

استاتیک

بخش سوم: اجسام صلب (قسمت دوم: گشتاور زوج نیرو و تبدیل سیستم‌های نیرو-کوپل)

مدرس: شهاب داودی

www.sdvd.ir

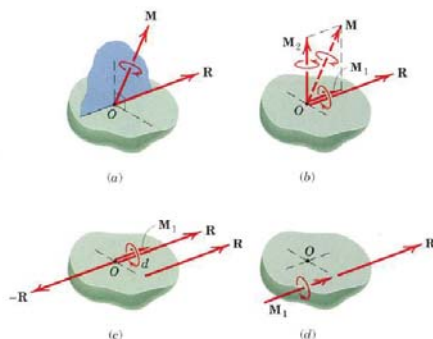
davoudi@gmail.com

3-36

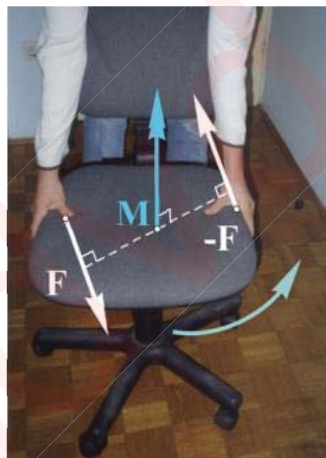
استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

هدف فصل

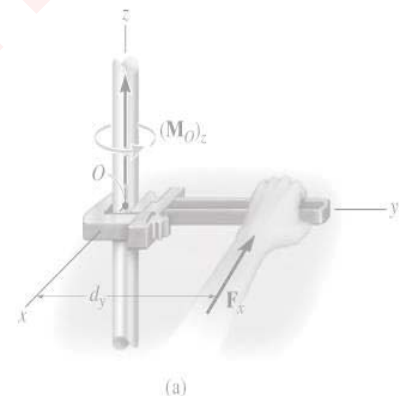
سیستم‌های نیرو-کوپل



گشتاور زوج نیرو



گشتاور و کاربرد آن در
فضای 2D و 3D

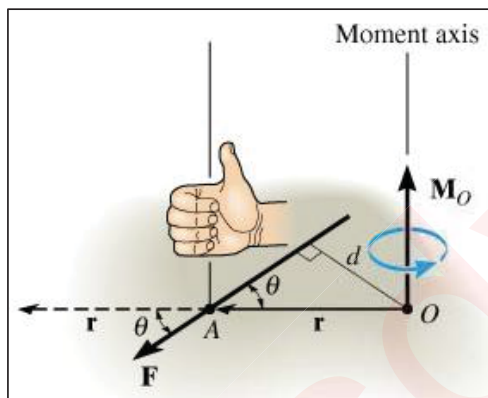


3-37

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

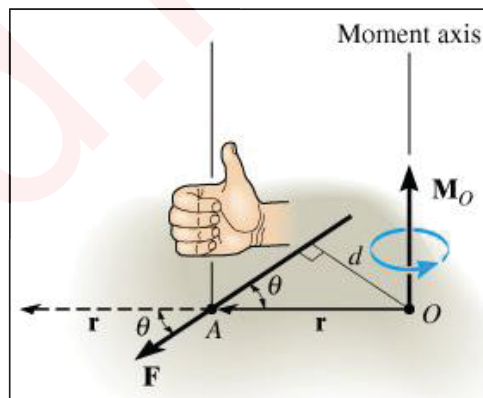
مرور مفاهیم گشتاور

بازو (r)
(بازوی غیر عمود)



$$M_O^F = Fr \sin \theta$$

بازوی عمود (d)



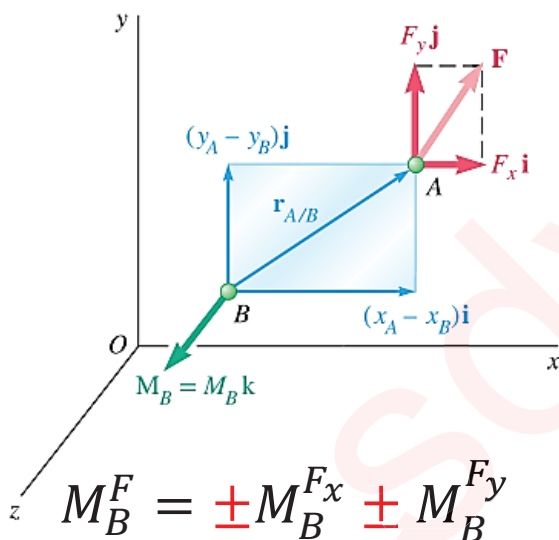
$$M_O^F = Fd$$

3-38

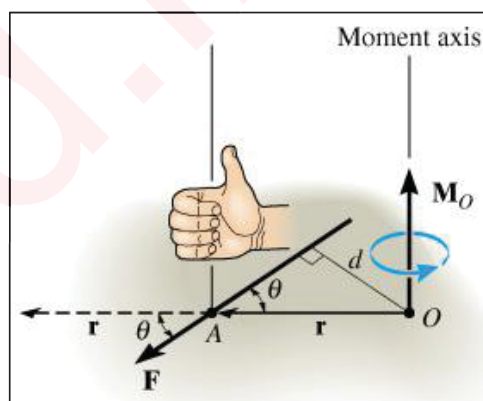
استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

مرور مفاهیم گشتاور

تجزیه به مولفه‌ها
(افقی و قائم)



بازو ($\vec{r}$)



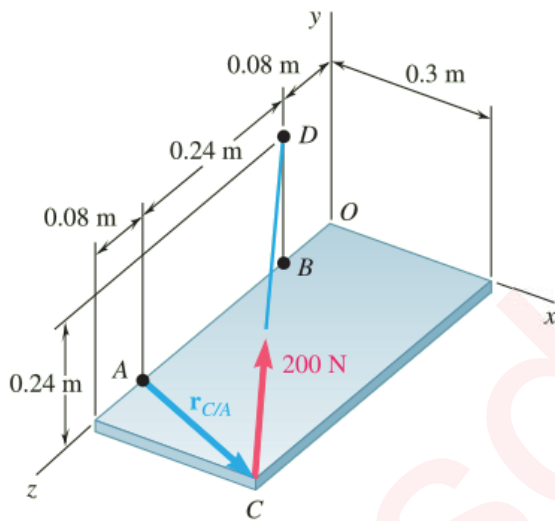
$$\vec{M}_O^F = \vec{r} \times \vec{F}$$

