligned}$$

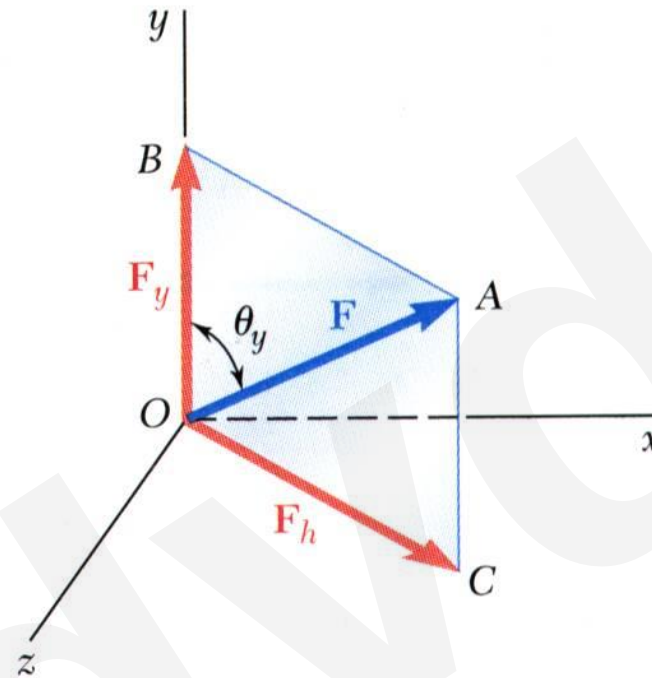
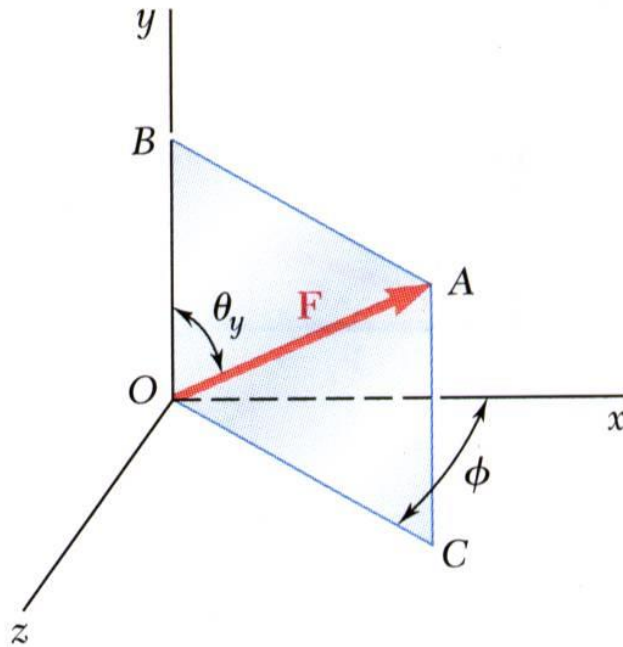
$$\theta_x = 115.1^\circ$$

$$\theta_y = 32.0^\circ$$

$$\theta_z = 71.5^\circ$$

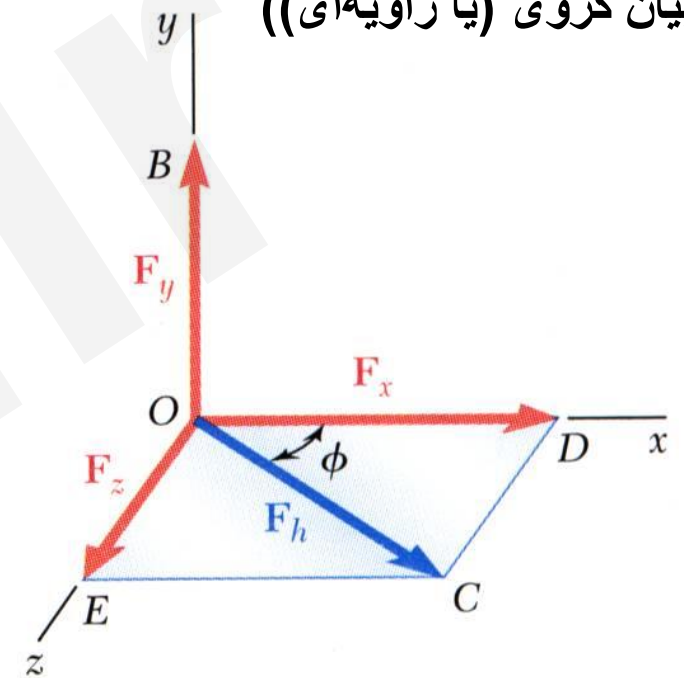
مولفه‌های متعامد یک نیرو و بردار یکه (دستگاه دکارتی سه بعدی)

