

بسم الله الرحمن الرحيم

استاتیک

مدرس: شهاب داودی

www.sdvd.ir

davoudi@gmail.com

بخش اول: معارفه، مقدمه و یادآوری



معارفه



• مدرس: شهاب داودی

ارتباط با مدرس: تمامی تماس‌ها و طرح هر سوال و مشکل و هر نوع ارتباط فقط از طریق ایمیل ممکن است.

• ایمیل: davoudi@gmail.com

- فرستنده حتما از ایمیل دارای نام و نام خانوادگی استفاده کند. به ایمیل‌های با نام‌های غیر متعارف و ناشناس پاسخ داده نمی‌شود.
- در خط موضوع (Subject) حتما ابتدا کلمه «statics» را نوشته و سپس خلاصه موضوع را بنویسید.
- در انتهای ایمیل، حتما خودتان را با نام و نام خانوادگی و دانشگاه و رشته و کلاس معرفی کنید.

دریافت مطالب درسی: روش‌های دریافت فایل‌ها و تمرین‌ها و هرآنچه که مربوط به کلاس است

- دریافت فایل در skyroom
- فایل سرور دانشگاه: dl.tvct1.ac.ir
- سامانه سمیاد
- تارنما: www.sdvd.ir
- کانال تلگرام «فیزیکانیک»: @sdvdir

اطلاعیه‌های مربوط به کلاس

- کانال تلگرام «فیزیکانیک»: @sdvdir
- سامانه سمیاد

From: "Shahab Davoudi" <davoudi@gmail.com>
To: (<davoudi@gmail.com>
خلاصه موضوع اینجا نوشته شود - STATICS

قوانین کلاس

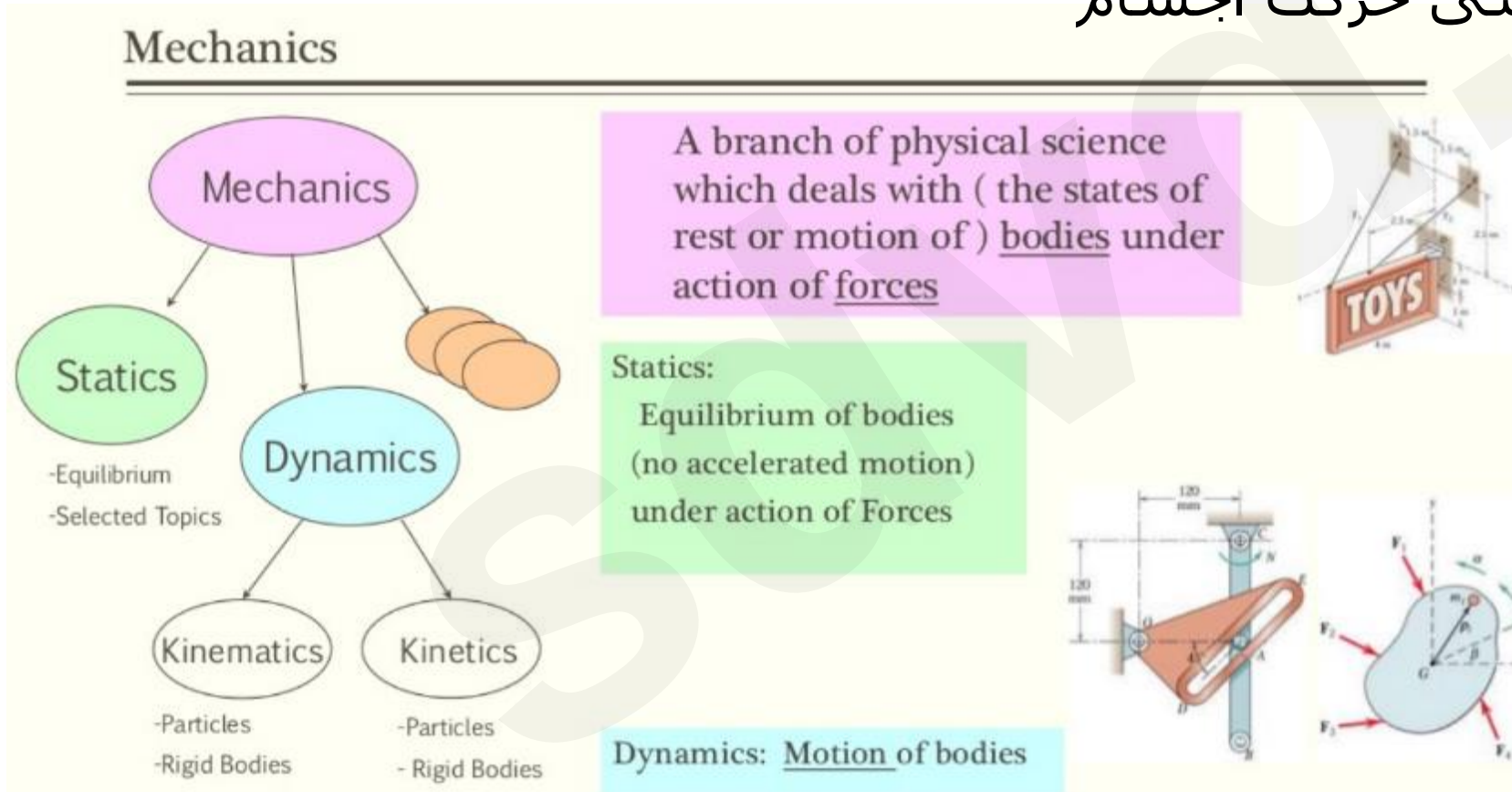
- به موقع حاضر شوید (بعد از شروع درس، اجازه ورود داده نمی‌شود).
- از کلاس تا پایان درس خارج نشوید (در صورت خروج، اجازه ورود مجدد داده نمی‌شود).

کد ارائه	کد درس	نام درس	زمانبندی تشکیل کلاس
1114	1931	استاتیک	یکشنبه از 09:55 تا 12:20
1018	2243	استاتیک	یکشنبه از 09:55 تا 12:20
1004	3242014	استاتیک	یکشنبه از 09:55 تا 12:20
1206	3121310	استاتیک	یکشنبه از 13:30 تا 15:55

- مدت زمان هر جلسه 3 ساعت آموزشی (120 تا 130 دقیقه مفید) است.
- حضور و غیاب در هر زمانی (ابتدا، وسط یا انتها) از کلاس ممکن است انجام شود.
- در صورت غیبت، از مطالب تدریس شده آگاهی یابید؛ غیبت بهانه عدم اطلاع از مطالب تدریس شده و برنامه جلسه بعد نیست. (تعداد و شرایط و عواقب غیبت مطابق قانون دانشگاه است).
- فقط در ساعت کلاس ثبت‌نام شده حضور یابید.
- ماشین‌حساب مهندسی همراه داشته باشید.
- ارتباطات موبایلی (مکالمه، پیامک، شبکه‌های اجتماعی) را در حین کلاس قطع نگه دارید (هر نوع استفاده از موبایل -مگر در موارد مرتبط با درس- ممنوع است).

موضوع درس استاتیک

- مکانیک شاخه‌ای از فیزیک است که وضعیت اجسام را بررسی می‌کند و شامل دو مبحث است:
- **استاتیک (ایستایی):** بررسی تعادل اجسام ساکن تحت اثر بار (نیرو یا گشتاور)
- **دینامیک (پویایی):** بررسی حرکت اجسام



مکانیک مهندسی: روش محاسباتی برای پیش‌بینی رفتار اجزاء و مجموعه‌های مهندسی شامل نیرو و حرکت

اهمیت درس استاتیک

- شروع مهندسی است.
- مرز بین علوم پایه (مثلا فیزیک مکانیک) و دروس مهندسی است.
- پیش‌نیاز اساسی درس «مقاومت مصالح» و سپس «طراحی اجزاء ماشین» که از دروس بسیار مهم رشته مکانیک می‌باشند، است.
- برای خوب یادگرفتن استاتیک، لازم است سخت تلاش کنیم.
- به ازاء هر یک جلسه کلاس استاتیک، حداقل 3 تا 4 ساعت تمرین و «حل مساله» خارج کلاس الزامی است.
- حل مساله، یعنی کار فعال، یعنی نوشتن روی کاغذ و انجام محاسبات. استاتیک را با روخوانی نمی‌توان یاد گرفت.

سرفصل استاتیک

تعداد واحد: 3، تعداد ساعت: 48 ساعت (16 جلسه 3 ساعته)

1. قوانین مکانیک، یادآوری (قانون سینوس‌ها و کسینوس‌ها، بردارها، کسینوس‌های هادی، ضرب داخلی و خارجی، ...)
2. ترکیب و تجزیه نیرو به روش ترسیمی و تحلیلی، مولفه‌های نیرو،
3. گشتاور حول نقطه و محور، زوج نیرو و گشتاور زوج نیرو، هم‌ارزی نیروها
4. ترسیم جسم آزاد، تکیه‌گاه‌های دو و سه بعدی، تعادل
5. خریهای صفحه‌ای و فضایی، تحلیل خری با روش مفصل و مقطع
6. توزیع نیرو پیوسته، قضیه وارینون، مرکز بار، مرکز جرم، گشتاور اول سطح
7. تیرها، نیروهای داخلی تیر، بارگذاری عرضی، نیروهای محوری و برشی و گشتاور خمشی در مقطع تیر
8. اصطکاک غلتشی و لغزشی، زاویه و ضریب اصطکاک، کاربرد در پیچ و دیسک و چرخ تسمه
9. گشتاور دوم سطح، محاسبه با روش انتگرال و سطوح پیوسته، قضیه انتقال محورها، گشتاور سطح حول محور، شعاع چرخش سطح

مکانیک		تعداد واحد		تعداد ساعت		تعداد جلسه		تعداد واحد		تعداد ساعت		تعداد جلسه	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13	13
14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17	17
18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19	19
20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21	21
22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22
23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23
24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26	26
27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27	27
28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28
29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29	29
30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31	31
32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32	32
33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33	33
34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34	34
35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35
36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36
37	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37	37
38	38	38	38	38	38	38	38	38	38	38	38	38	38
39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39
40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40	40
41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41	41
42	42	42	42	42	42	42	42	42	42	42	42	42	42
43	43	43	43	43	43	43	43	43	43	43	43	43	43
44	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44	44
45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45	45
46	46	46	46	46	46	46	46	46	46	46	46	46	46
47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47	47
48	48	48	48	48	48	48	48	48	48	48	48	48	48
49	49	49	49	49	49	49	49	49	49	49	49	49	49
50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50	50
51	51	51	51	51	51	51	51	51	51	51	51	51	51
52	52	52	52	52	52	52	52	52	52	52	52	52	52
53	53	53	53	53	53	53	53	53	53	53	53	53	53
54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54	54
55	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55	55
56	56	56	56	56	56	56	56	56	56	56	56	56	56
57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57	57
58	58	58	58	58	58	58	58	58	58	58	58	58	58
59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59	59
60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60	60
61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61	61
62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62	62
63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63	63
64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64	64
65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65	65
66	66	66	66	66	66	66	66	66	66	66	66	66	66
67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67	67
68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68	68
69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69	69
70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70	70
71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71	71
72	72	72	72	72	72	72	72	72	72	72	72	72	72
73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73	73
74	74	74	74	74	74	74	74	74	74	74	74	74	74
75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75	75
76	76	76	76	76	76	76	76	76	76	76	76	76	76
77	77	77	77	77	77	77	77	77	77	77	77	77	77
78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78	78
79	79	79	79	79	79	79	79	79	79	79	79	79	79
80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80	80
81	81	81	81	81	81	81	81	81	81	81	81	81	81
82	82	82	82	82	82	82	82	82	82	82	82	82	82
83	83	83	83	83	83	83	83	83	83	83	83	83	83
84	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84	84
85	85	85	85	85	85	85	85	85	85	85	85	85	85
86	86	86	86	86	86	86	86	86	86	86	86	86	86
87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87	87
88	88	88	88	88	88	88	88	88	88	88	88	88	88
89	89	89	89	89	89	89	89	89	89	89	89	89	89
90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90	90
91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91	91
92	92	92	92	92	92	92	92	92	92	92	92	92	92
93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93	93
94	94	94	94	94	94	94	94	94	94	94	94	94	94
95	95	95	95	95	95	95	95	95	95	95	95	95	95
96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96	96
97	97	97	97	97	97	97	97	97	97	97	97	97	97
98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98	98
99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99	99
100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

پیش‌نیازهای درس استاتیک (ریاضیات)

• ریاضیات

- محاسبات عددی (در حد دبیرستان)
- حل معادلات و دستگاه معادلات
- هندسه (آشنایی و کاربرد قضایای ساده در حد هندسه دبیرستانی)
- مثلثات (تعاریف و کاربردهای ابتدایی نسبت‌های مثلثاتی و توابع معکوس نسبت‌های مثلثاتی در حد دبیرستان)
- دستگاه دکارتی و مختصات قائم (در حد درس ریاضی دانشگاه)
- بردار

- تعریف
- عملیات برداری
- جمع و تفریق
- قوانین متوازی‌الاضلاع و مثلث و زنجیری
- ضرب
- عدد در بردار
- بردار در بردار (داخلی و خارجی)

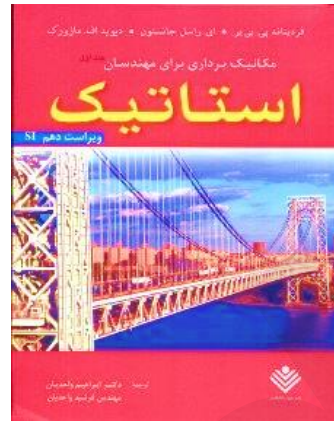
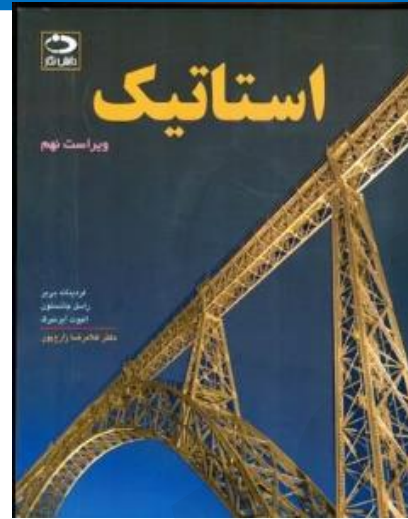
پیش‌نیازهای درس استاتیک (فیزیک-مکانیک)

- فیزیک-مکانیک
 - یکاها
 - کمیات، و تفاوت کمیت‌های عددی (اسکالر) و برداری
 - تعریف و مفهوم نیرو
 - قوانین نیوتن
 - به خصوص فهم صحیح قانون سوم نیوتن (عمل و عکس‌العمل)
 - تعادل ذرات

مراجع درس

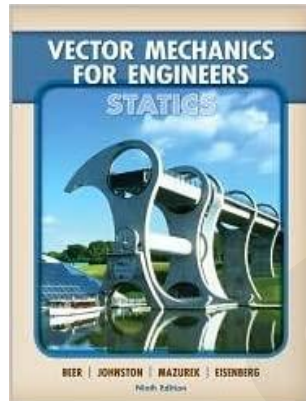
با توجه به غیر حضوری بودن کلاس، داشتن کتاب درسی برای مطالعه الزامی است.

- منبع و مرجع اصلی درس
- کتاب استاتیک (ویرایش نهم)
- تالیف بیر و جانستون و آیزنبرگ
- ترجمه غلامرضا زارع پور
- ناشر دانش نگار

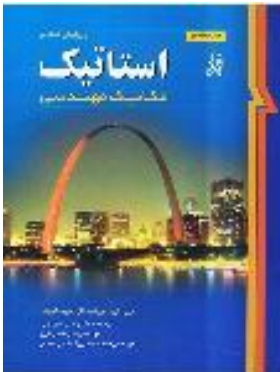


- این کتاب در ویرایش‌ها و ترجمه‌ها و ناشران دیگر نیز چاپ شده است. مثلاً ترجمه "ابراهیم واحدیان".

- در صورت تمایل نسخه زبان اصلی (انگلیسی) این کتاب از اینترنت قابل دانلود است.



- کتاب استاتیک تالیف "بیر و جانستون" برای دانشجویان متوسط مناسب است. برای دانشجویان قوی، یا حل مسائل پیچیده‌تر، کتاب "مریام و کرایگ" پیشنهاد می‌شود.