3-39

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

مثال مرور گشتاور 3D

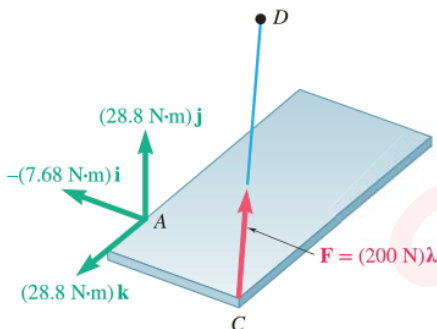
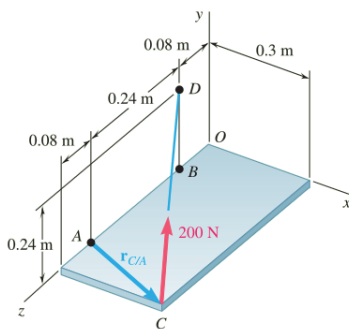
صفحه مستطیلی توسط دو پایه A و B و کابل CD نگه داشته شده است. اگر کشش کابل 200 N باشد، گشتاور نیروی وارد بر نقطه C حول نقطه A را حساب کنید.



3-40

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

مثال مرور گشتاور 3D



$$\vec{M}_A = \vec{r}_{C/A} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_{C/A} = \vec{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = (0.3 \text{ m})\vec{i} + (0.08 \text{ m})\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= F\vec{\lambda}_F = F\vec{\lambda}_{CD} = (200 \text{ N}) \frac{\vec{CD}}{CD} \\ &= (200 \text{ N}) \frac{-(0.3 \text{ m})\vec{i} + (0.24 \text{ m})\vec{j} - (0.32 \text{ m})\vec{k}}{0.5 \text{ m}} \end{aligned}$$

$$= -(120 \text{ N})\vec{i} + (96 \text{ N})\vec{j} - (128 \text{ N})\vec{k}$$

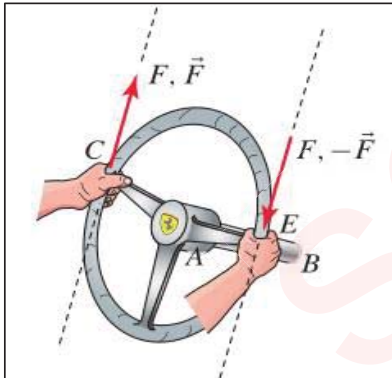
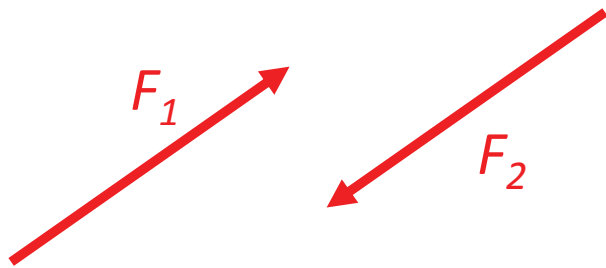
$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_A = -(7.68 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{i} + (28.8 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{j} + (28.8 \text{ N} \cdot \text{m})\vec{k}$$

3-41

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

تعریف زوج نیرو یا کوپل



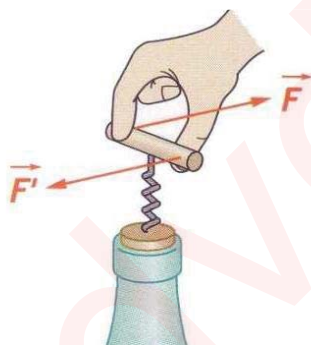
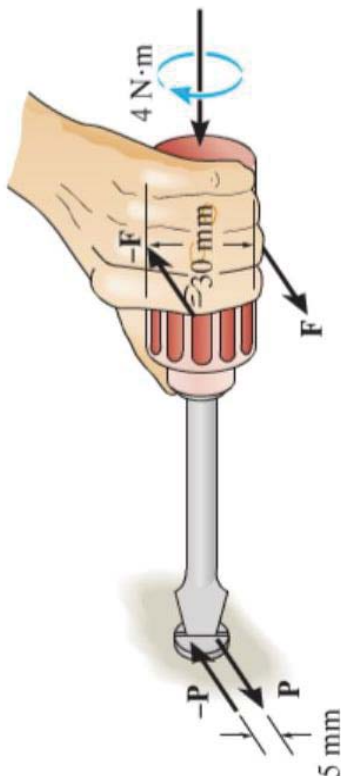
- دو نیروی F_1 و F_2
- اندازه یکسان $|F_1| = |F_2|$
- خطوط اثر موازی هم
- مختلف الجهت
- فاصله بین خطوط اثر (منطبق بر هم نباشند)

به بیان برداری: $\vec{F}$ و $-\vec{F}$

3-42

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

کاربردهای زوج نیرو یا کوپل

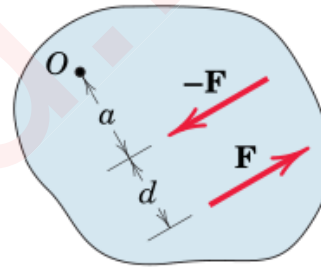
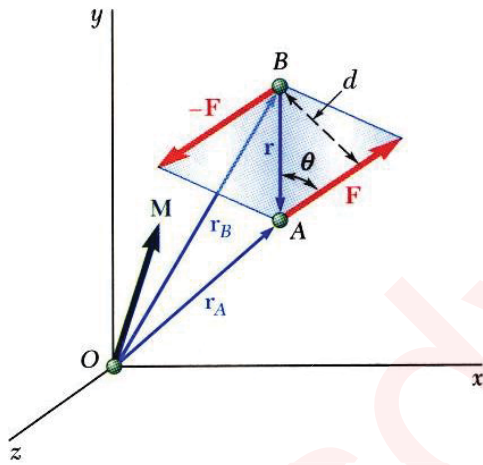