(بیان کروی (یا زاویه‌ای))



$$F_y = F \cos \theta_y$$

$$F_h = F \sin \theta_y$$



$$F_x = F_h \cos \phi$$

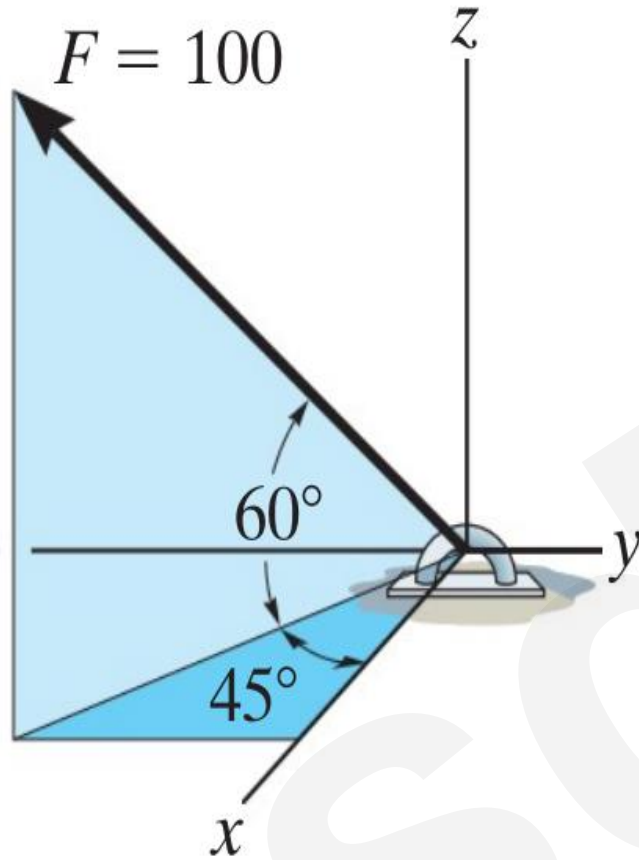
$$= F \sin \theta_y \cos \phi$$

$$F_z = F_h \sin \phi$$

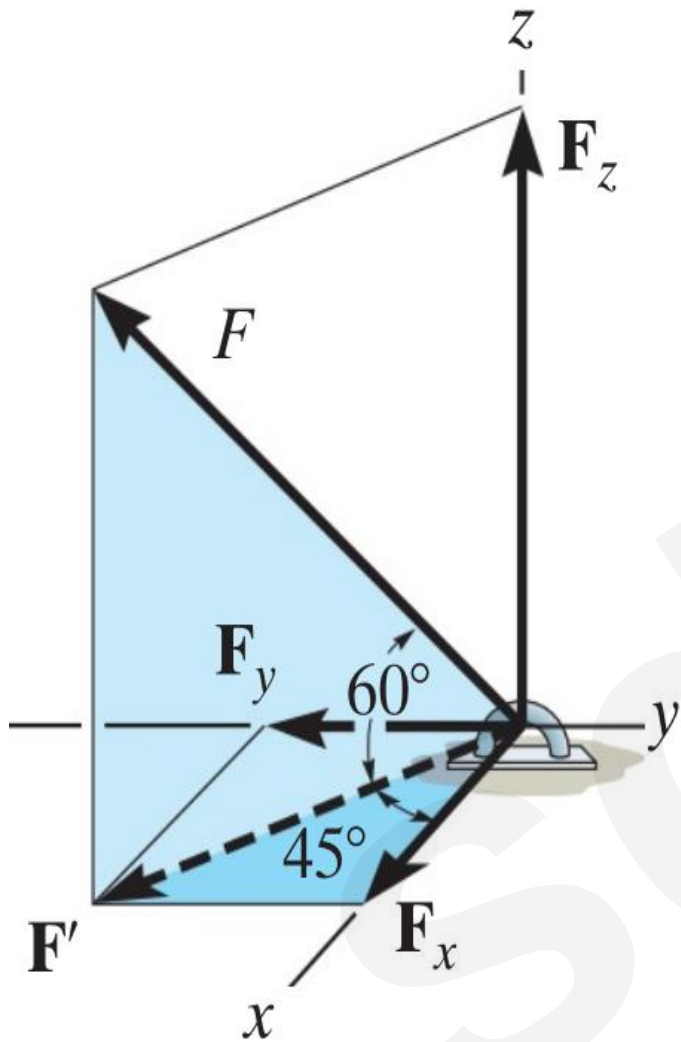
$$= F \sin \theta_y \sin \phi$$

محاسبه بردار نیرو (بیان کروی (یا زاویه‌ای))

- بردار نیروی F و زوایا با محوره‌های مختصات را محاسبه کنید