• نمره نهایی مجموع نمرات زیر است:

- حضور و فعالیت کلاسی (2*)
- انجام تکالیف و تمرین‌ها (2)
- کوییزها (4)
- آزمون میان ترم (4)
- آزمون پایان ترم (10)

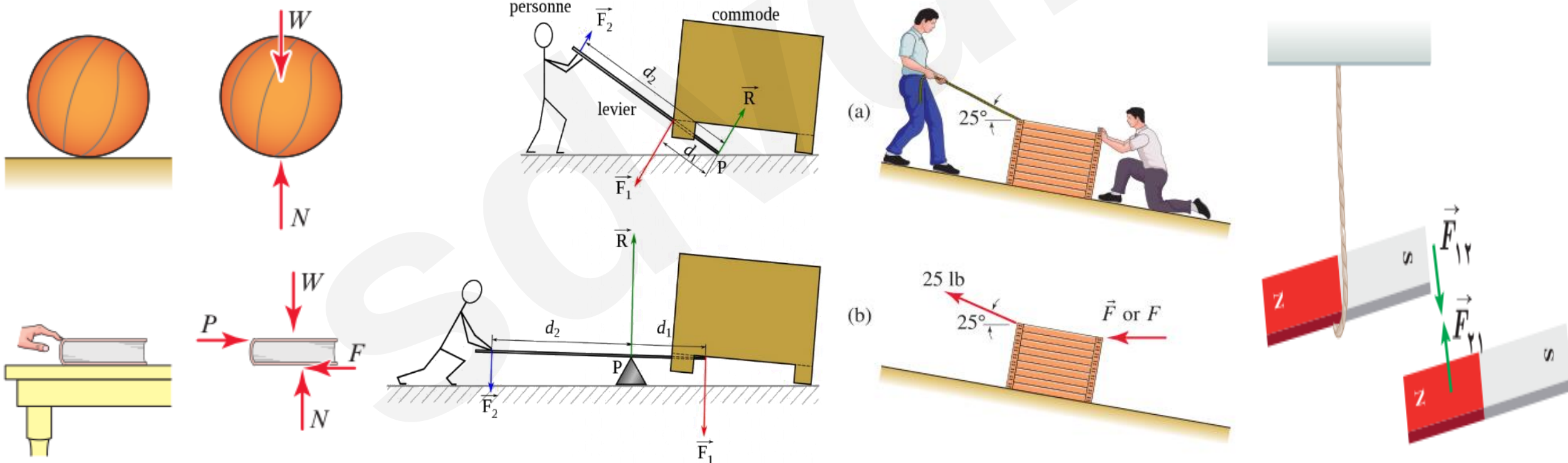
مقدمه

مروری بر فیزیک و ریاضیات

مرور فیزیک

نیرو: تاثیر یا عمل یک جسم بر جسم دیگر.

- هر گاه دو جسم با هم در تماس باشند، حتماً بین آن دو جسم نیرو وجود دارد.
- نیروهای گرانش، الکتریکی و مغناطیسی به تماس دو جسم نیاز ندارند.
- نیروی وارد بر یک جسم در آن حرکت یا "تمایل" به حرکت در امتداد نیرو ایجاد می‌کند.



جسم صلب: جسمی که بین ذرات تشکیل دهنده‌اش هیچ‌گونه جابه‌جایی نسبی اتفاق نیافتد؛ و در اثر اعمال نیرو تغییر شکل ندهد.

Rigid body: Body with negligible deformations

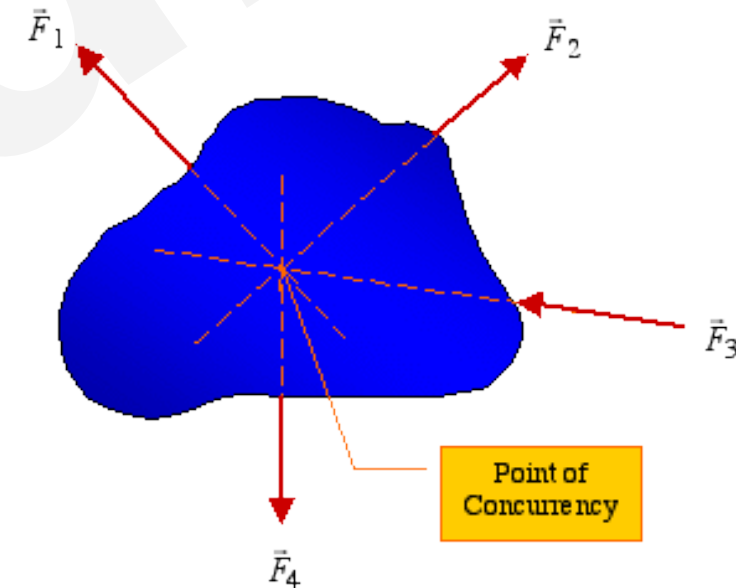
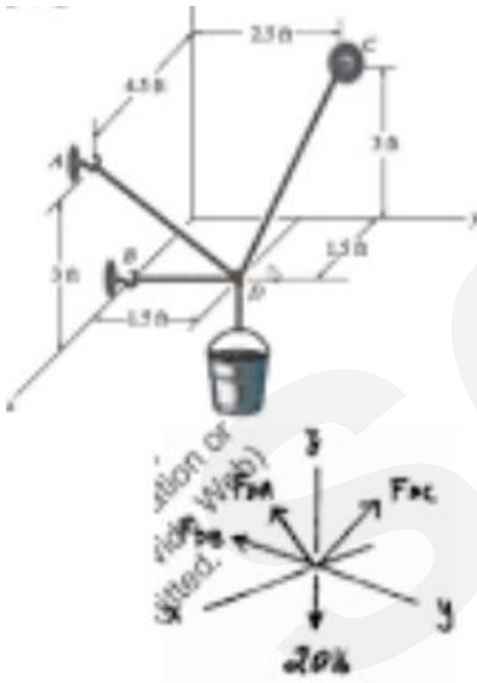
Non-rigid body: Body which can deform



In Statics, bodies are considered rigid unless stated otherwise.

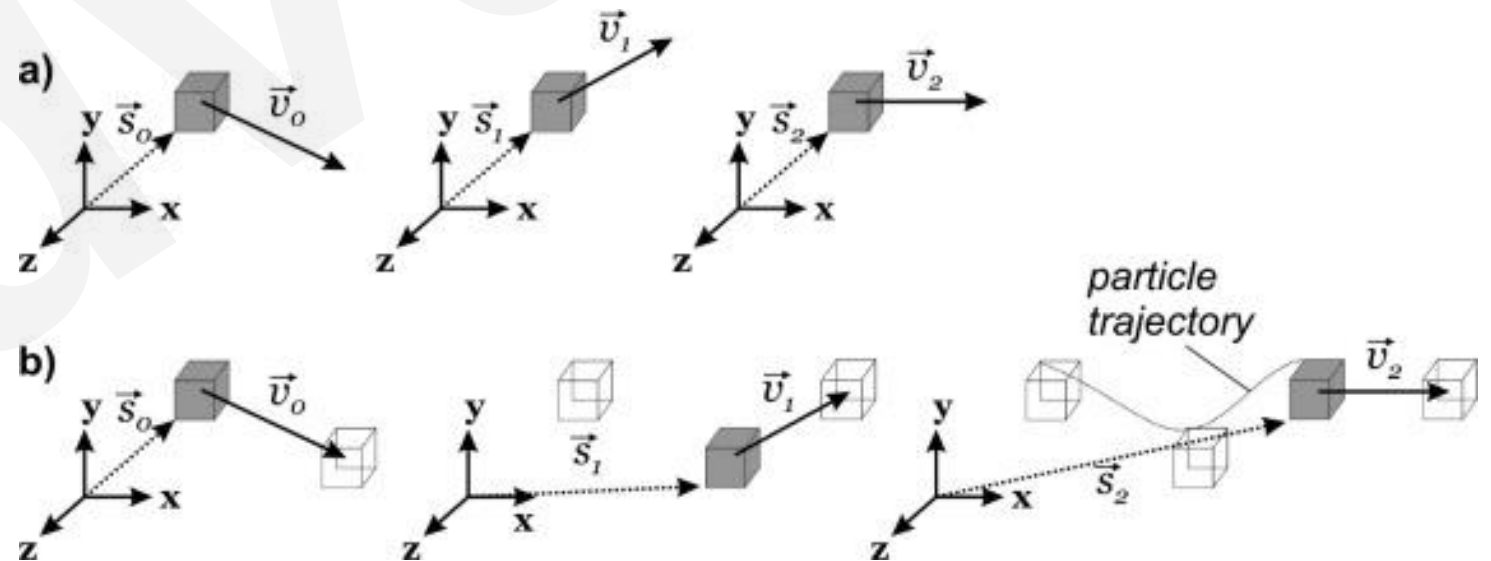
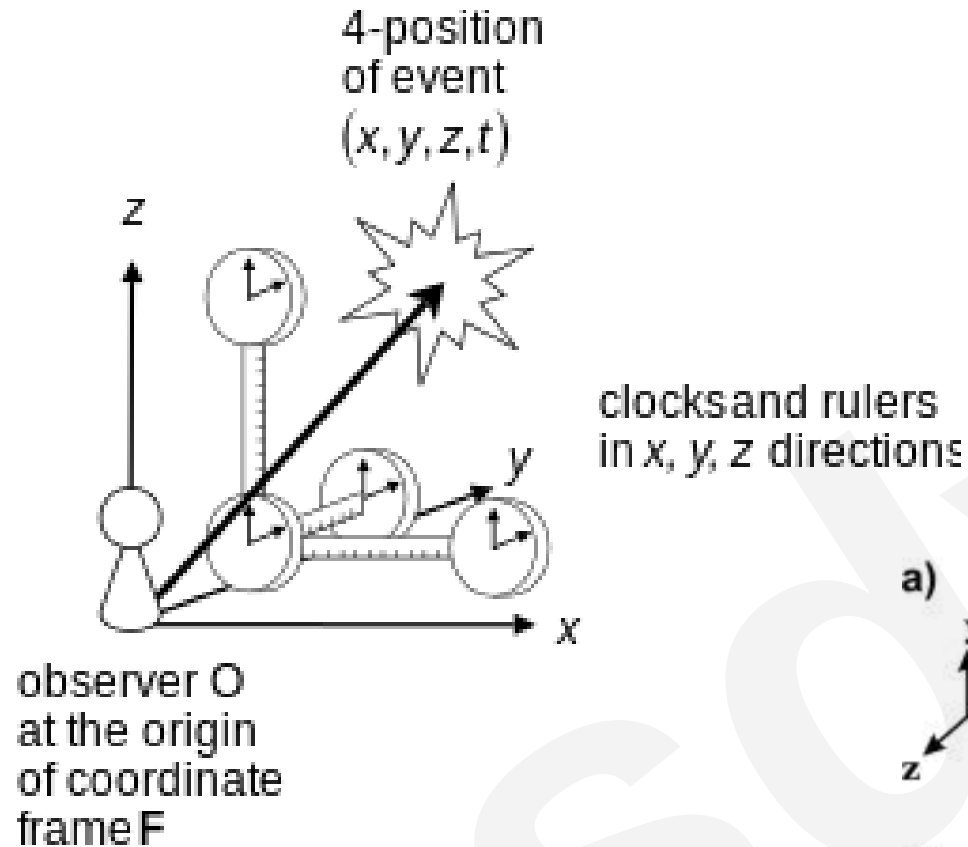
ذره: جسمی که از ابعاد و شکل آن بتوان صرفنظر کرد، و ابعاده را «صفر» و مثل یک نقطه در نظر گرفت، و تمام جرم آن را بتوان در یک نقطه متمرکز فرض کرد.

شرط جسم ذره‌ای، هم‌رس بودن تمام نیروهای وارد بر جسم است.



System of concurrent forces acting on a body

شبکه یا دستگاه مختصات مرجع: مجموعه‌ای از محورهای متعامد ثابت بدون حرکت و چرخش.



کمیات عددی: فقط مقدار حائز اهمیت است.

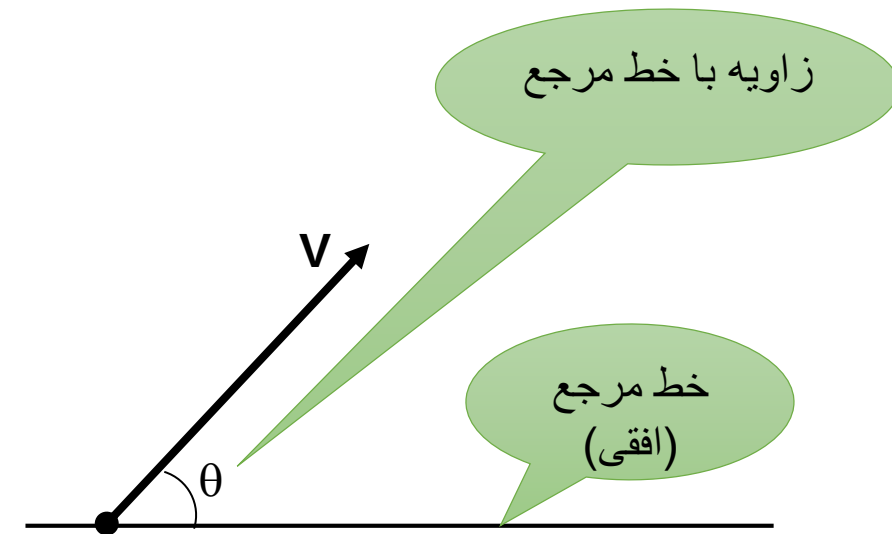
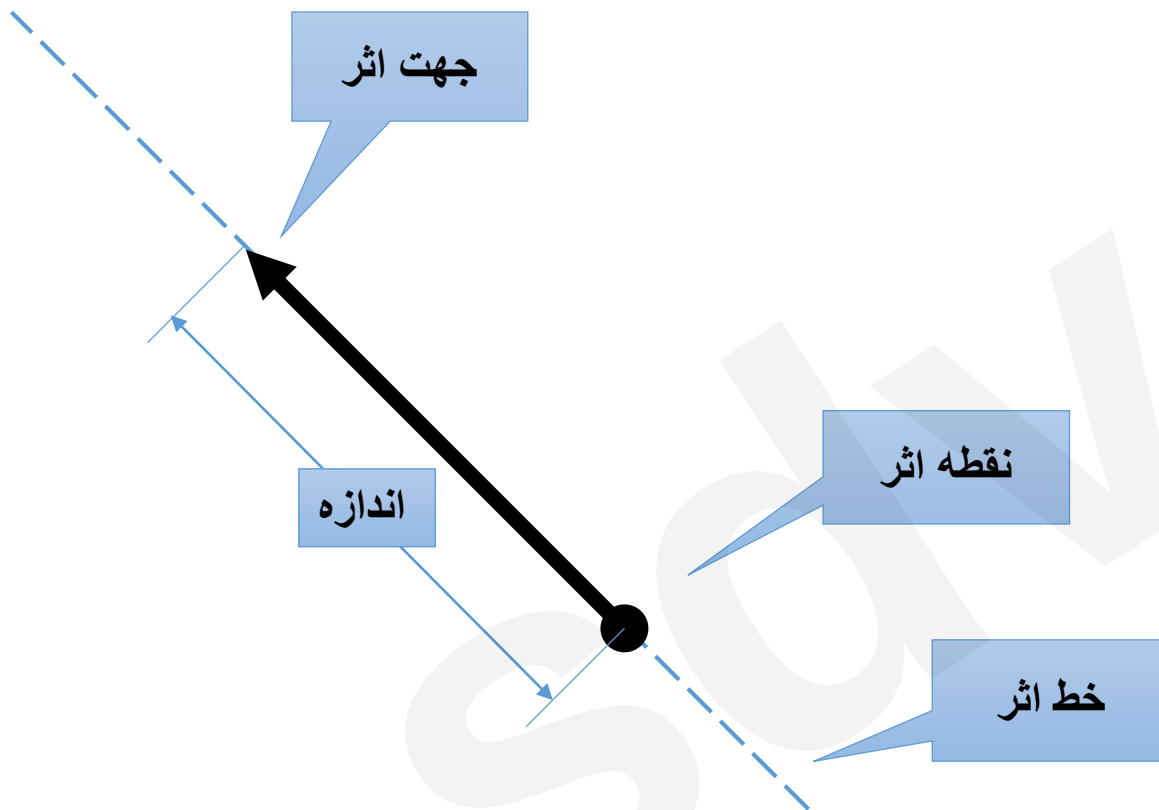
• مثل: زمان، جرم، انرژی، جرم، دما.



مرور فیزیک

کمیات برداری: علاوه بر مقدار، دارای "خط اثر"، "جهت اثر" و "نقطه اثر" نیز هستند.