3-43

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

اثر زوج نیرو یا کوپل بر اجسام صلب

• نیروی برابند زوج نیرو



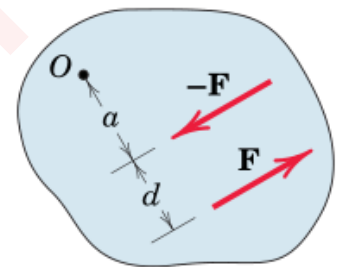
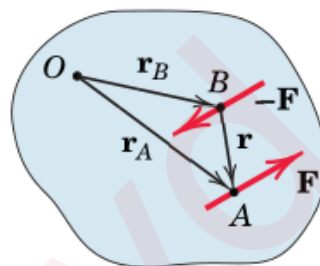
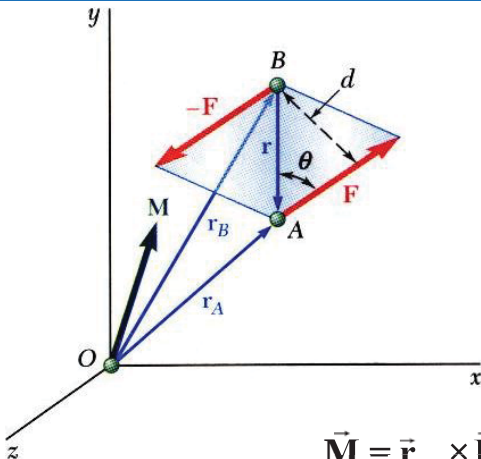
$$\sum \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \xrightarrow{\vec{F}_2 = -\vec{F}_1} = \vec{F}_1 + (-\vec{F}_1) = 0$$

3-44

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

اثر زوج نیرو یا کوپل بر اجسام صلب

• گشتاور زوج نیرو (حول هر مرکز)

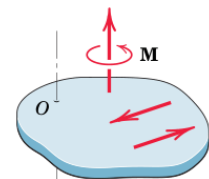


$$\vec{M} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times (-\vec{F})$$

$$= (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times \vec{F}$$

$$= \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = rF \sin \theta = Fd$$



$$M = F(a + d) - Fa$$

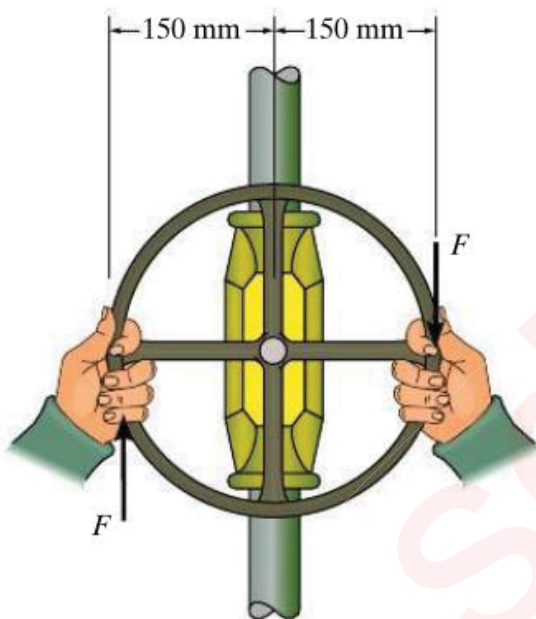
$$= Fd$$

3-45

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

مثال کوپل شیرفلکه

اگر برای باز کردن شیر فلکه مقابل، گشتاور 25 Nm نیاز باشد، نیروی لازم که باید به محیط فلکه وارد شود چقدر است؟

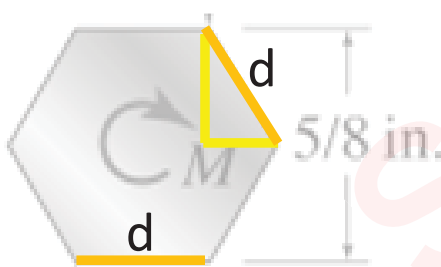
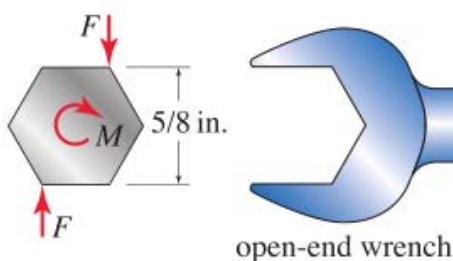


$$M = Fd \rightarrow F = \frac{M}{d}$$

$$F = \frac{25 \text{ Nm}}{0.3 \text{ m}} = 83.3 \text{ N}$$

مثال کوپل آچار

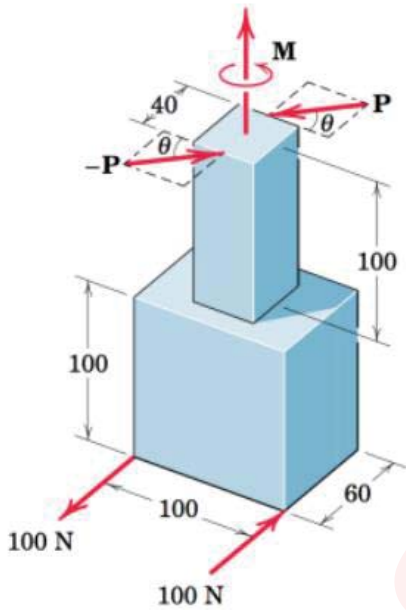
یک آچار نیروهای مساوی F را عمود به سطح به سر پیچی وارد می‌کند تا گشتاور M ایجاد شود. اگر $F = 400 \text{ lb}$ باشد، گشتاور M چند پوند-اینچ (lb-in) است؟