محاسبه بردار نیرو (بیان کروی (یا زاویه‌ای))



$$F_z = F \sin 60 = 86.6 \text{ N}$$

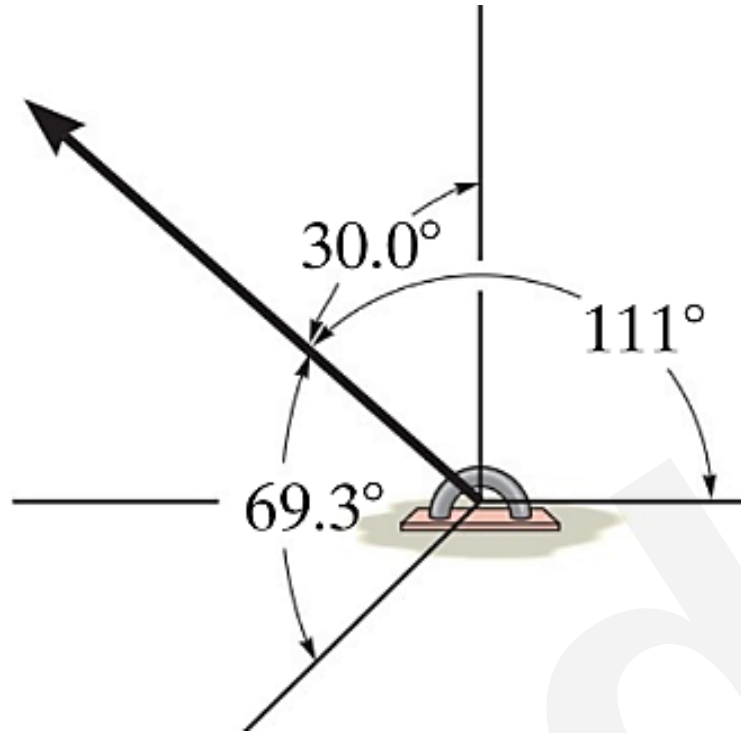
$$F_{xy} = F \cos 60 = 50 \text{ N}$$

$$F_x = F_{xy} \cos 45 = 50 * \cos 45 = 35.4 \text{ N}$$

$$F_y = F_{xy} \sin 45 = 50 * \sin 45 = 35.4 \text{ N}$$

$$\vec{F} = 35.4 \vec{i} - 35.4 \vec{j} + 86.6 \vec{k} \text{ N}$$

محاسبه بردار نیرو (بیان کروی (یا زاویه‌ای))