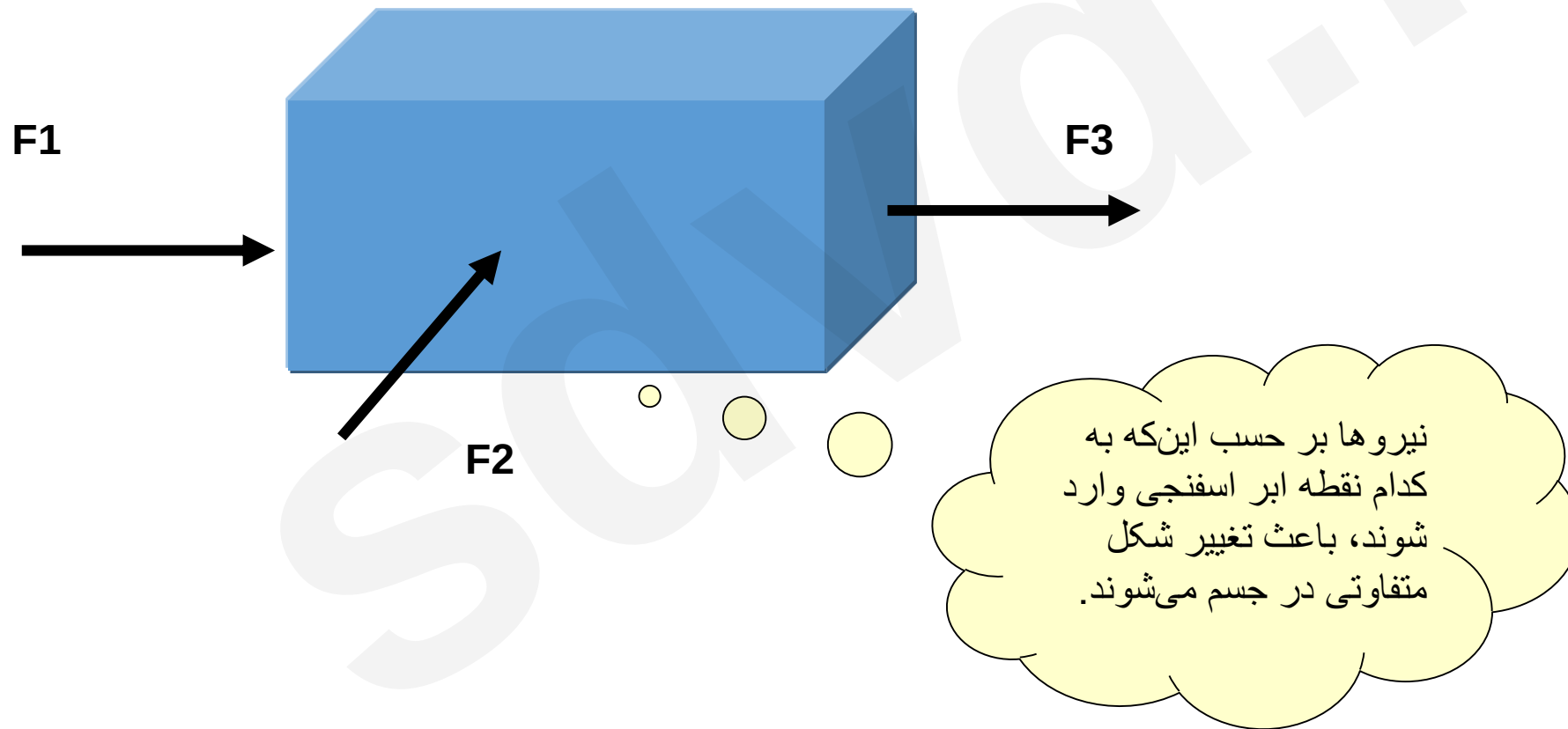
• مثل جابه‌جایی، نیرو، گشتاور



توجه: چون نیرو بردار است، برای تعریف آن باید هر 4 عامل آن
(1-مقدار، 2-خط اثر، 3-جهت اثر و 4-نقطه اثر) مشخص شوند.

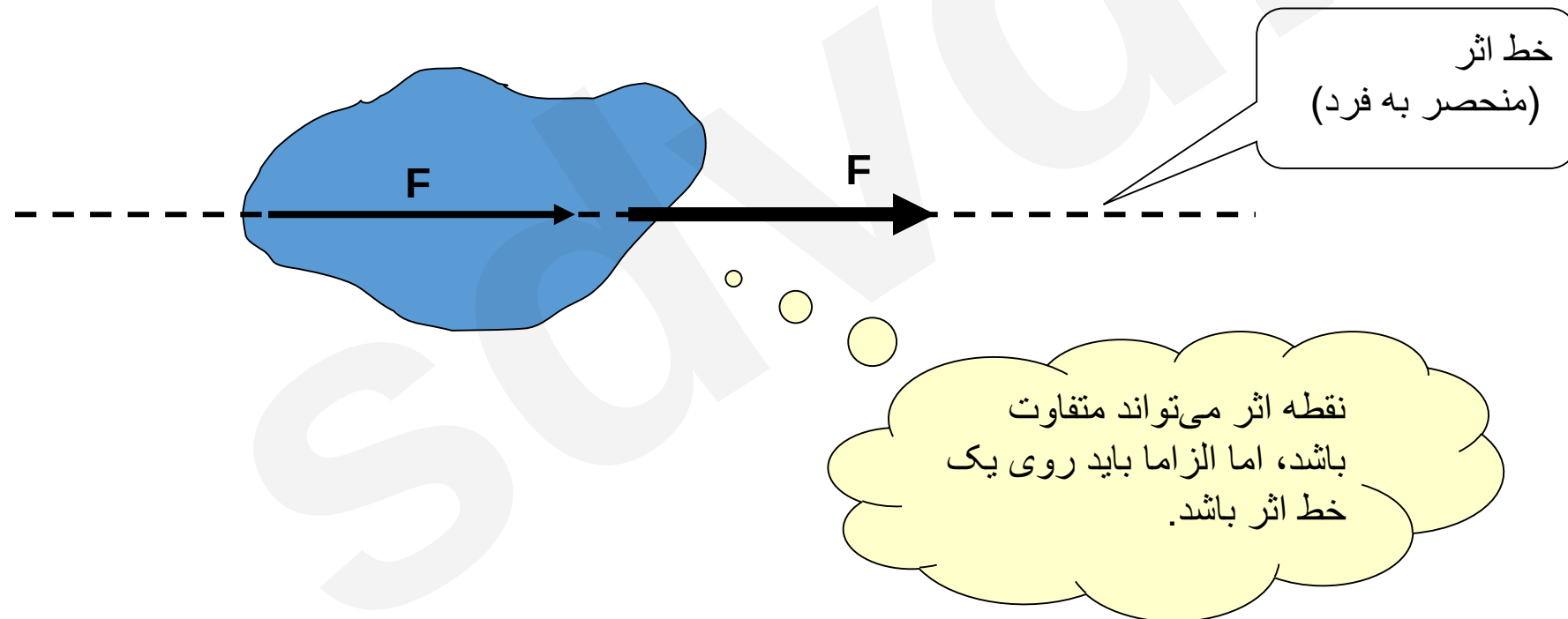
انواع بردار-بردار ثابت: برداری که نقطه اثر آن به طور کامل معین شده باشد. و فقط یک موقعیت خاص را در فضا اشغال کند.

- مثل اثر نیرو روی جسم غیرصلب (مثلا اسفنج).



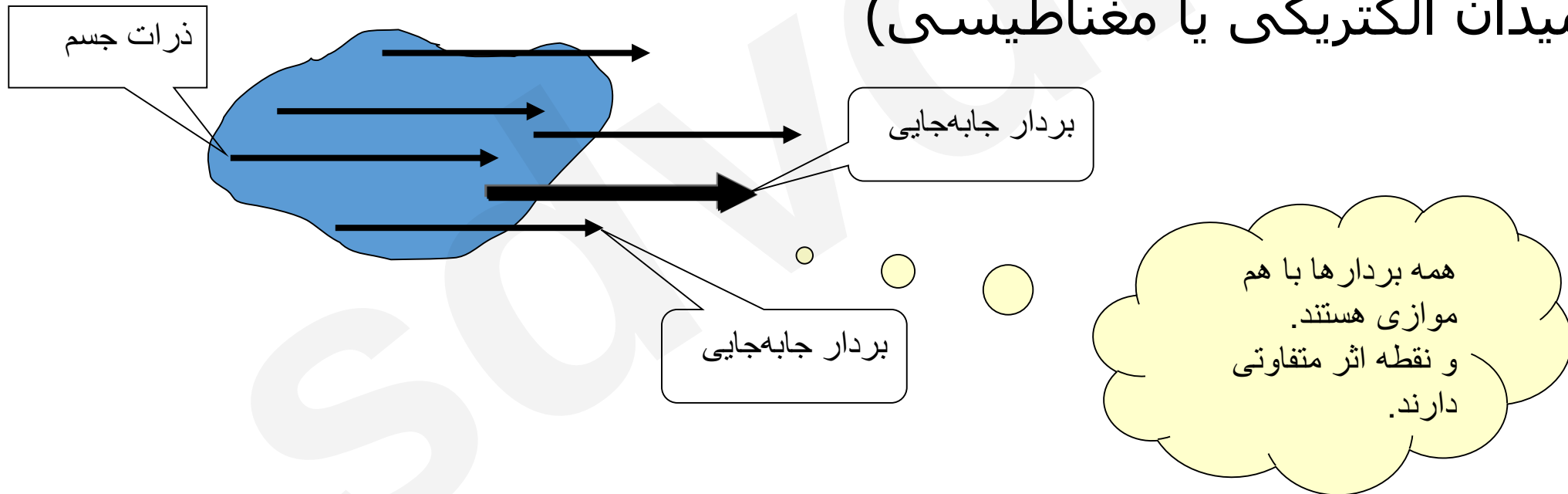
انواع بردار-برداری لغزان: برای عمل آن در فضا، یک خط اثر منحصر به فرد وجود دارد که بردار در امتداد آن اثر می‌کند.

• مثل اثر یک نیروی خارجی روی یک جسم صلب که نقطه اثر می‌تواند هر نقطه‌ای در امتداد خط اثر نیرو در نظر گرفته شود.



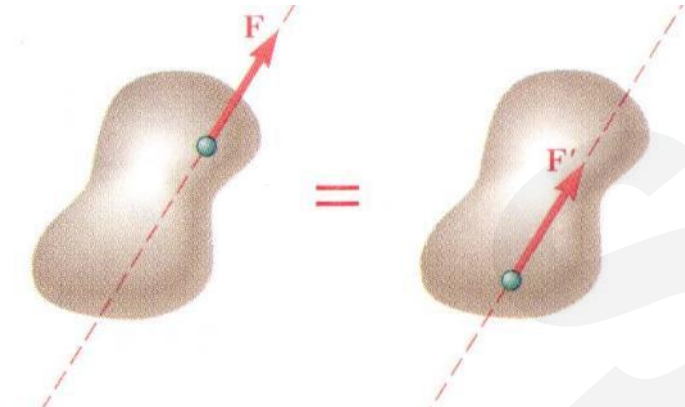
انواع بردار-بردار آزاد: عمل آن محدود به یک خط اثر منحصر به فرد در فضا نمی باشد.

• مثل بردار جابه جایی جسمی که بدون چرخش در حرکت است، بردار نیروی جاذبه عمومی، گشتاور زوج نیرو، نیروهای حاصل از میدانها (میدان الکتریکی یا مغناطیسی)

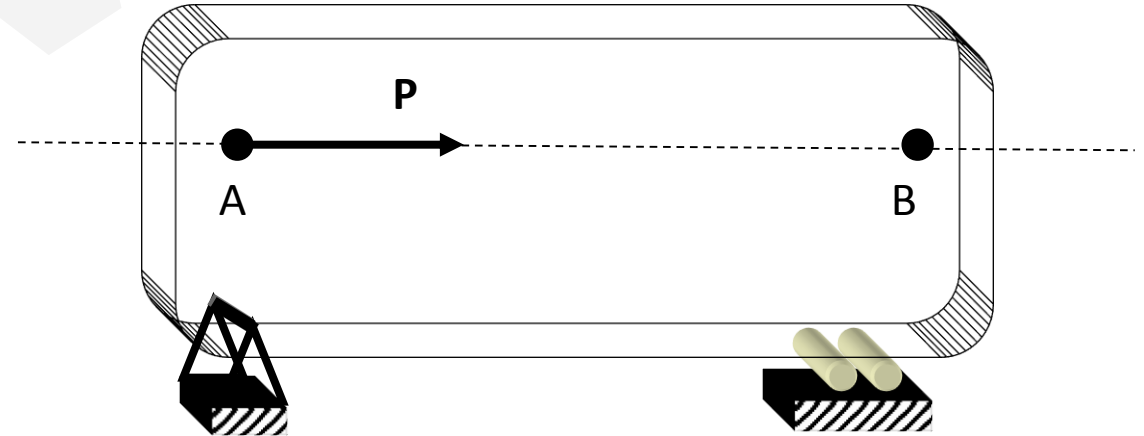


اصل قابلیت انتقال نیرو در اجسام صلب: نیرو را می‌توان در هر نقطه‌ای از خط اثرش بر جسم صلب موثر دانست، بدون اینکه اثرات «نیروهای خارجی» جسم صلب تغییر کند.

- نیروی وارد بر جسم صلب بردار لغزان است.
- مقدار، خط اثر و جهت اثر کاملاً ثابت و مشخص و تعریف شده،
- اما، "نقطه اثر" می‌تواند هر نقطه‌ای در امتداد خط اثر نیرو در نظر گرفته شود.



• Principle of Transmissibility

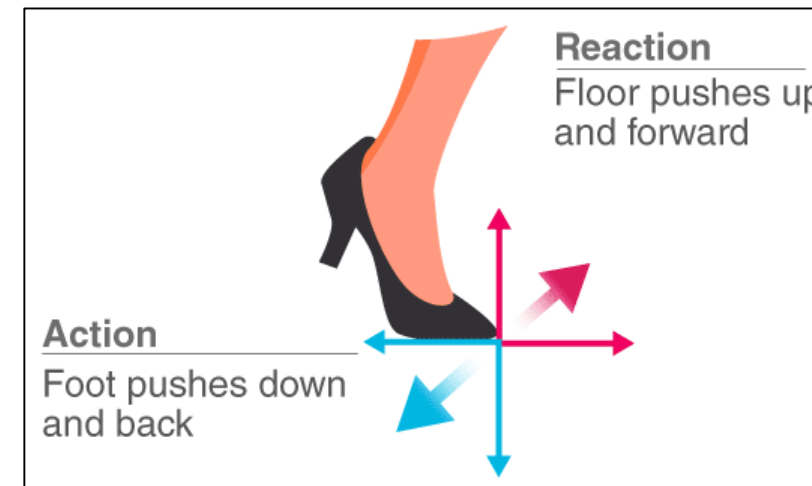
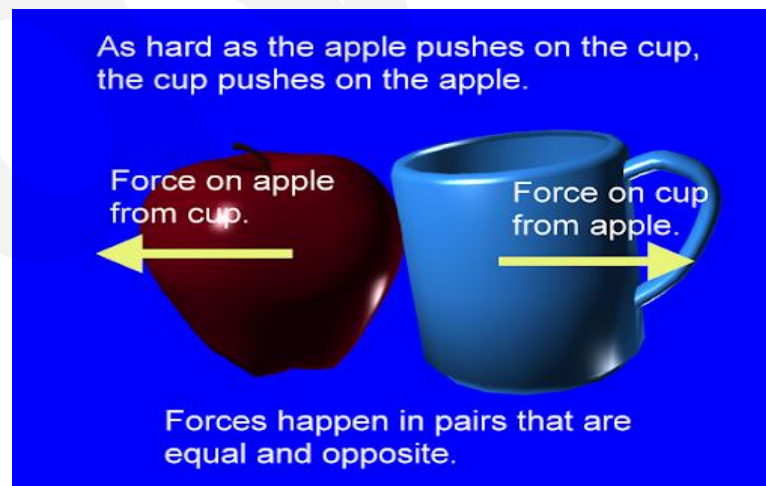
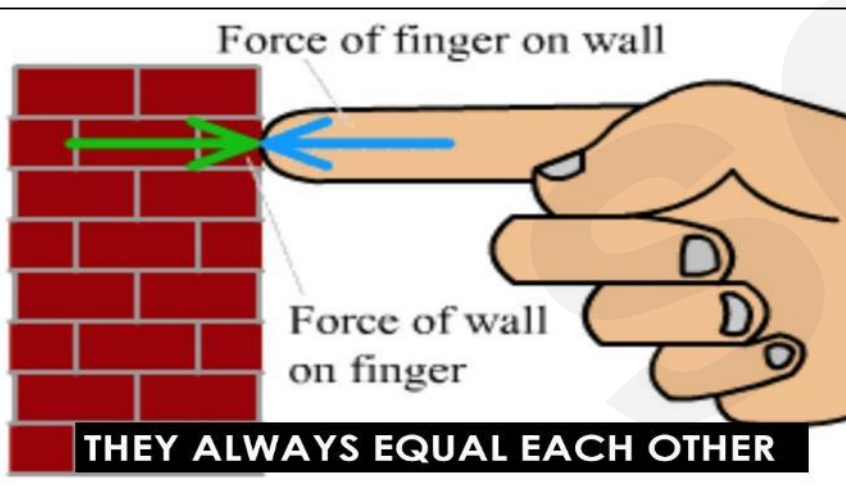


مرور فیزیک

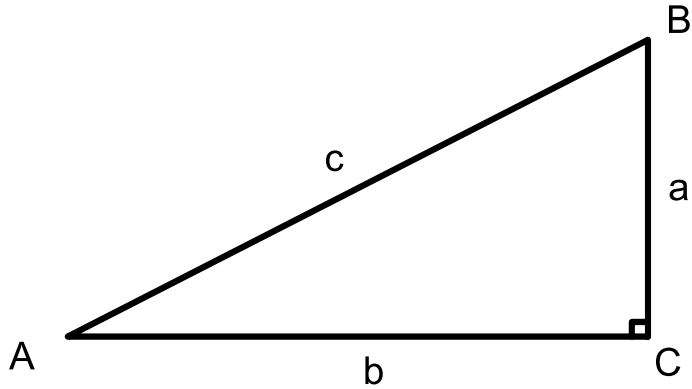
قانون سوم نیوتن: نیروهای عمل و عکس‌العمل بین دو جسم از نظر مقدار برابرند، و در خلاف جهت هم و در یک راستا عمل می‌کنند.