$$d \cos 30 = \frac{\left(\frac{5}{8}\right)}{2} \rightarrow d = \frac{\frac{5}{16}}{\cos 30} = 0.361$$

$$M = Fd = 400 (0.361) = 144.3 \text{ lb.in}$$

مثال کوپل ستون



قطعه صلب تحت تاثیر زوج نیرو 100 N قرار دارد. این زوج نیرو را با زوج نیروی معادل P و $-P$ به اندازه 400 N جایگزین می‌کنیم. زاویه θ چند درجه است؟

$$M = Fd = 100 (0.1) = 10 \text{ N.m}$$

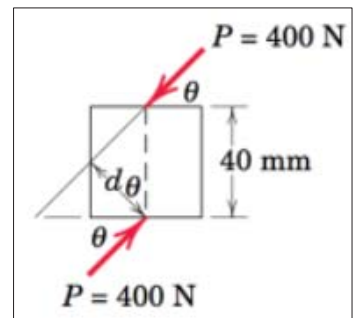
$$M = Fr \sin \phi = 400 (0.040) \sin \phi$$

$$10 = 400 (0.040) \sin \phi$$

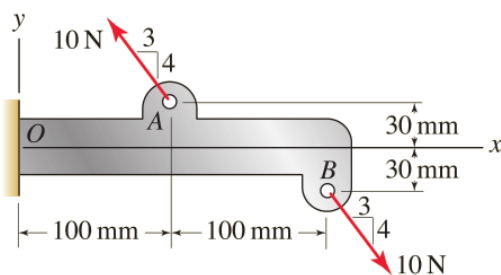
$$\sin \phi = 0.625$$

$$\phi = \sin^{-1} 0.625 = 38.7$$

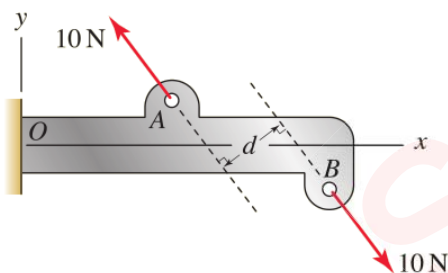
$$\theta = 90 - \phi = 90 - 38.7 = 51.3^\circ$$



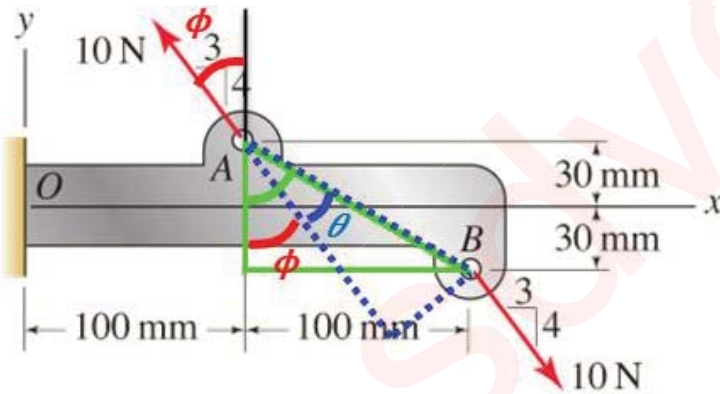
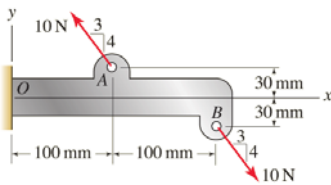
مثال کوپل پایه دیواری



گشتاور زوج نیرو وارد بر پایه دیواری
شکل را بیابید. (440 N.mm CW)



مثال کوپل پایه دیواری



$$M = F r \sin \theta$$

$$r = AB = \sqrt{60^2 + 100^2} = 116.6 \text{ mm}$$

$$A = \tan^{-1} \frac{100}{60} = 59.3^\circ$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{3}{4} = 36.9^\circ$$

$$\theta = A - \phi = 59.3 - 36.9 = 22.4^\circ$$

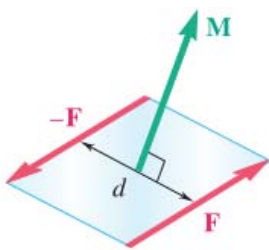
$$M = F r \sin \theta = 10 * 116.6 * \sin 22.4^\circ = 444 \text{ N.mm} \sim$$

3-50

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

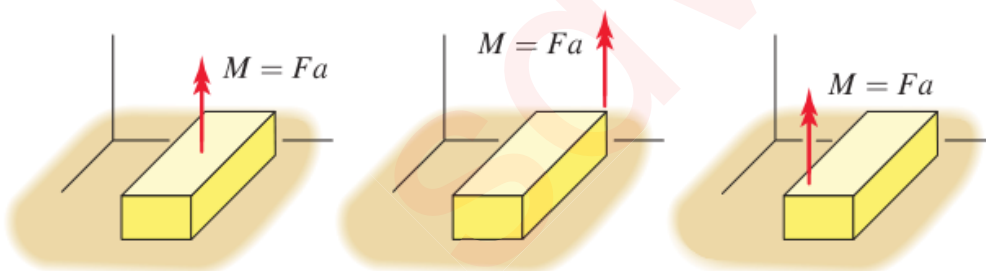
ویژگی بردار گشتاور زوج نیرو یا کوپل

• گشتاور زوج نیرو «بردار آزاد» است.



$$M = F \cdot d \text{ یا } \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

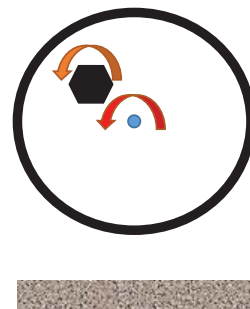
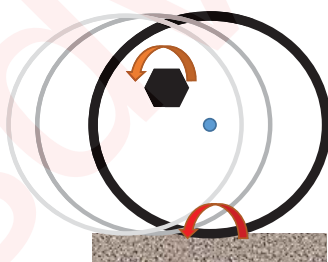
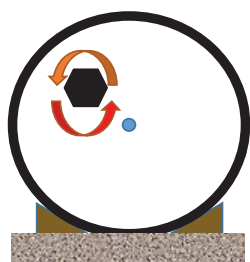
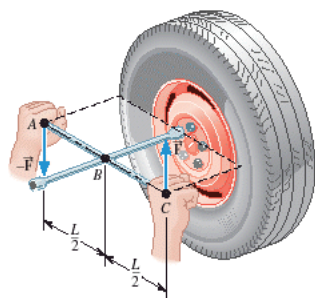
- نقطه اثر بردار گشتاور کوپل آزاد است.
- امکان دوران حول هر مرکزی وجود دارد.
- بردار گشتاور کوپل به هر نقطه‌ای از جسم وارد شود، اثر یکسانی خواهد داشت.