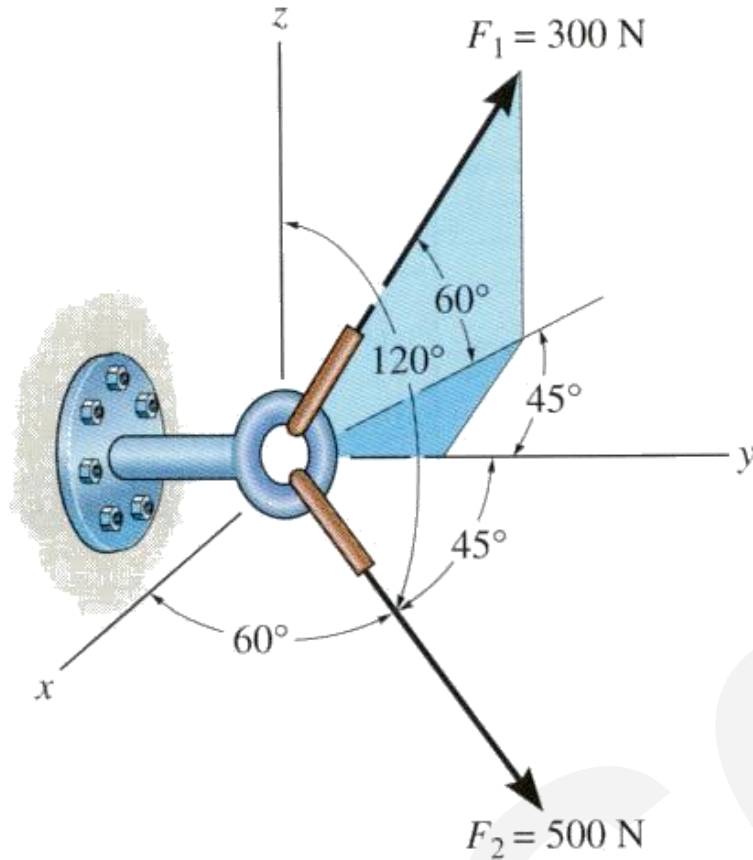
$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{35.4}{100} = 69.3^\circ$$

$$\theta_y = \cos^{-1} \frac{-35.4}{100} = 110.7^\circ$$