• هر کدام از نیروهای عمل و عکس‌العمل بر روی یکی از اجسام اثر می‌کنند.

توجه: هرگز هرگز دو نیروی عمل و عکس‌العمل بر یک جسم اثر نمی‌کنند!
به همین دلیل برآیند دو نیروی عمل و عکس‌العمل کاملاً بی‌مفهوم است.
عدم توجه به این اصل، منجر به اشتباه در حل مسائل می‌شود.



مثلث قائم الزاویه



$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\sin A = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{a}{c}$$

$$\sin B = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos B = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{a}{b}$$

$$\tan B = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{b}{a}$$

$$\sin A = \frac{a}{c} \rightarrow A = \sin^{-1} \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} \rightarrow A = \cos^{-1} \frac{b}{c}$$

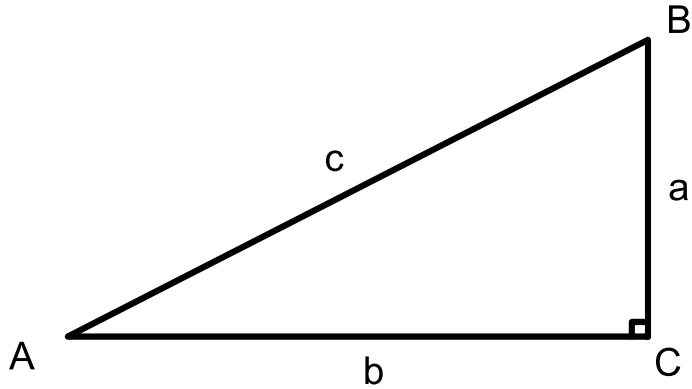
$$\tan A = \frac{a}{b} \rightarrow A = \tan^{-1} \frac{a}{b}$$

$$\sin B = \frac{b}{c} \rightarrow B = \sin^{-1} \frac{b}{c}$$

$$\cos B = \frac{a}{c} \rightarrow B = \cos^{-1} \frac{a}{c}$$

$$\tan B = \frac{b}{a} \rightarrow B = \tan^{-1} \frac{b}{a}$$

مثلث قائم الزاویه



م 1. $c=?$, $A=?$, $B=? \leftarrow a=3$, $b=4$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

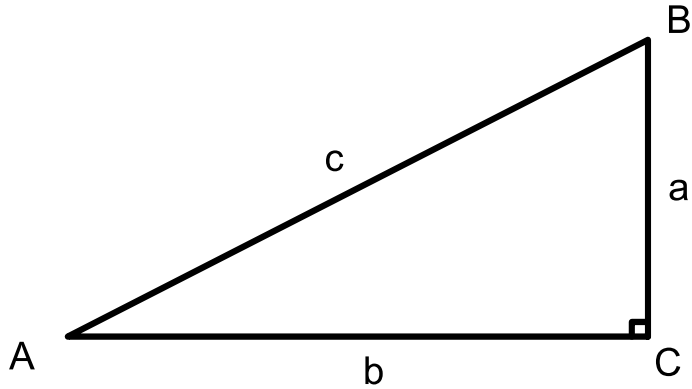
$$\rightarrow c = \sqrt{25} = 5$$

$$\sin A = \frac{a}{c} = \frac{3}{5}$$

$$\rightarrow A = \sin^{-1} \frac{a}{c} = \sin^{-1} \frac{3}{5} = 36.87^\circ \cong 37^\circ$$

$$B = \tan^{-1} \frac{b}{a} = \tan^{-1} \frac{4}{3} = 53.13^\circ \cong 53^\circ$$

مثلث قائم الزاویه



م2. $b=? , a=? \leftarrow c=20, A=30^\circ$

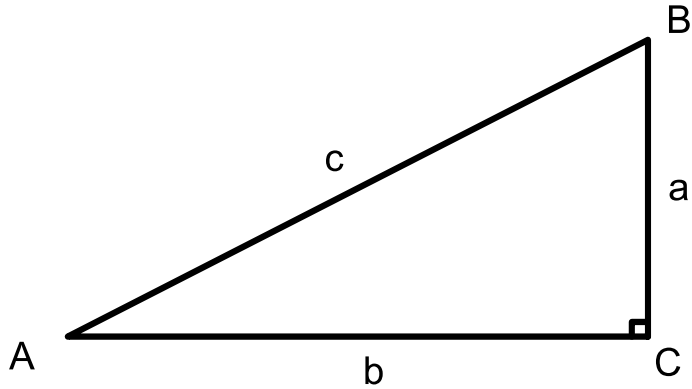
$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\rightarrow b = c * \cos A = 20 * \cos 30 = 17.32$$

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\rightarrow a = c * \sin A = 20 * \sin 30 = 10$$

مثلث قائم الزاویه



م3. $c=? , a=? \leftarrow b=25, A=60^\circ$

$$\cos A = \frac{b}{c} \rightarrow c = \frac{b}{\cos A} = \frac{25}{\cos 60} = 50$$

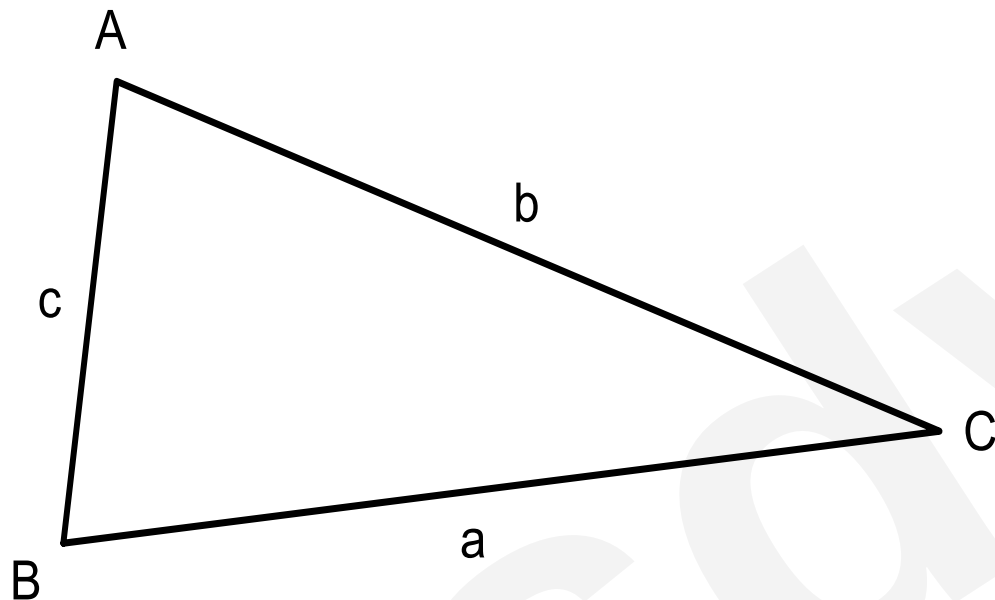
$$\tan A = \frac{a}{b} \rightarrow a = b \tan A = 25 * \tan 60 = 14.43$$

تمرین: تک برگ مثلث قائم الزاویه

قانون سینوس‌ها و کسینوس‌ها در هر مثلث دلخواه

• قانون سینوس‌ها

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



• قانون کسینوس‌ها

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

قانون سینوس‌ها و کسینوس‌ها در هر مثلث دلخواه

م 1. $b=?$, $c=?$, $C=? \leftarrow a=3m$, $A=20^\circ$, $B=120^\circ$

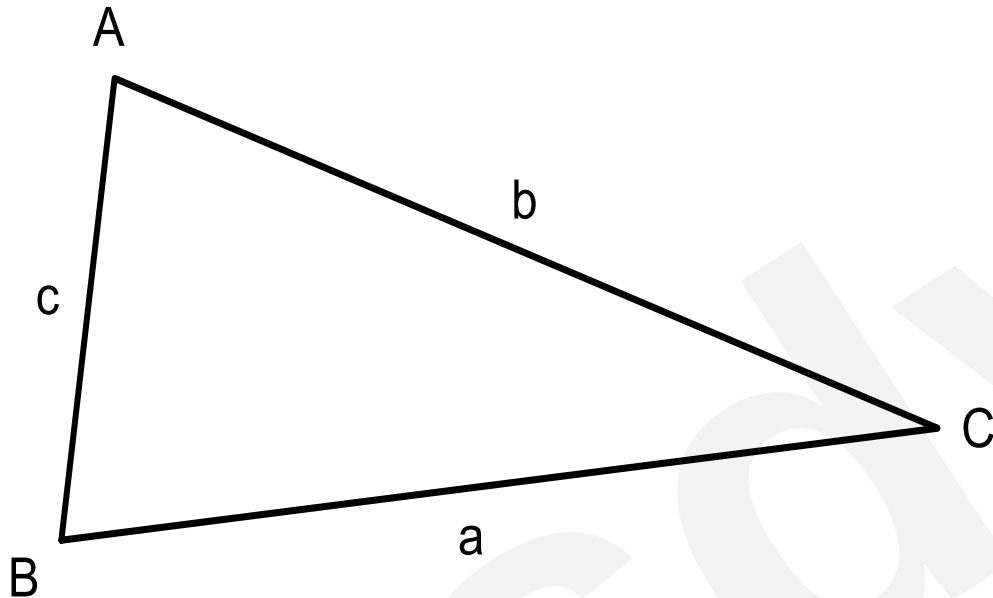
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \rightarrow \frac{3}{\sin 20} = \frac{b}{\sin 120}$$

$$\rightarrow b = \frac{3 * \sin 120}{\sin 20} = 7.60 \text{ m}$$

$$C = 180 - (20 + 120) = 40^\circ$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\rightarrow c = \frac{a * \sin C}{\sin A} = \frac{3 * \sin 40}{\sin 20} = 5.64 \text{ m}$$



قانون سینوس‌ها و کسینوس‌ها در هر مثلث دلخواه

م 2. $a=?$, $B=?$, $C=? \leftarrow b=8.2\text{cm}$, $c=5.1\text{cm}$, $A=70^\circ$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\rightarrow a^2 = 8.2^2 + 5.1^2 - 2 * 8.2 * 5.1 * \cos 70$$

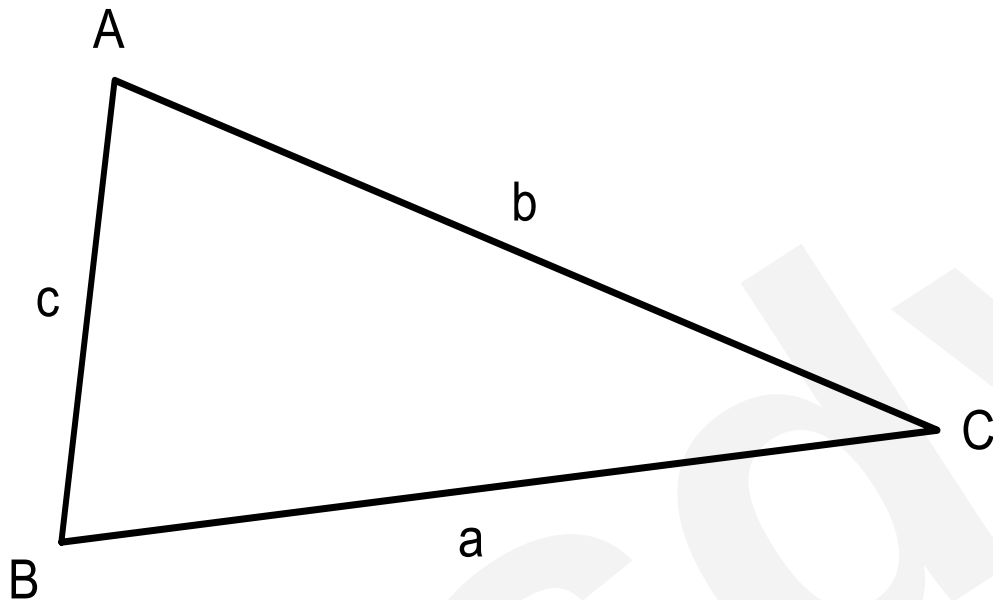
$$\rightarrow a^2 = 64.64 \rightarrow a = \sqrt{64.64} = 8.04\text{m}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \rightarrow \frac{8.04}{\sin 70} = \frac{8.2}{\sin B}$$

$$\rightarrow \sin B = \frac{8.2 * \sin 70}{8.04} = 0.9584$$

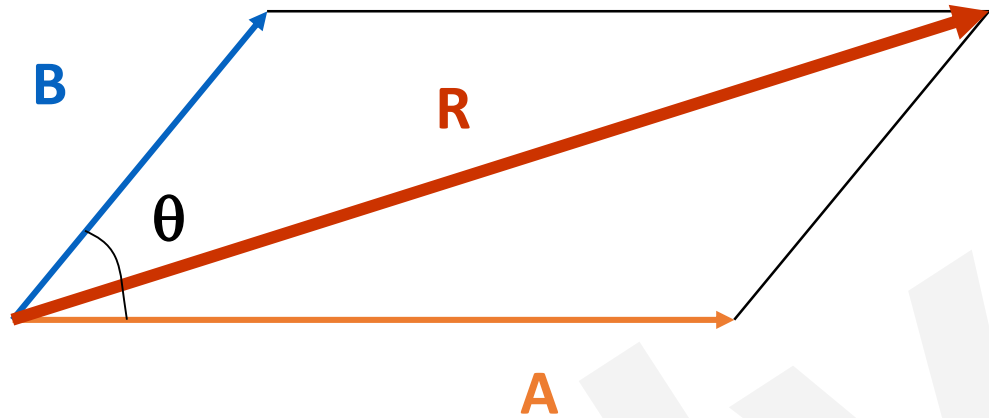
$$\rightarrow B = \sin^{-1} 0.9584 = 73.41^\circ$$

$$C = 180 - (A + B) = 180 - (70 + 73.41) = 36.59^\circ$$



مثال و تمرین: تک برگ قانون سینوس‌ها و کسینوس‌ها

طول قطر متوازی الاضلاع



$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta}$$

توجه: این علامت + با علامت - در قضیه کسینوس ها اشتباه نشود!