3-51

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

مفهوم و مثال بردار آزاد گشتاور زوج نیرو

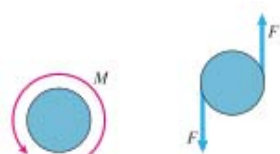
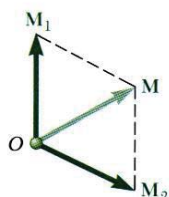


3-52

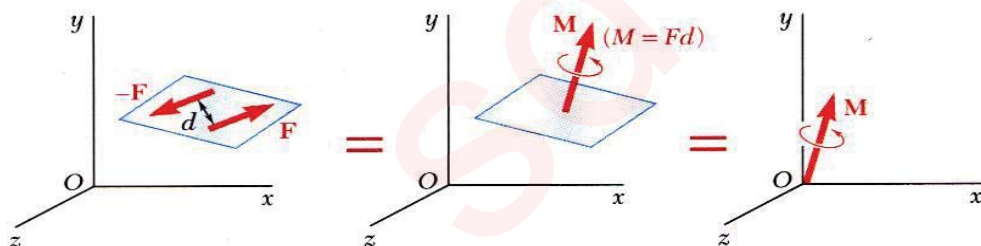
استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

ویژگی بردار گشتاور زوج نیرو یا کوپل

• از جمع بردارها تبعیت می کند.



• زوج نیرو را می توان با بردار گشتاوری که مقدار و خط اثر و جهت اثرش با بردار گشتاور زوج نیرو یکسان باشد، جایگزین کرد.

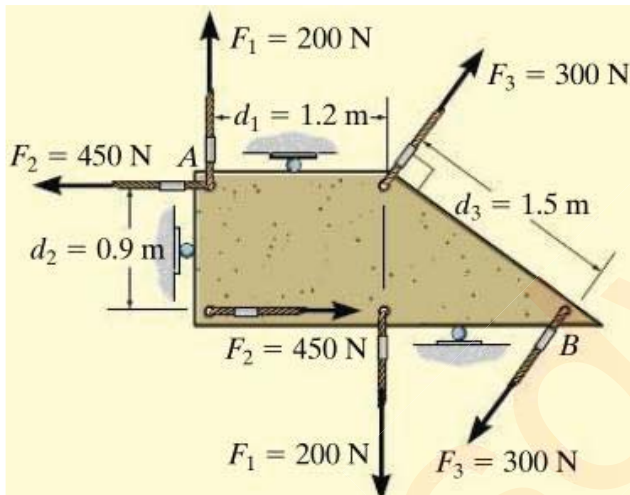


3-53

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

مثال برابند گشتاور کوپل

برایند گشتاور کوپل ناشی از سه زوج نیروی وارد بر صفحه شکل را بیابید.



$$\begin{aligned}\sum M &= -F_1 d_1 + F_2 d_2 - F_3 d_3 \\ &= -200(1.2) + 450(0.9) - 300(1.5) \\ &= -285 \text{ Nm} \approx\end{aligned}$$

زوج نیروهای برابر

دو زوج نیرو که گشتاور یکسانی داشته باشند، با یکدیگر برابرند.

$$M = F_1 d_1 = F_2 d_2$$

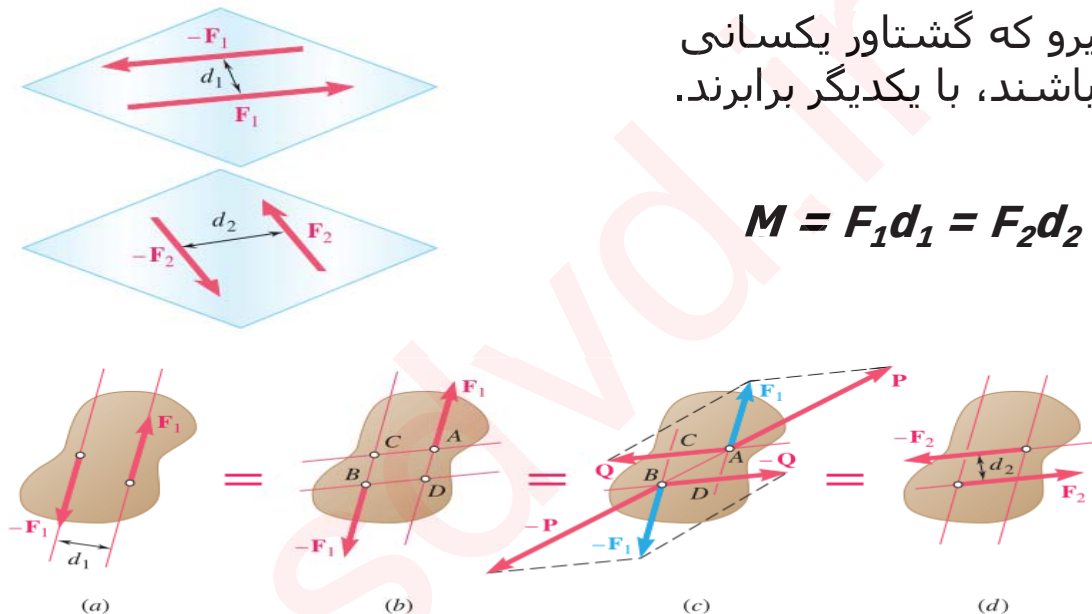
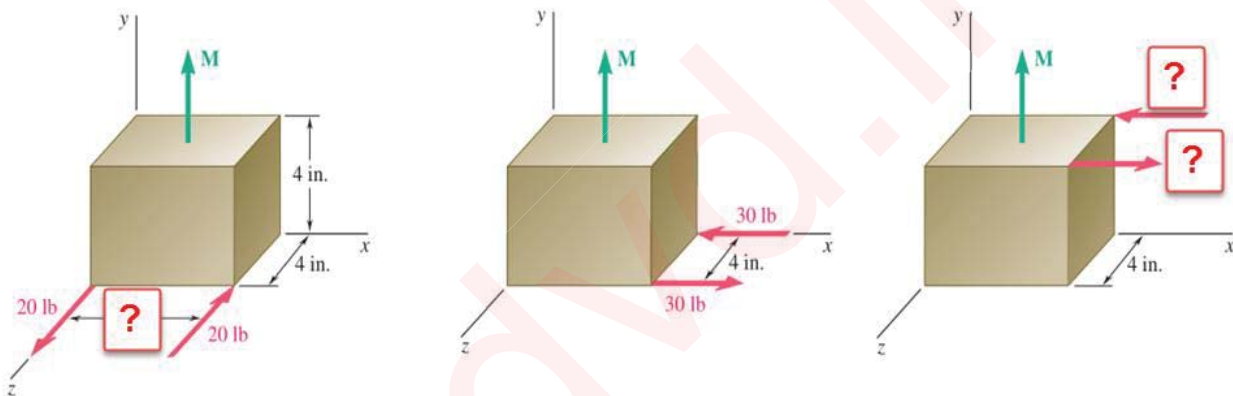