$$\theta_z = \cos^{-1} \frac{86.6}{100} = 30.0^\circ$$

مثال: برآیند نیروی وارد بر حلقه در فضای سه بعدی

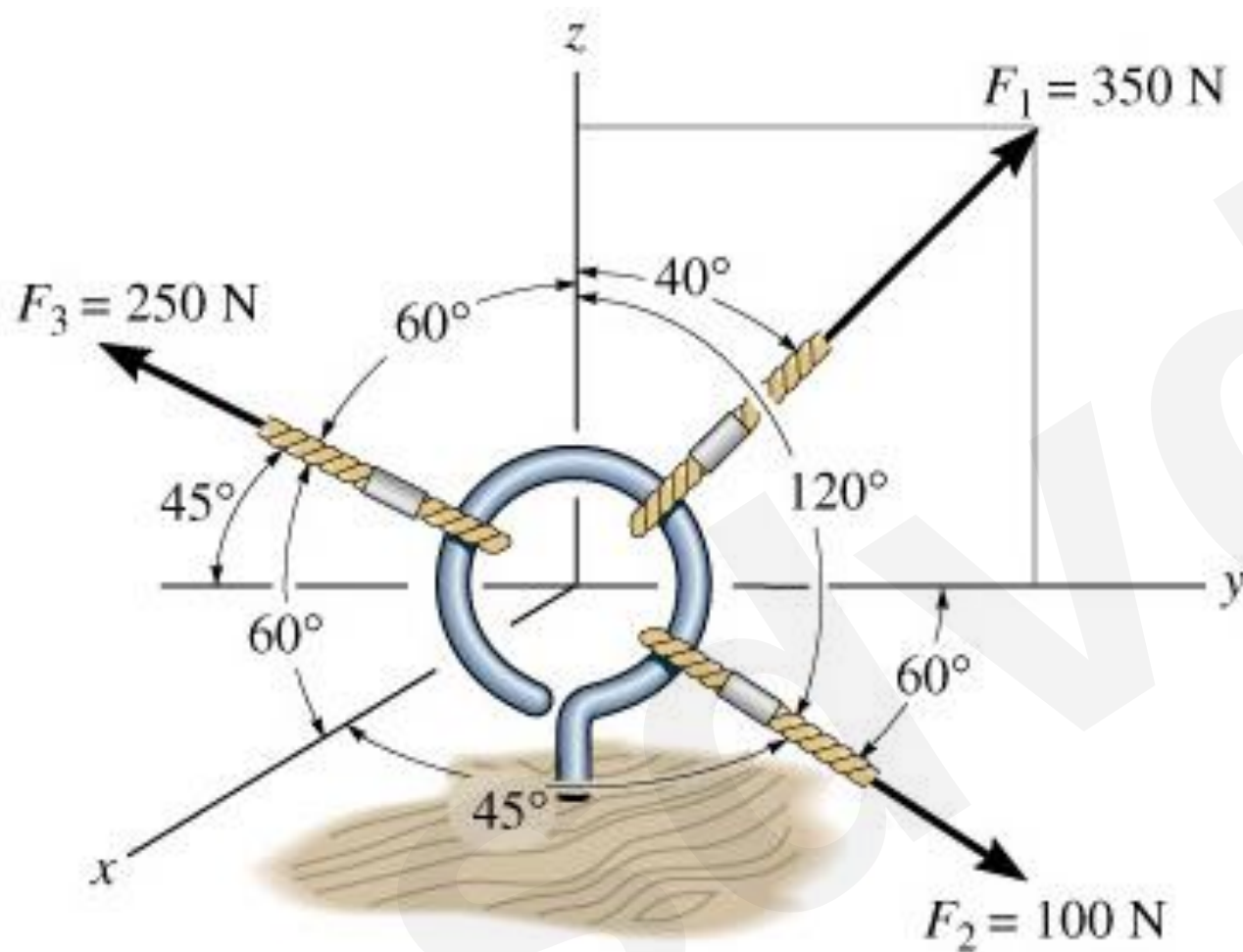
- اندازه و زاویه بردار نیروی برآیند را محاسبه کنید.