جمع دو بردار (روش متوازی الاضلاع) (برای دو بردار)

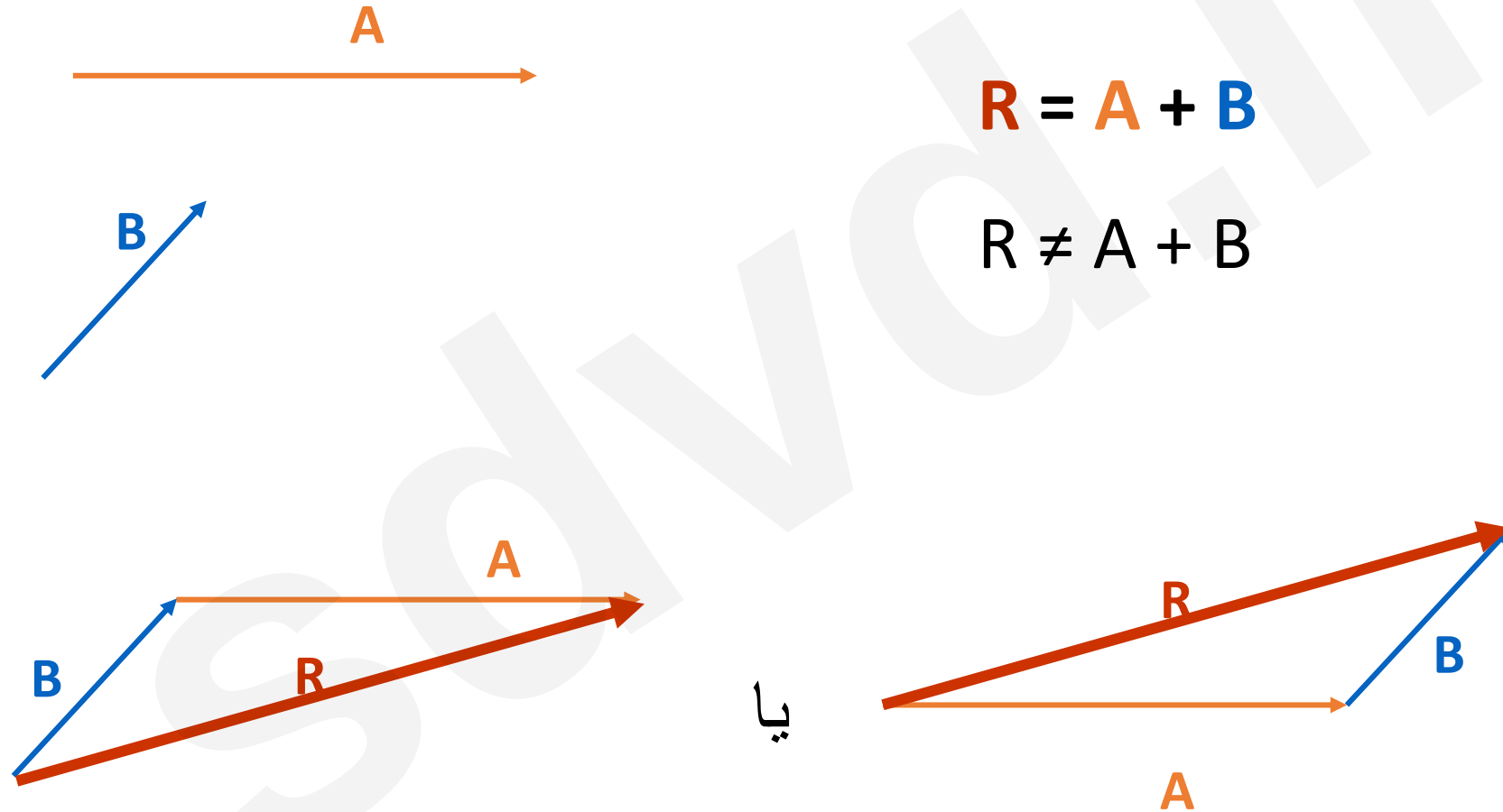
- دو بردار **A** و **B** بردار آزاد در نظر گرفته می‌شوند. آنها را می‌توان توسط معادل‌شان، بردار **R** که قطر متوازی الاضلاع است جانشین ساخت.



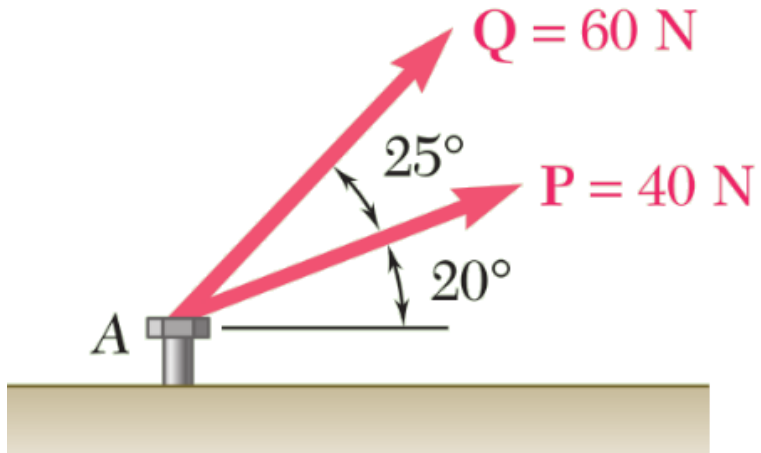
$$R = A + B$$

$$R \neq A + B$$

جمع دو بردار (روش مثلثی) (برای دو بردار)



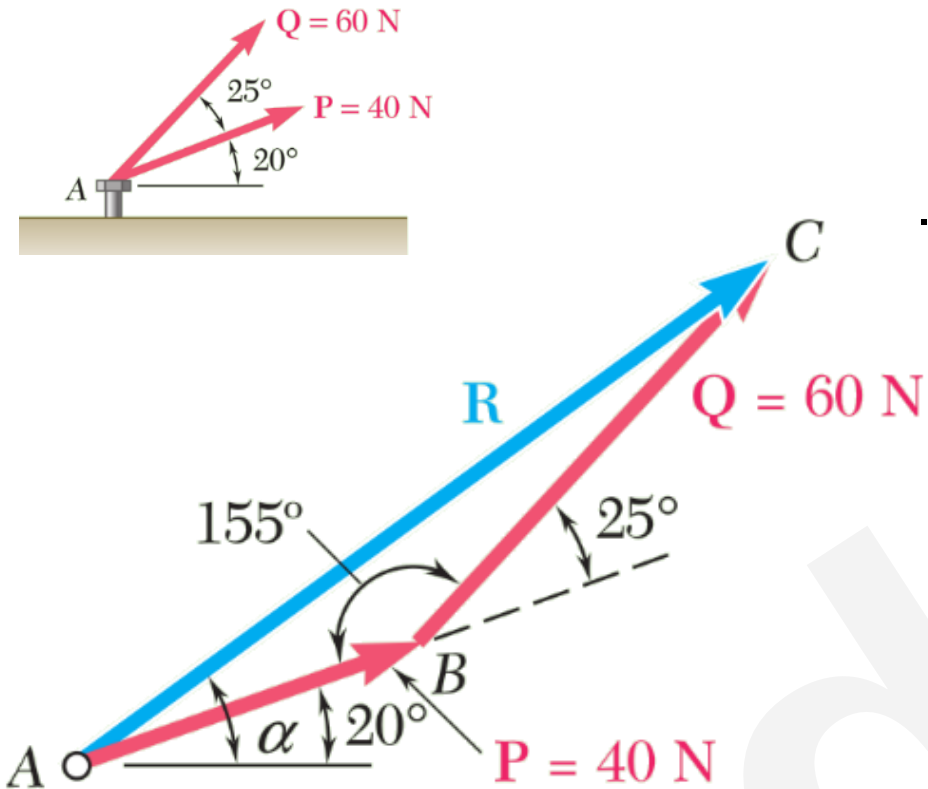
جمع دو بردار



۱. نیروی برآیند (مقدار و زاویه) وارد بر پیچ توسط دو نیروی P و Q را بیابید.

جمع دو بردار

۱. نیروی برآیند (مقدار و زاویه) وارد بر پیچ توسط دو نیروی P و Q را بیابید.



$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B}$$

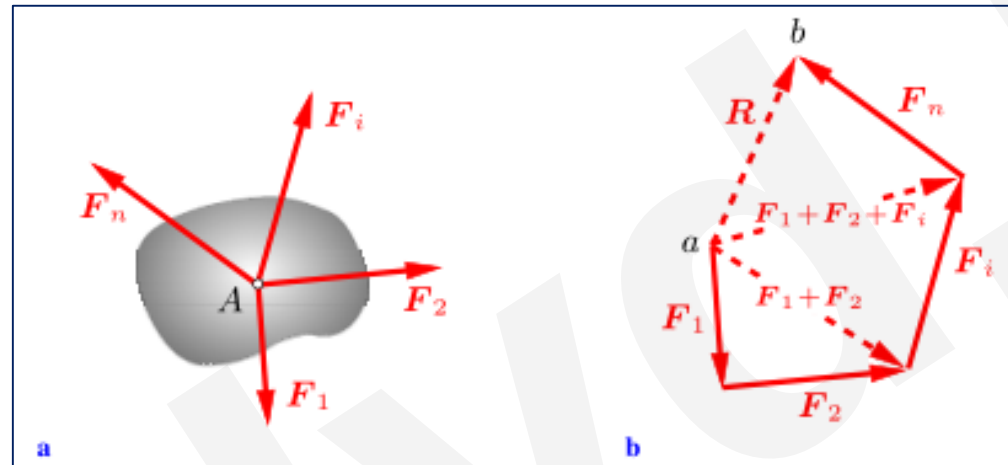
$$R = \sqrt{40^2 + 60^2 - 2 * 40 * 60 \cos 155} = 97.73N$$

$$\frac{Q}{\sin A} = \frac{R}{\sin B} \rightarrow \sin A = \frac{60 * \sin 155}{97.73} = 0.25946 \rightarrow A = \sin^{-1} 0.25946 = 15.04^\circ$$

$$\alpha = 20 + A = 20 + 15.04 = 35.04^\circ \nearrow$$

مثال و تمرین: تک برگ بردار و نیرو

جمع دو بردار (روش زنجیری) (برای چند بردار)



$$R = A + B + C$$

$$R \neq A + B + C$$

مثال و تمرین: تک برگ بردار

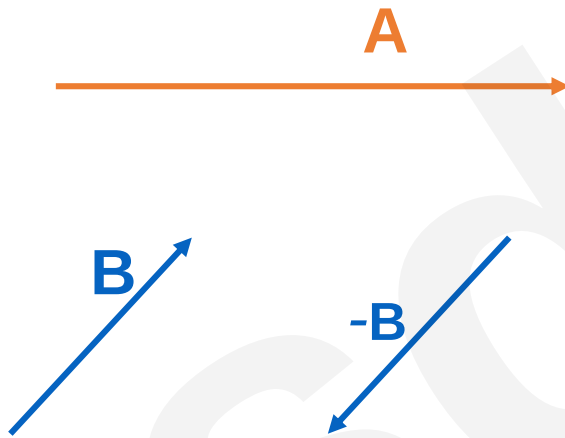
منفی بردار A (بردار $-A$)

- همان اندازه
- همان خط اثر
- جهت اثر خلاف A
- [همان نقطه اثر]

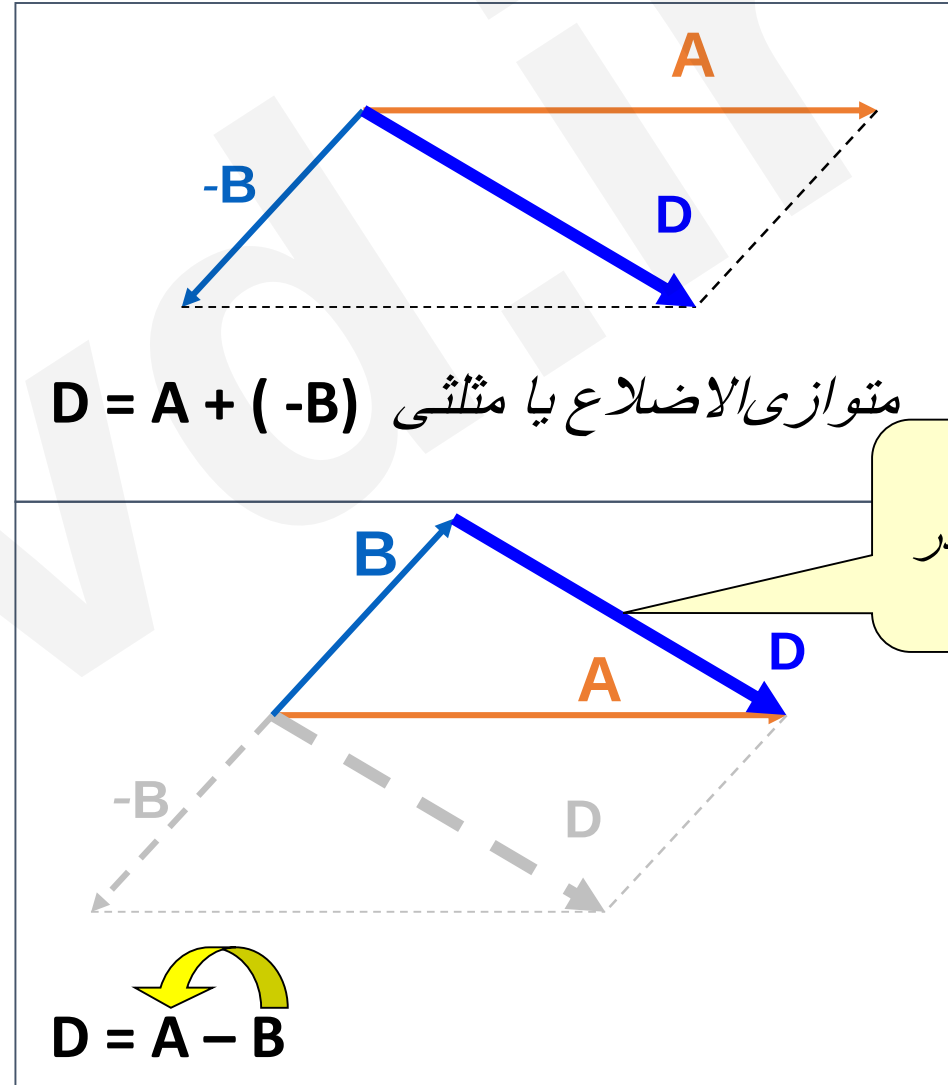


تفاضل دو بردار

$$D = A - B = A + (-B)$$



متوازی الاضلاع یا مثلثی $D = A + (-B)$

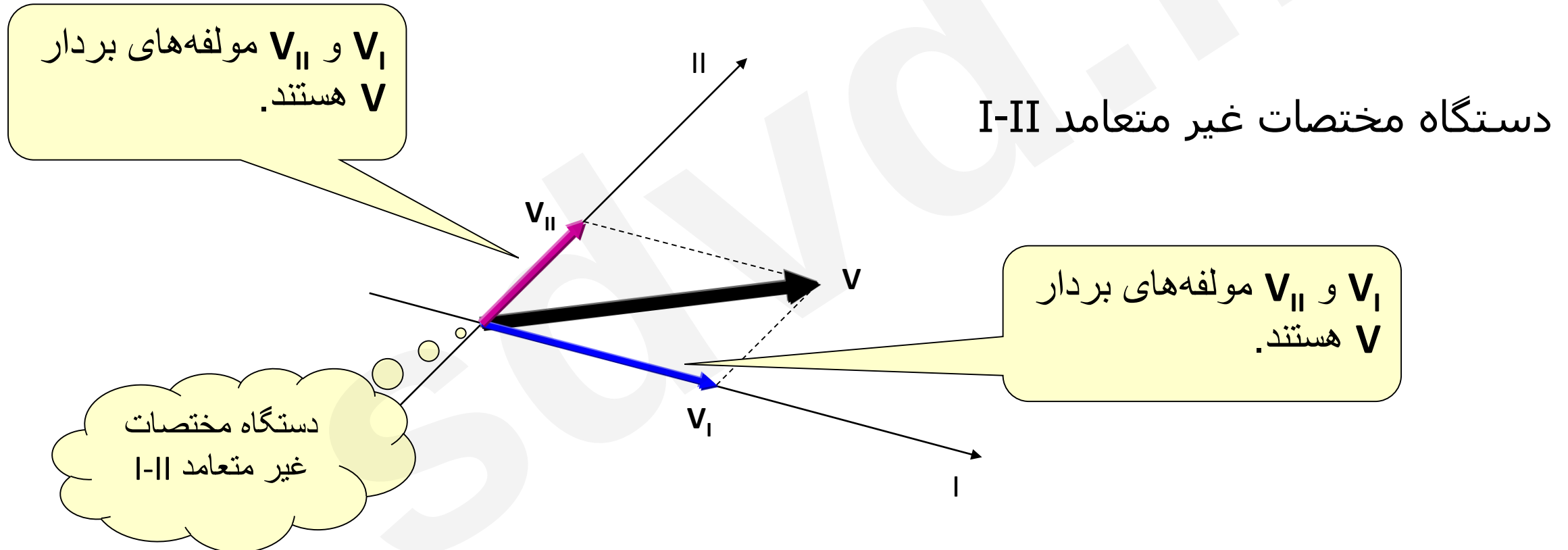


قطر گذرنده از نقطه
غیرمشترک بردارها در
متوازی الاضلاع

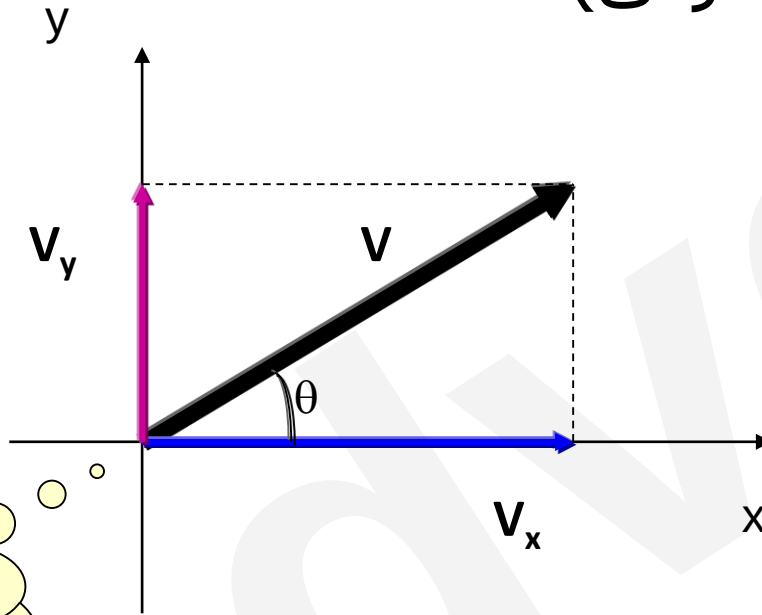
$$D = A - B$$

تجزیه یک بردار به مولفه‌هایش (دو بعدی)

- هر دو یا چند بردار که مجموع آنها تشکیل بردار $\mathbf{V}$ را بدهد، مولفه‌های بردار $\mathbf{V}$ نامیده می‌شوند.