Fig. 3.30 Four steps in transforming one couple to another couple in the same plane by using simple operations. (a) Starting couple; (b) label points of intersection of lines of action of the two couples; (c) resolve forces from first couple into components; (d) final couple.

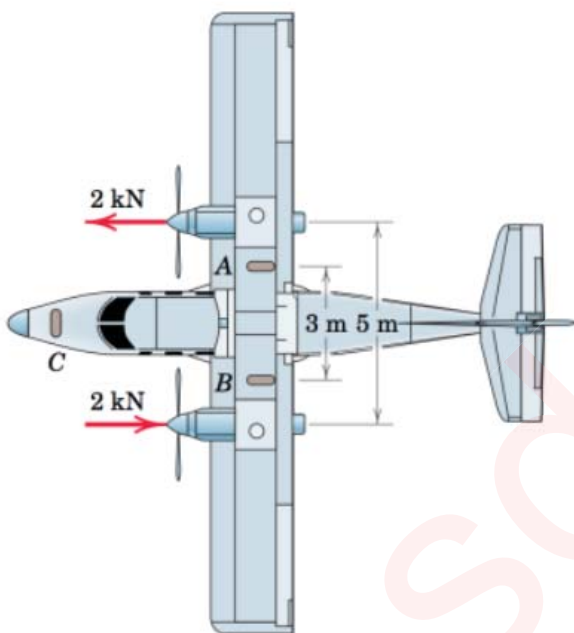
مثال زوج نیرو برابر



3-56

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

مثال کوپل معادل هواپیما



نیروی وارد به هواپیمایی توسط دو موتور آن برای دور زدن مطابق شکل است. مطلوبست نیروی F_b لازم که باید توسط ترمزها به چرخهای A و B وارد شود تا مانع دور زدن هواپیما شود. از اثر چرخ دماغه C که 90° چرخیده و بدون ترمز است صرفنظر کنید.

$$M = F d = 2 (5) = 10 \text{ kNm}$$

$$M' = F_b d'_{AB} = F_b (3) = 3 F_b \text{ kNm}$$

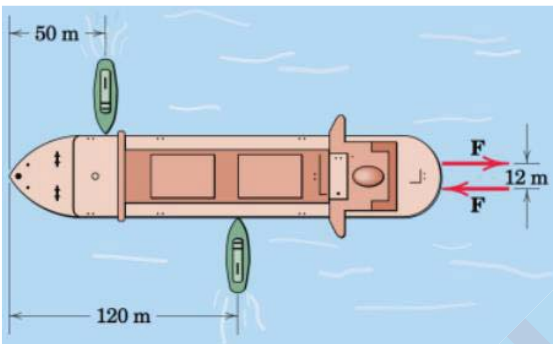
$$M = M' \rightarrow 3 F_b = 10$$

$$F_b = 3.3 \text{ kN}$$

3-57

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

مثال کوپل معادل کشتی



هر یک از دو پروانه کشتی‌ای 300 kN نیرو وارد می‌کنند. در یک مانور، یکی از پروانه‌ها نیرو به جلو و دیگری نیرو به عقب وارد می‌کنند. نیروی P وارد از طرف هر یک از یدک‌کش‌ها چقدر باشد تا اثر پروانه‌های کشتی را خنثی کند؟

$$M = F d = 300 (12) = 3600 \text{ kNm}$$

$$M' = P d' = P (120 - 50) = 70 P \text{ kNm}$$

$$M = M' \longrightarrow 70 P = 3600$$

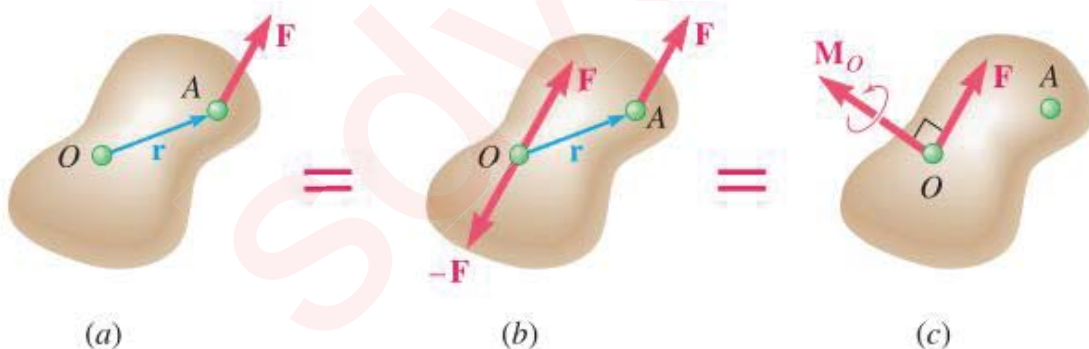
$$P = 51.4 \text{ kN}$$

انتقال نقطه اثر یک نیرو به یک نقطه دیگر

بردار نیروی $\mathbf{F}$ بدون تغییر به نقطه O منتقل می‌شود. برای حفظ شرایط تعادل، گشتاور نیروی $\mathbf{F}$ حول نقطه O به جسم وارد شود.

$$\vec{M}_O^F = \vec{r} \times \vec{F}$$

نتیجه یک «سیستم نیرو-کوپل» (Force-Couple System) است.