- $F_R = (143.9^2 + 459.6^2 + 9.81^2)^{1/2} = 482 \text{ N}$
- $\alpha = \cos^{-1} (F_{Rx} / F_R) = \cos^{-1} (143.9/481.7) = 72.6^\circ$
- $\beta = \cos^{-1} (F_{Ry} / F_R) = \cos^{-1} (459.6/481.7) = 17.4^\circ$
- $\gamma = \cos^{-1} (F_{Rz} / F_R) = \cos^{-1} (9.81/481.7) = 88.8^\circ$

مثال: برآیند نیروی وارد بر حلقه در فضای سه بعدی

- اندازه و زاویه بردار نیروی برآیند را محاسبه کنید.



جمع بردارها

• دو بردار P و Q را در نظر بگیریم:

$$\mathbf{P} = \mathbf{i} P_x + \mathbf{j} P_y + \mathbf{k} P_z$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{i} Q_x + \mathbf{j} Q_y + \mathbf{k} Q_z$$

• می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{i} (P_x + Q_x) + \mathbf{j} (P_y + Q_y) + \mathbf{k} (P_z + Q_z)$$

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P}$$

اصل جابه‌جایی

$$\mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{R}$$

اصل شرکت‌پذیری

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{P} + (-\mathbf{Q})$$

مثال و تمرین: تک برگ بردار سه بعدی

محاسبه برایندها با کمک مولفه‌های متعامد در فضای سه بعدی

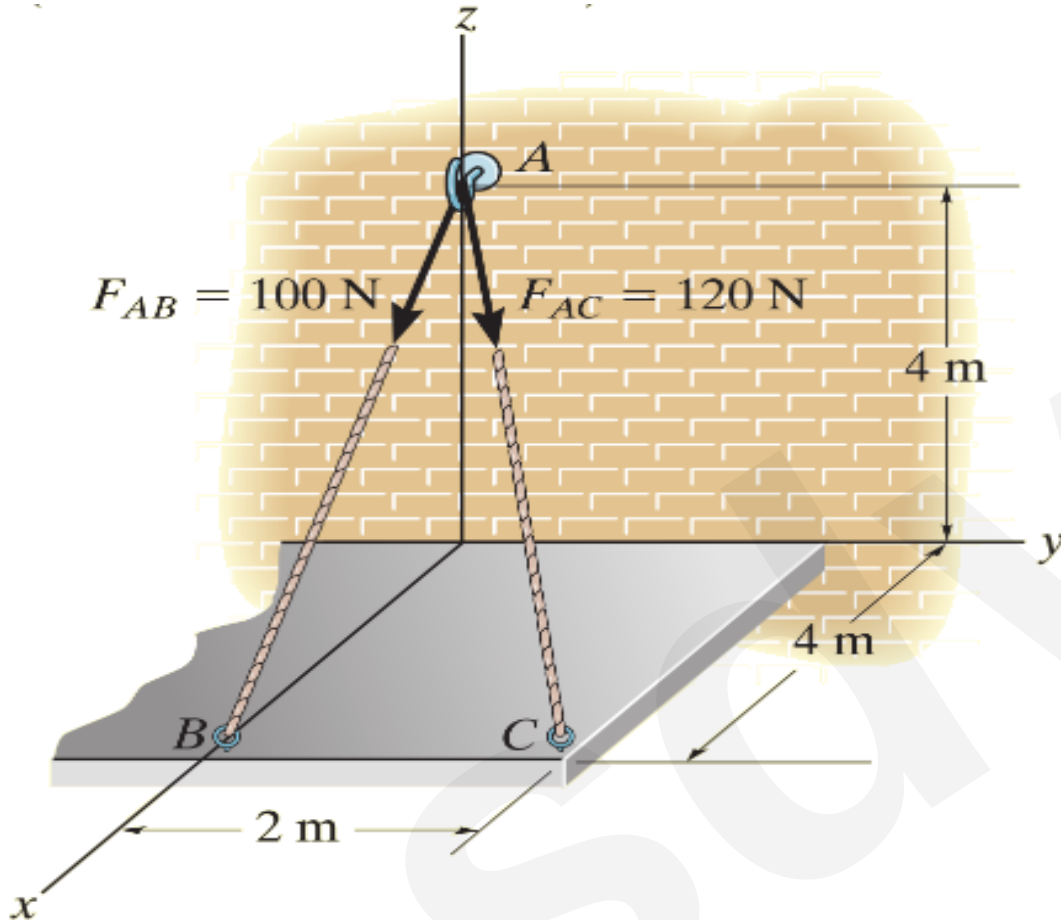
$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k} = \sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j} + \sum F_z \vec{k}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