تجزیه یک بردار به مولفه‌هایش (دو بعدی دکارتی)
• دستگاه مختصات متعامد x - y (دکارتی)



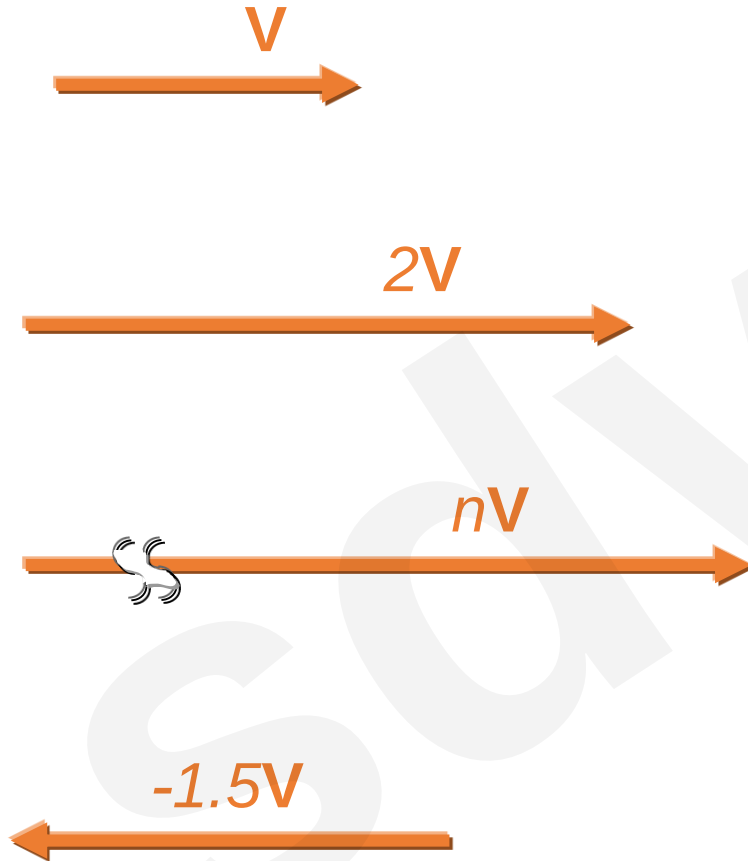
$$V_x = V \cos \theta$$

$$V_y = V \sin \theta$$

$$\theta = \tan^{-1}(V_y / V_x)$$

دستگاه مختصات
متعامد دکارتی
 x - y

ضرب بردار در عدد



$$V' = n V$$

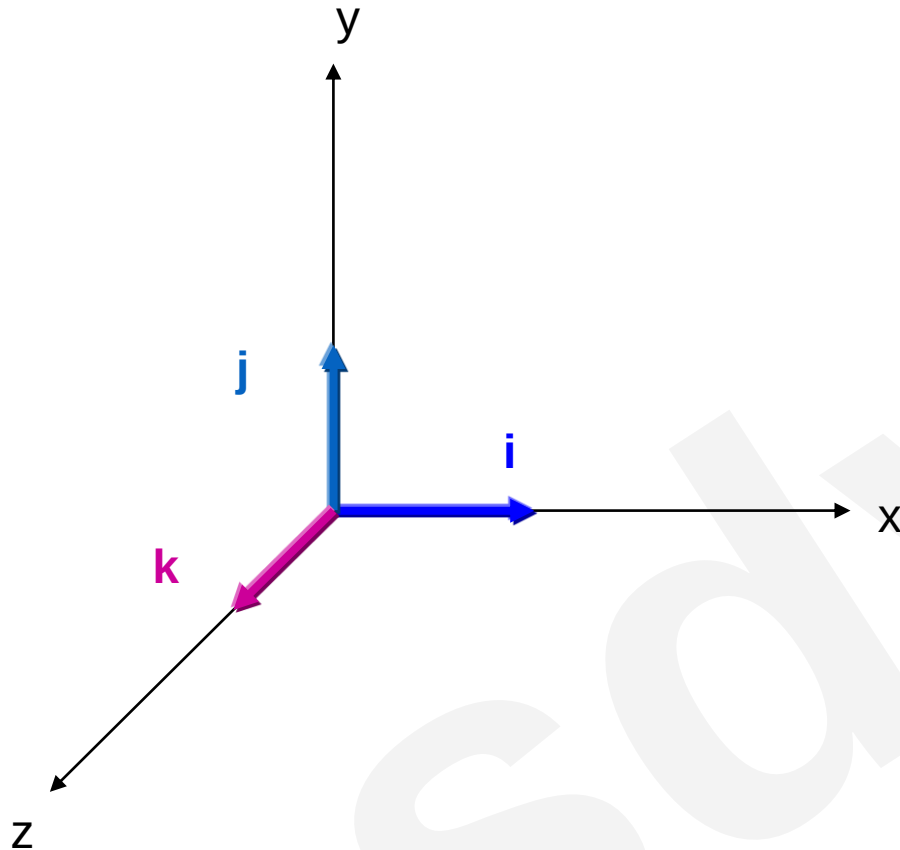
$$|V'| = n |V|$$

- خط اثر ثابت می‌ماند.
- اگر $n < 0$ باشد، جهت اثر خلاف جهت اثر اولیه خواهد شد.
- اگر $n = 0$ باشد، بردار حاصل دارای بزرگی (مقدار) صفر است.

مرور ریاضیات

بردار یکه (یگانه، واحد)

$\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ به ترتیب در امتداد محورها x ، y و z در دستگاه مختصات قائم (متعامد) هستند، به نحوی که بزرگی (طول) آنها برابر 1 (واحد) باشد.



$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

بردار بر حسب بردار یکه

بردار

- مقدار یا اندازه
- خط اثر
- جهت اثر

- مقدار یا اندازه بردار

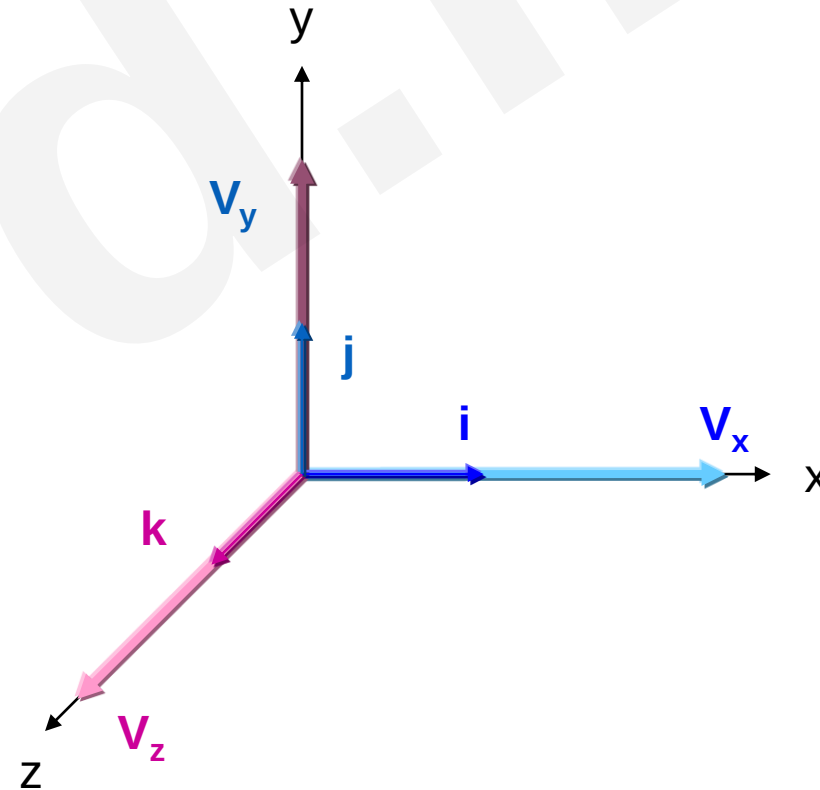
بردار یکه

- خط اثر
- جهت اثر

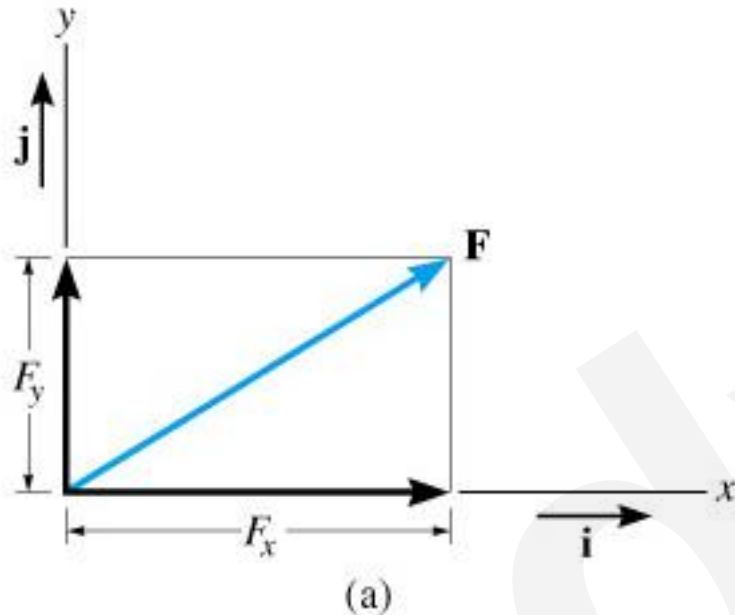
$$\mathbf{V}_x = V_x \mathbf{i}$$

$$\mathbf{V}_y = V_y \mathbf{j}$$

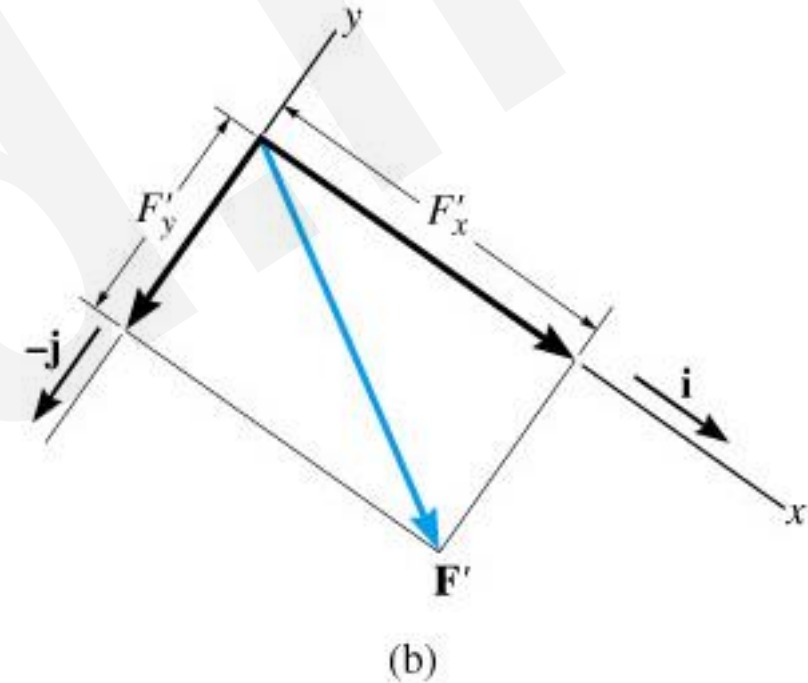
$$\mathbf{V}_z = V_z \mathbf{k}$$



بردار بر حسب بردار یکه (۲ بعدی) در دستگاه مختصات متعامد (قائم یا دکارتی)

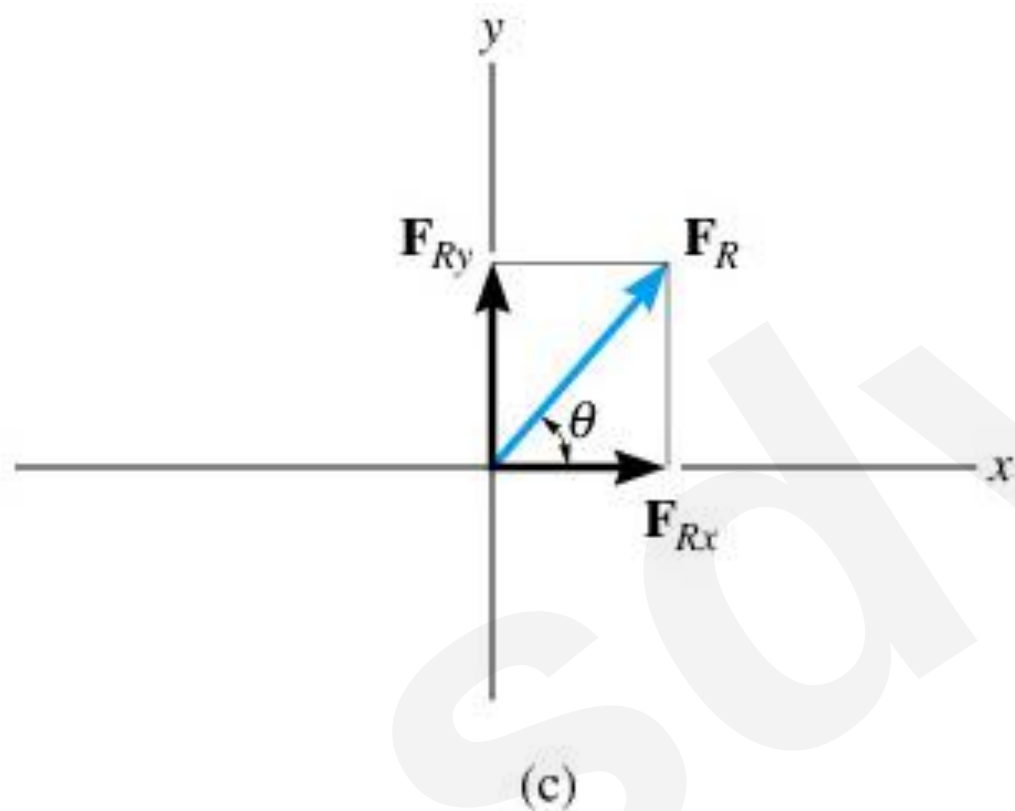


$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}$$



$$\mathbf{F}' = F'_x \mathbf{i} - F'_y \mathbf{j}$$

اندازه (بزرگی) و جهت بردار (۲ بعدی)



$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \right|$$

مثال و تمرین: تک برگ بردار دو بعدی

محاسبه برابند با کمک مولفه‌های متعامد

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} = (F_{1x} \vec{i} + F_{1y} \vec{j}) + (F_{2x} \vec{i} + F_{2y} \vec{j})$$