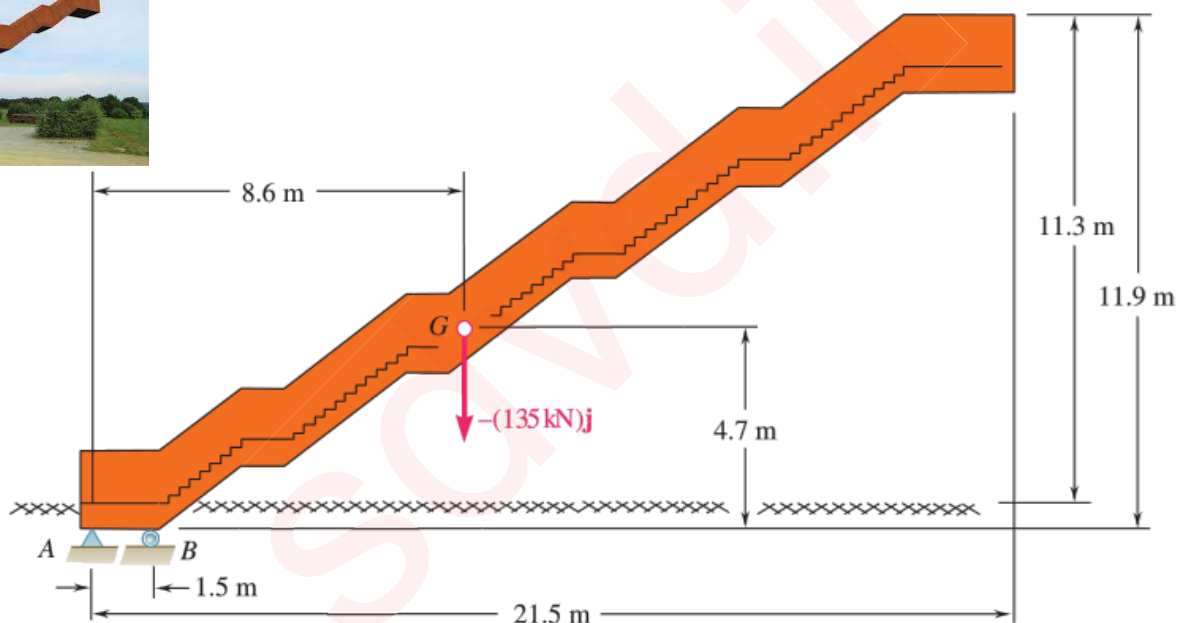
مثال انتقال Vlooyberg Tower, Belgium



3-60

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

مثال انتقال Vlooyberg Tower, Belgium

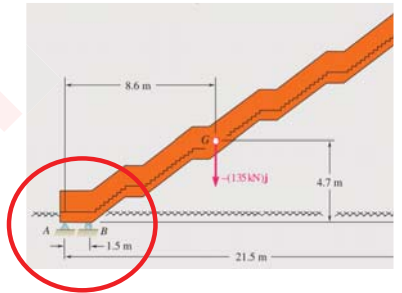
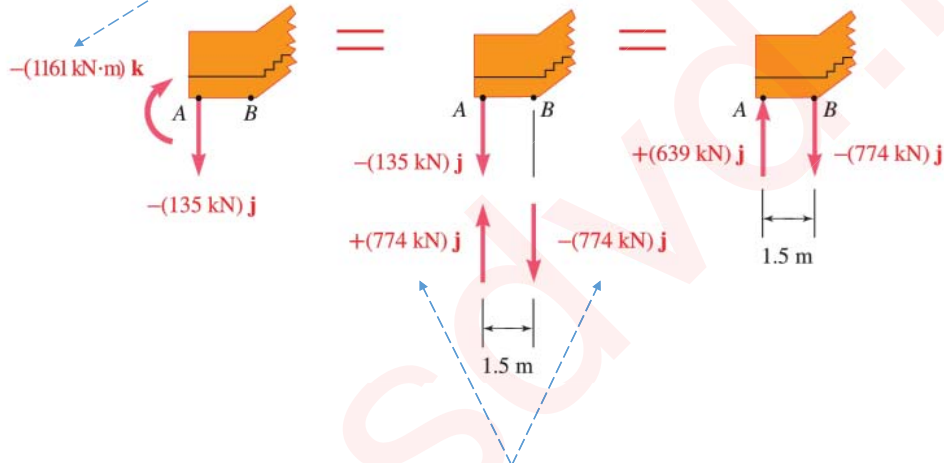


3-61

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

مثال انتقال Vlooyberg Tower, Belgium

$$\mathbf{M}_A = \overrightarrow{AG} \times \mathbf{F} = [(8.6 \text{ m})\mathbf{i} + (4.7 \text{ m})\mathbf{j}] \times (-135 \text{ kN})\mathbf{j} \\ = -(1161 \text{ kN} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$