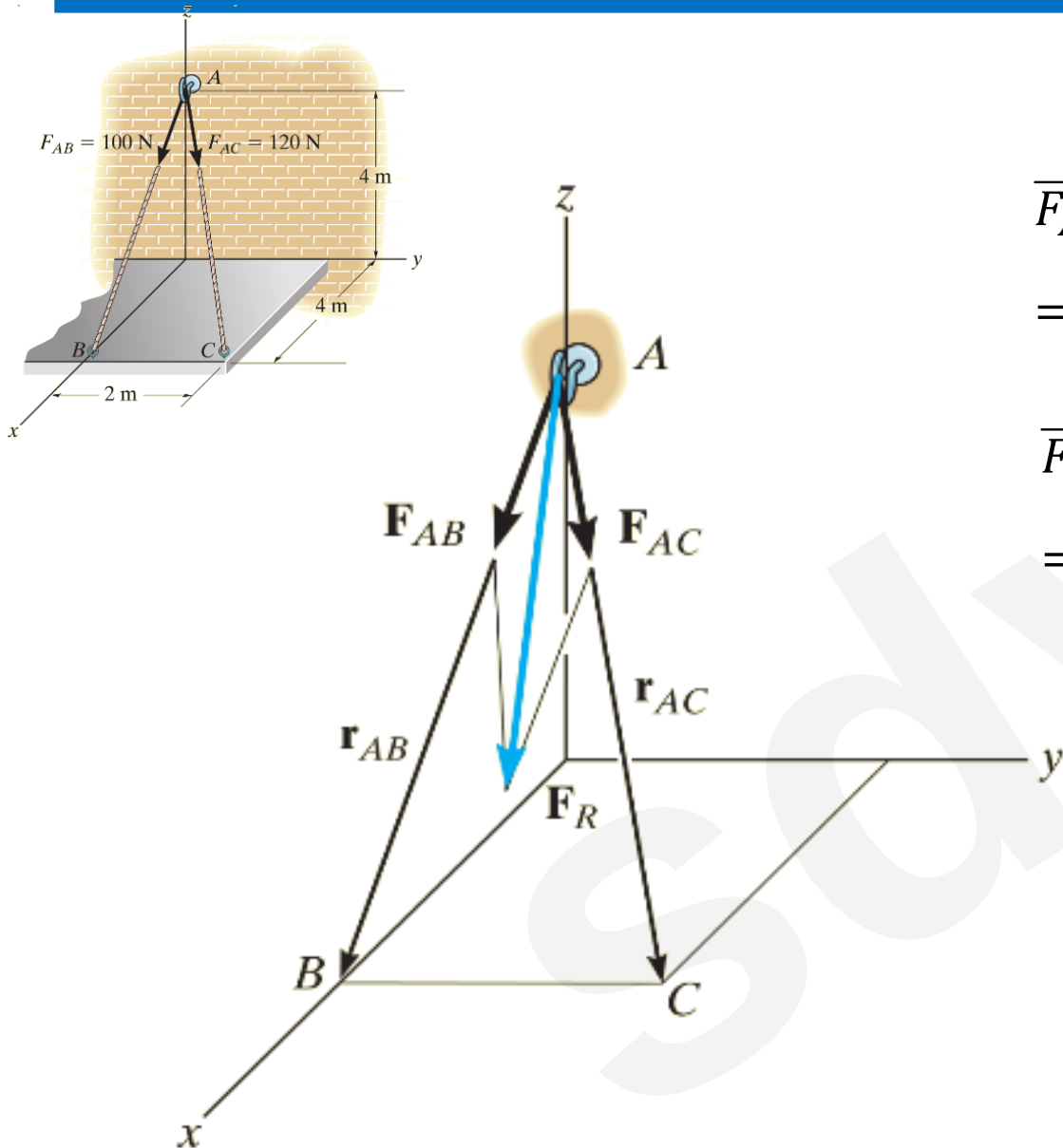
$$\theta_{R_x} = \cos^{-1} \frac{R_x}{R} \quad , \quad \theta_{R_y} = \cos^{-1} \frac{R_y}{R} \quad , \quad \theta_{R_z} = \cos^{-1} \frac{R_z}{R}$$

مثال: نیروی برآیند سایه‌بان

- سایه‌بانی توسط دو کابل AB و AC نگه داشته شده است. اگر نیروی کشش کابل‌ها $F_{AC} = 120\text{ N}$ و $F_{AB} = 100\text{ N}$ باشند، بردار و مقدار نیروی برآیند وارد بر نقطه A را محاسبه کنید.



مثال: نیروی برآیند سایه‌بان



$$\begin{aligned}\vec{F}_{AB} &= F_{AB} \vec{\lambda}_{F_{AB}} = F_{AB} \vec{\lambda}_{AB} = F_{AB} \frac{\vec{AB}}{AB} = 100 * \frac{4\vec{i} + 0\vec{j} - 4\vec{k}}{\sqrt{4^2 + 0^2 + 4^2}} \\ &= 70.7\vec{i} + 0\vec{j} - 70.7\vec{k} \text{ N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_{AC} &= F_{AC} \vec{\lambda}_{F_{AC}} = F_{AC} \vec{\lambda}_{AC} = F_{AC} \frac{\vec{AC}}{AC} = 120 * \frac{4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}} \\ &= 80\vec{i} + 40\vec{j} - 80\vec{k} \text{ N}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_R &= \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} \\ &= (70.7\vec{i} + 0\vec{j} - 70.7\vec{k}) + (80\vec{i} + 40\vec{j} - 80\vec{k}) \\ &= 150.7\vec{i} + 40\vec{j} - 150.7\vec{k} \text{ N}\end{aligned}$$

$$F_R = \sqrt{150.7^2 + 40^2 + 150.7^2} = 216.8 \text{ N}$$