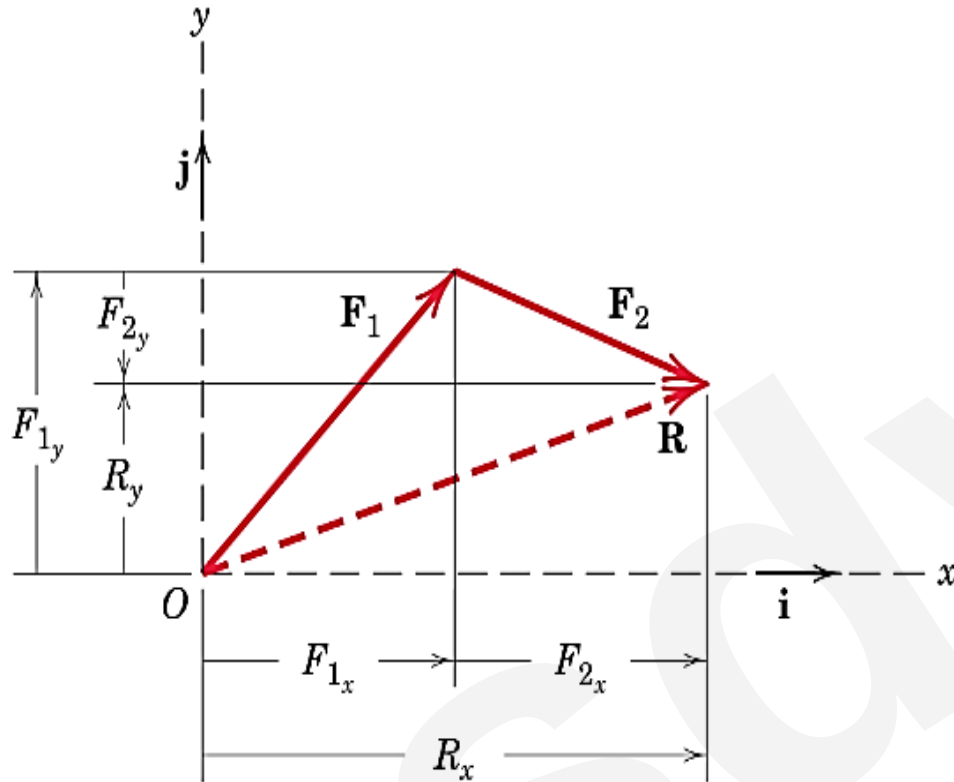
$$= (F_{1x} + F_{2x}) \vec{i} + (F_{1y} + F_{2y}) \vec{j}$$

$$R_x = \sum F_x \quad , \quad R_y = \sum F_y$$

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} = \sum F_x \vec{i} + \sum F_y \vec{j}$$

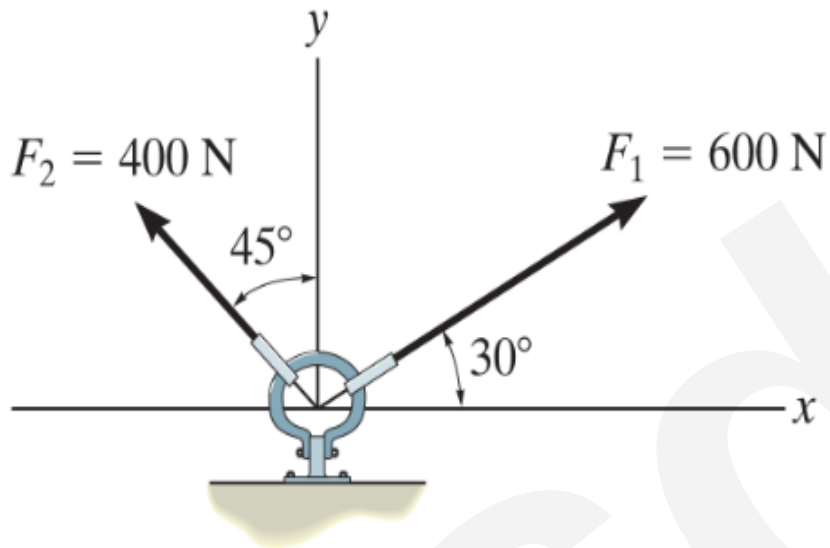
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\theta_R = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right|$$

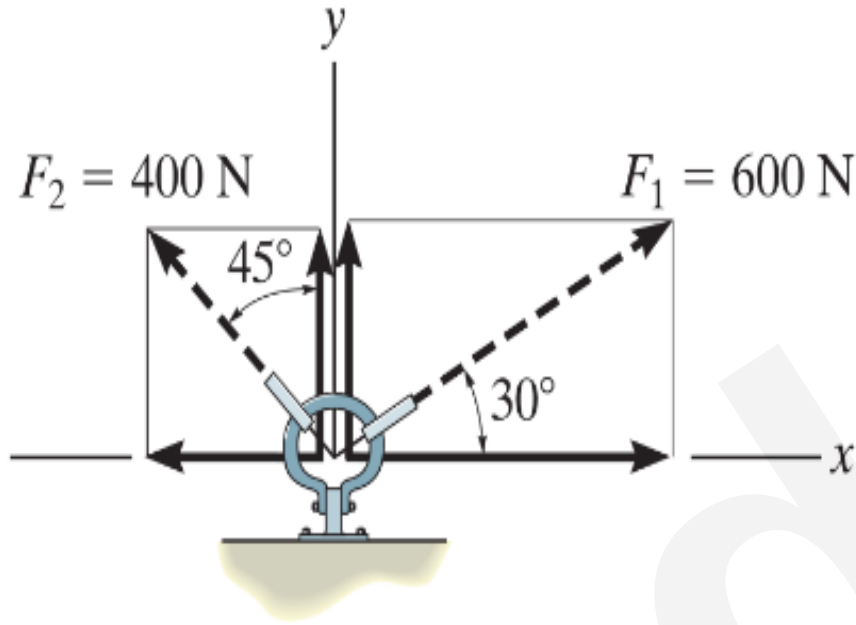


محاسبه برایندها کمک مولفه‌های متعامد

م1. بردار و مقدار و جهت نیروی براینده وارد بر حلقه را تعیین کنید.



محاسبه برآیند با کمک مولفه‌های متعامد



$$F_{1x} = F_1 \cos 30 = 519.62\text{ N}$$

$$F_{1y} = F_1 \sin 30 = 300.00\text{ N}$$

$$F_{2x} = F_2 \cos 45 = 282.84\text{ N}$$

$$F_{2y} = F_2 \sin 45 = 282.84\text{ N}$$

$$R_x = \sum F_x = 519.62 - 282.84 = 236.78\text{ N}$$

$$R_y = \sum F_y = 300.00 + 282.84 = 582.84\text{ N}$$

$$\vec{R} = 236.78 \vec{i} + 582.84 \vec{j}\text{ N}$$

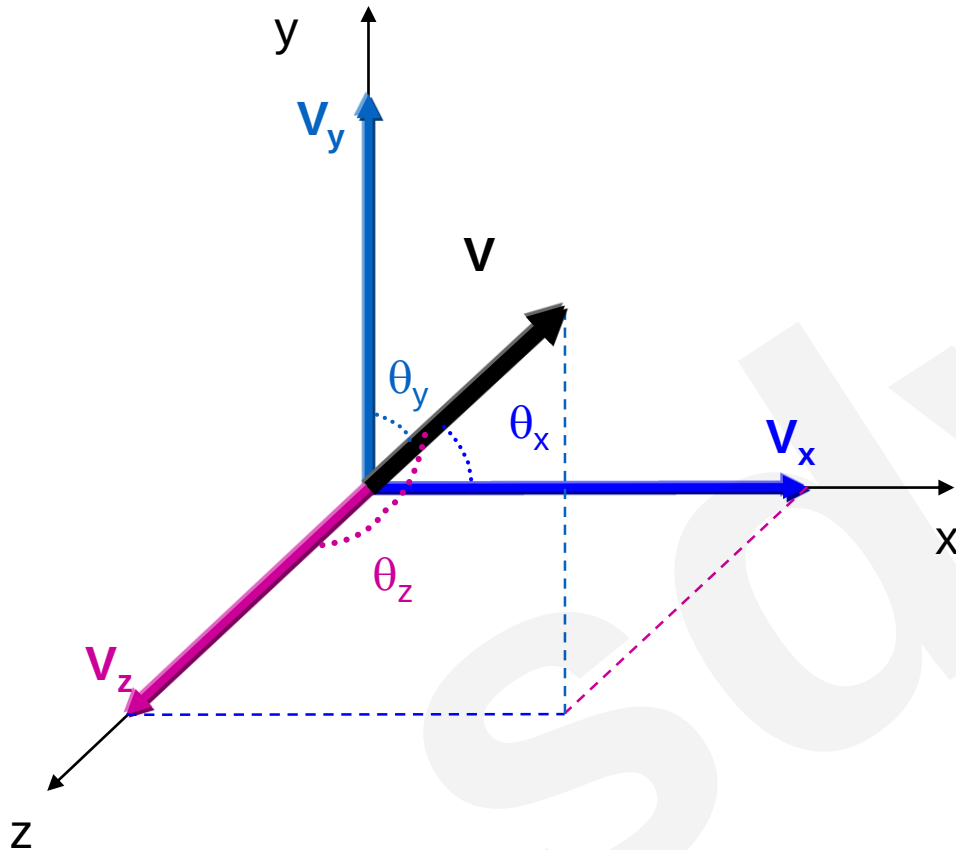
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{236.78^2 + 582.84^2} = 629.10\text{ N}$$

$$\theta_R = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{582.84}{236.78} \right| = 67.9^\circ \nearrow$$

تمرین: تک برگ نیرو و بردار دو بعدی

مرور ریاضیات

بردار بر حسب بردار یکه (3 بعدی)
در دستگاه مختصات متعامد (قائم یا دکارتی)



$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_x + \mathbf{V}_y + \mathbf{V}_z$$

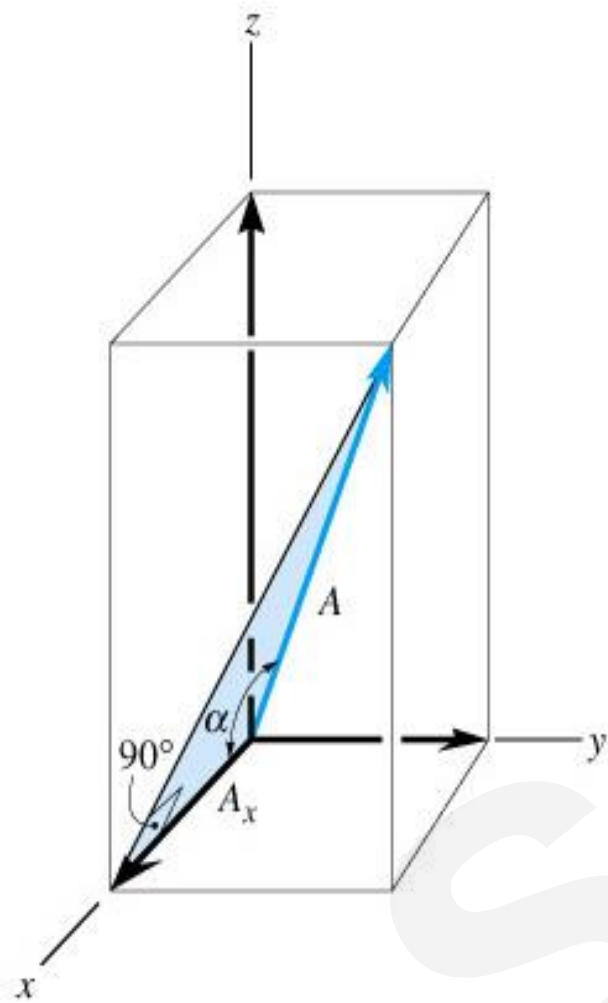
$$\mathbf{V} = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k}$$

$$V_x = V \cos \theta_x = V_l$$

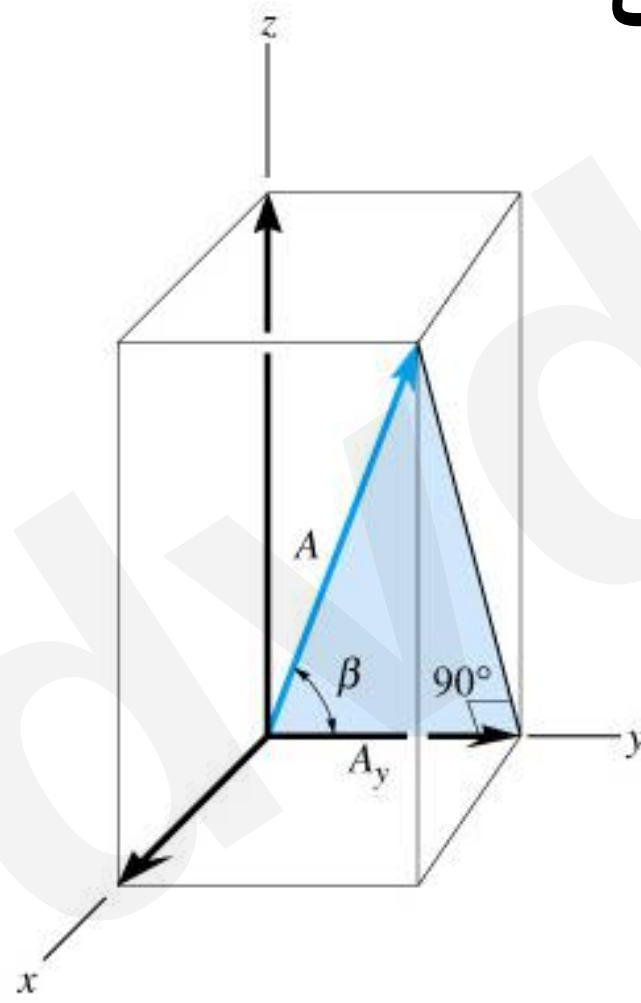
$$V_y = V \cos \theta_y = V_m$$

$$V_z = V \cos \theta_z = V_n$$

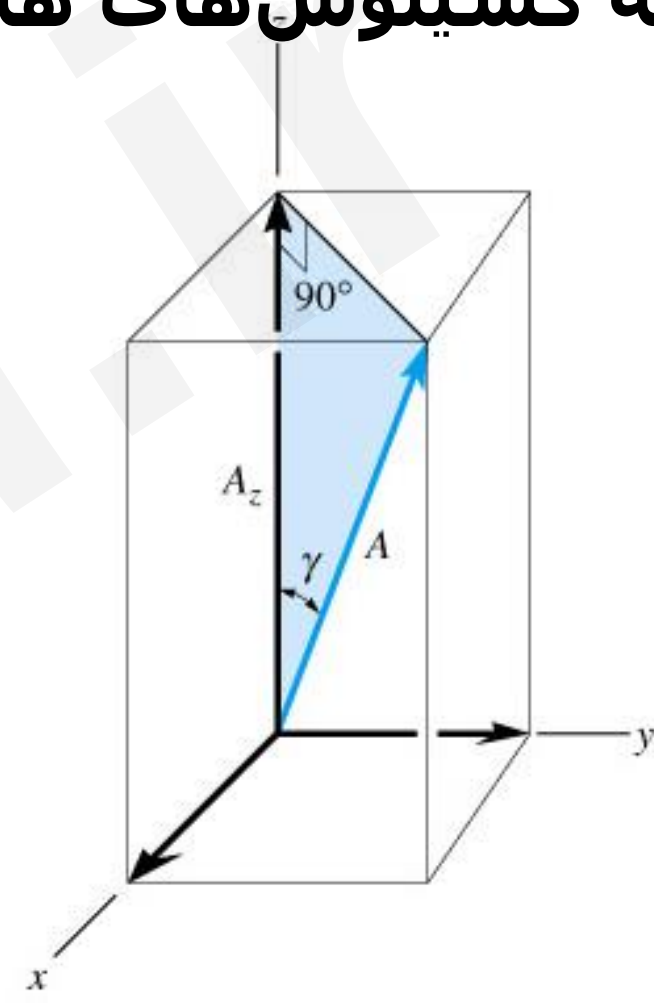
l و m و n را کسینوس‌های هادی بردار می‌نامند.



(a)



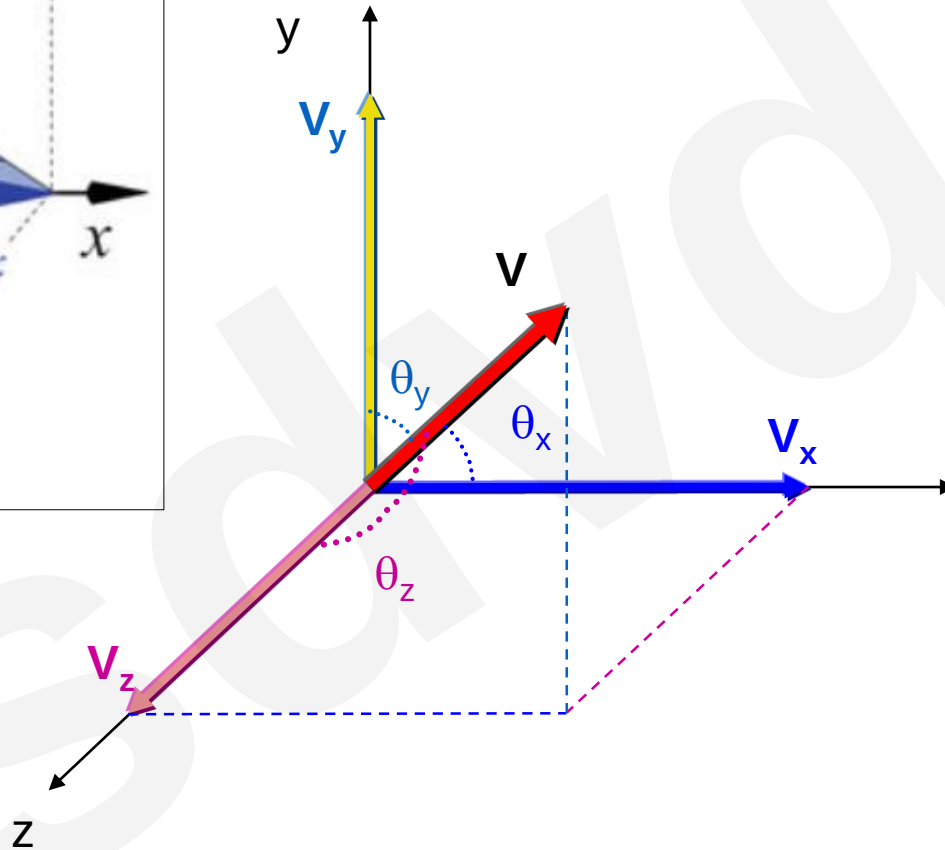
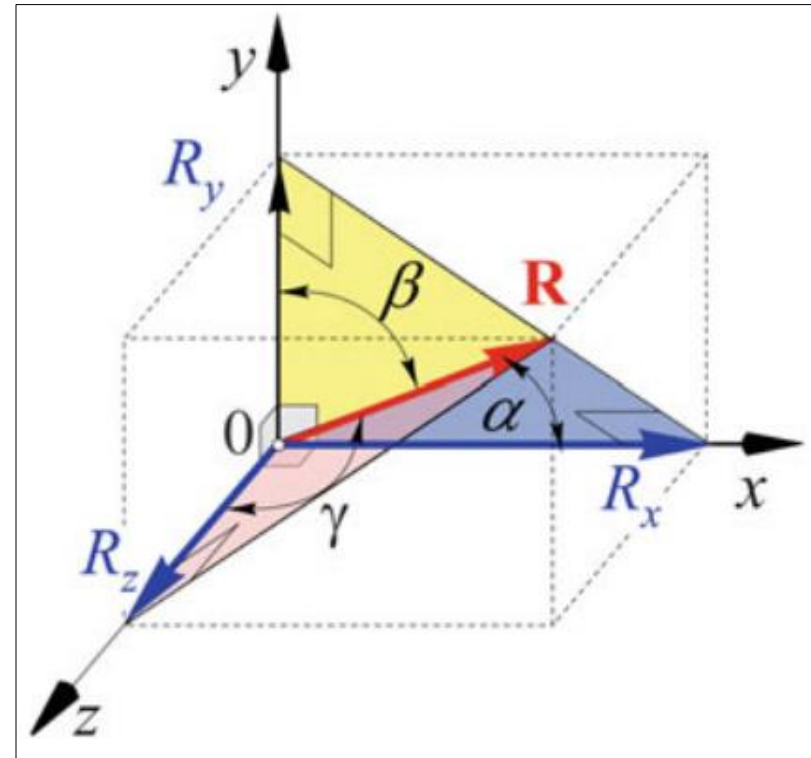
(b)



(c)

مرور ریاضیات

بردار بر حسب بردار یکه (ادامه)



$$l = \cos \theta_x = \cos \alpha$$

$$m = \cos \theta_y = \cos \beta$$

$$n = \cos \theta_z = \cos \gamma$$

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

جمع بردارها

• دو بردار P و Q را در نظر بگیریم:

$$\mathbf{P} = \mathbf{i} P_x + \mathbf{j} P_y + \mathbf{k} P_z$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{i} Q_x + \mathbf{j} Q_y + \mathbf{k} Q_z$$

• می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{i} (P_x + Q_x) + \mathbf{j} (P_y + Q_y) + \mathbf{k} (P_z + Q_z)$$

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P}$$

اصل جابه‌جایی

$$\mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{R}$$

اصل شرکت‌پذیری

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{P} + (-\mathbf{Q})$$

مثال و تمرین: تک برگ بردار سه بعدی

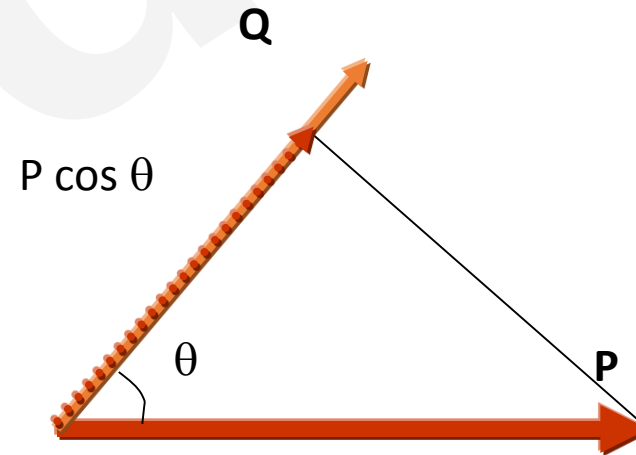
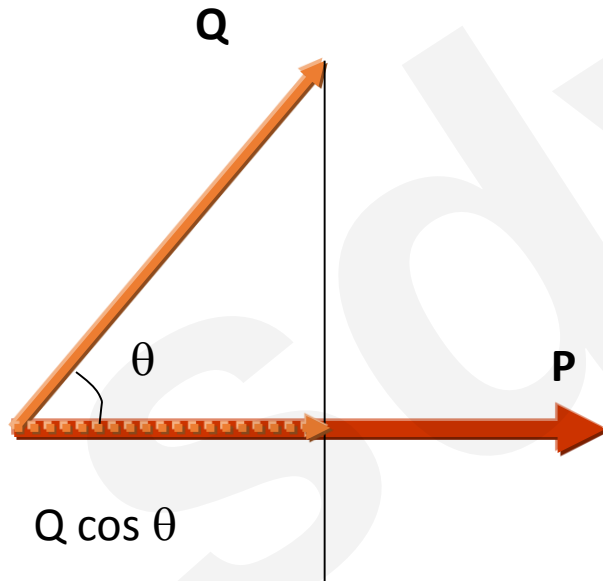
ضرب داخلی (عددی یا نقطه‌ای)

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P Q \cos \theta$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$$

- یک تعریف است.

- نتیجه، یک کمیت عددی است.



ضرب داخلی (عددی یا نقطه‌ای)

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P Q \cos \theta$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0$$



$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = (\mathbf{i} P_x + \mathbf{j} P_y + \mathbf{k} P_z) \cdot (\mathbf{i} Q_x + \mathbf{j} Q_y + \mathbf{k} Q_z)$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$$

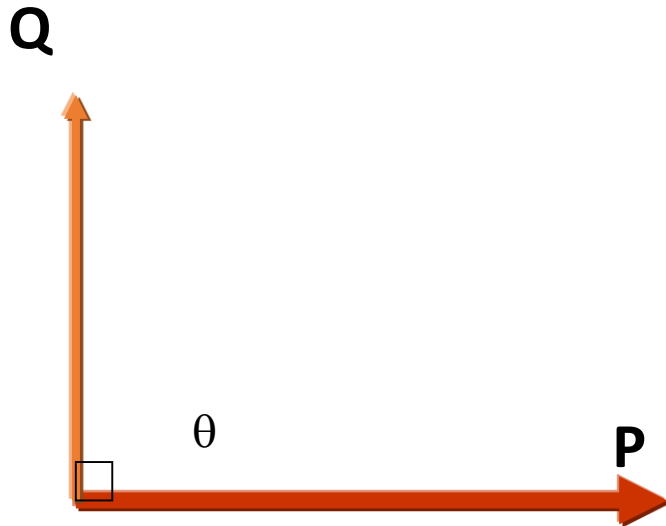
نکات ضرب داخلی (1)

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P Q \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{P Q}$$

$$\cos \theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{P Q} = l_p l_q + m_p m_q + n_p n_q$$

l و m و n کسینوس‌های هادی بردارها هستند.

نکات ضرب داخلی (2)



$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P} \perp \mathbf{Q}$$

$$l_p l_q + m_p m_q + n_p n_q = 0 \Leftrightarrow \mathbf{P} \perp \mathbf{Q}$$

$$(\cos 90 = 0)$$

نکات ضرب داخلی (3)

$$P \cdot (Q + R) = (P \cdot Q) + (P \cdot R)$$

• قانون شرکت پذیری

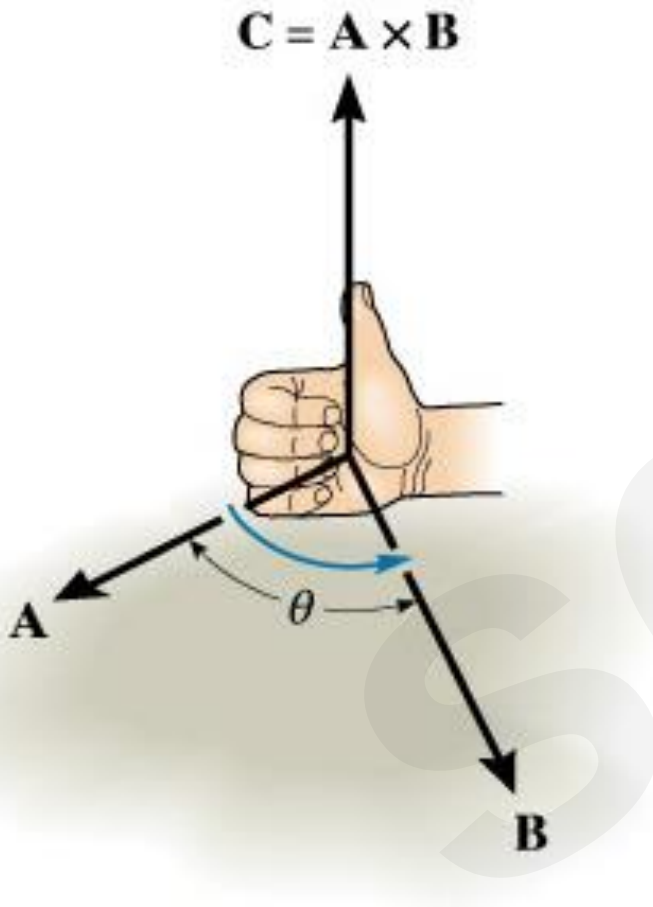
ضرب خارجی (Cross) دو بردار

- مطابق تعریف، ضرب خارجی دو بردار **A** و **B**، برداری مثل **C** است که به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

- چند نکته:

- عمود بر صفحه دو بردار **A** و **B**
- اندازه مساحت متوازی‌الاضلاع دو بردار **A** و **B**
- قانون دست راست



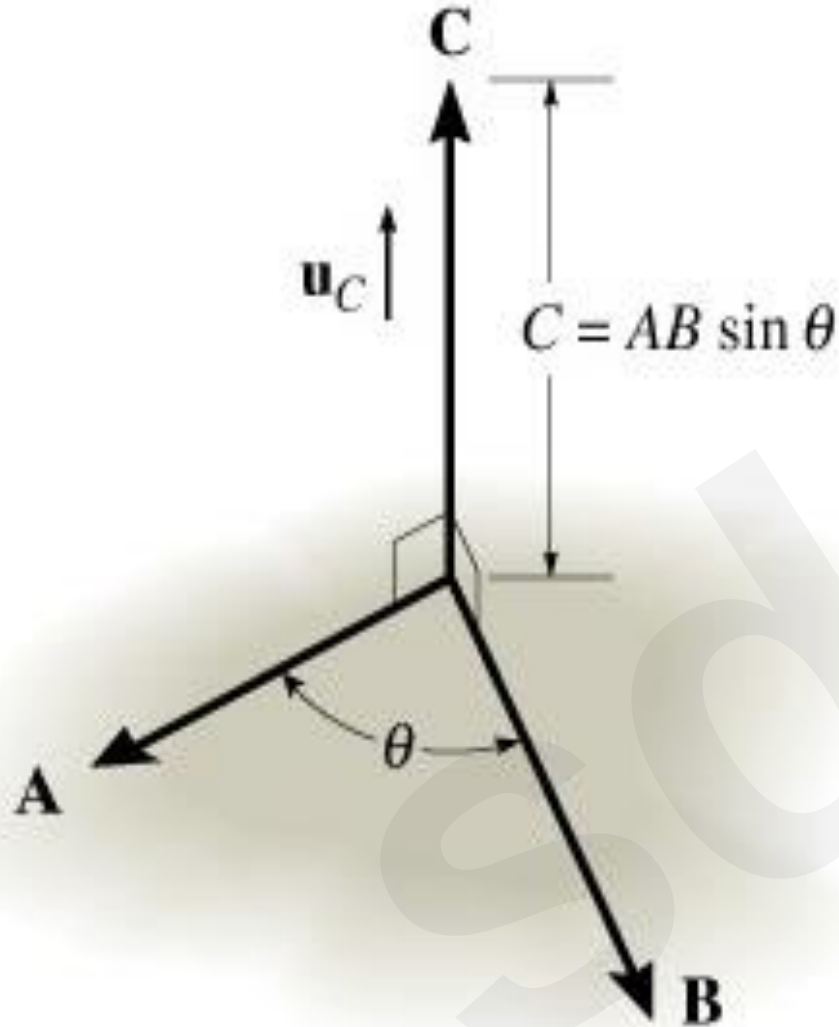
ضرب خارجی دو بردار (ادامه)

• اندازه

$$C = AB \sin \theta$$

• جهت

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \sin \theta) \mathbf{u}_C$$



محاسبه ضرب خارجی دو بردار A و B با استفاده از دترمینان

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0, \dots$$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \dots$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} = & +(A_y B_z - A_z B_y)\mathbf{i} \\ & -(A_x B_z - A_z B_x)\mathbf{j} \\ & +(A_x B_y - A_y B_x)\mathbf{k} \end{aligned}$$

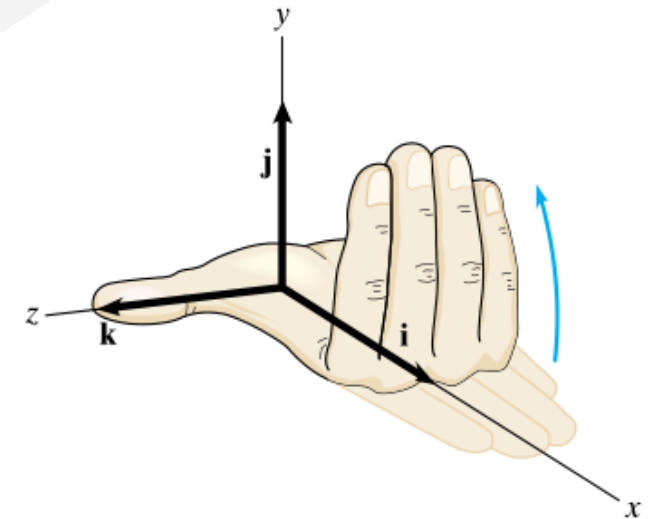
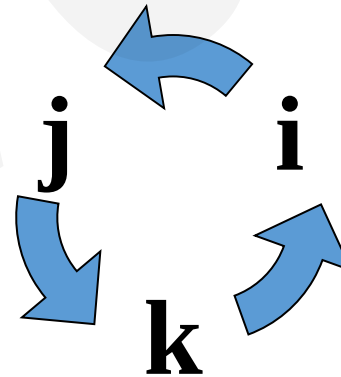


Figure 2.26

The right-hand rule indicates that $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$.

مثال و تمرین: تک برگ گشتاور