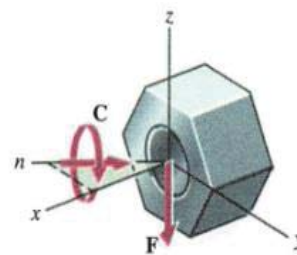
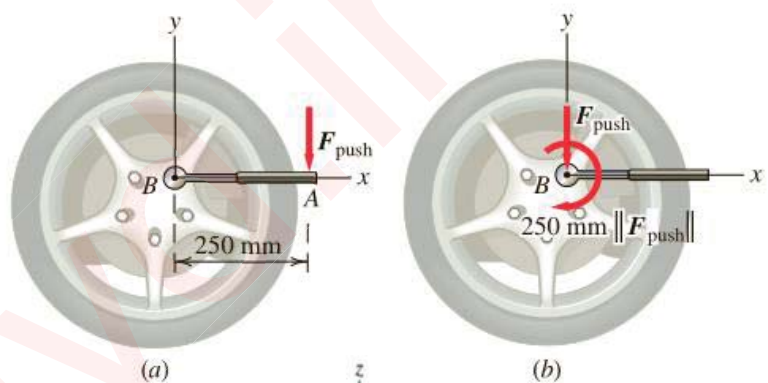


$$F = \frac{M_A}{d} = \frac{1161 \text{ kN} \cdot \text{m}}{1.5 \text{ m}} = 774 \text{ kN}$$

3-62

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

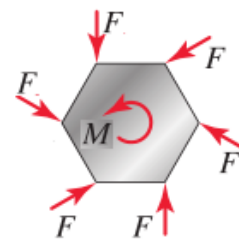
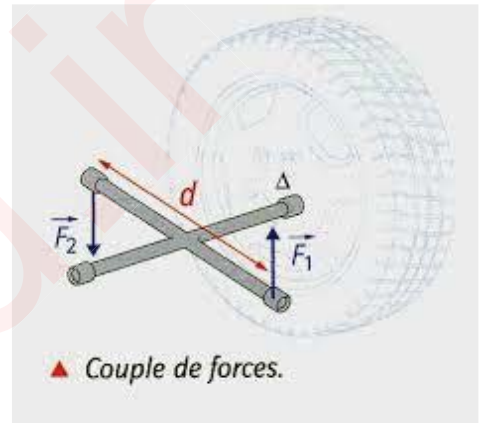
بررسی: تفاوت آچار معمولی و آچار چرخ



3-63

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

بررسی: تفاوت آچار معمولی و آچار چرخ



3-64

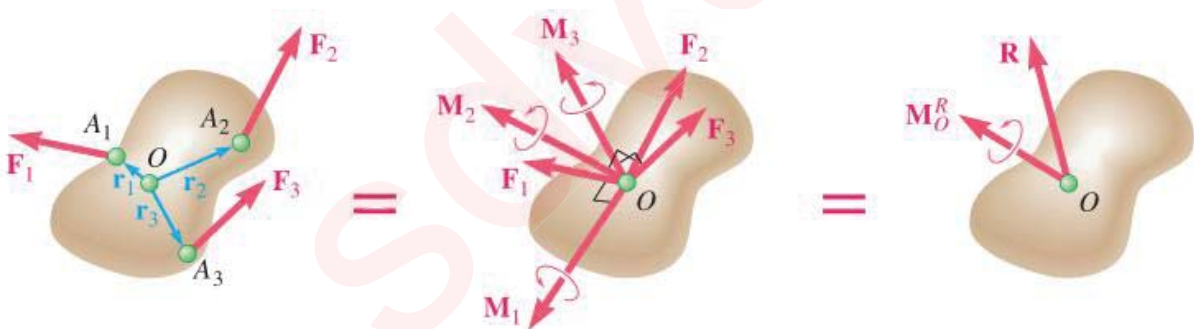
استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

ساده‌سازی سیستم‌های نیرویی (سیستم معادل نیرو-کوپل)

$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$

$$\vec{M}_O^R = \sum \vec{M}_O = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

هر تعداد نیرویی که به یک جسم صلب اثر کند را می‌توان با یک «سیستم معادل نیرو-کوپل» شامل فقط یک نیرو ($\vec{R}$) و یک کوپل ($\vec{M}$) جایگزین کرد.



3-65

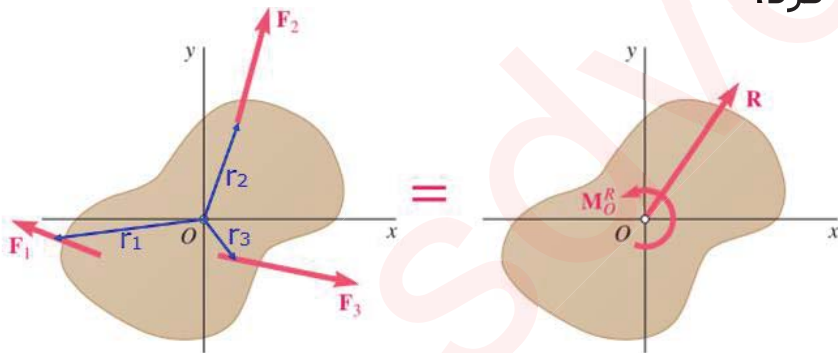
استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

ساده‌سازی سیستم‌های نیرویی (2D)

$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$

$$\vec{M}_O^R = \sum \vec{M}_O = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

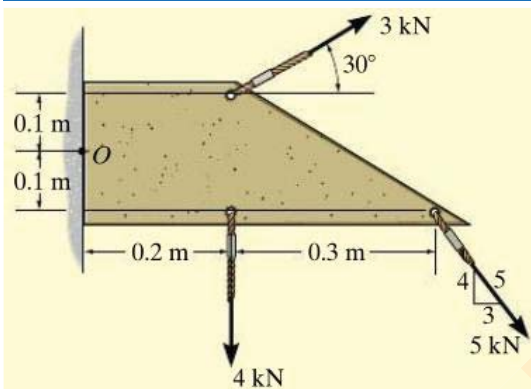
هر تعداد نیروی واقع در یک صفحه (2D) را که به یک جسم صلب اثر کند، می‌توان با یک «سیستم معادل نیرو-کوپل» شامل فقط یک نیرو ($\vec{R}$) و یک کوپل ($\vec{M}$)، که کوپل بر نیرو عمود است، جایگزین کرد.



3-66

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

مثال سیستم معادل نیرو-کوپل

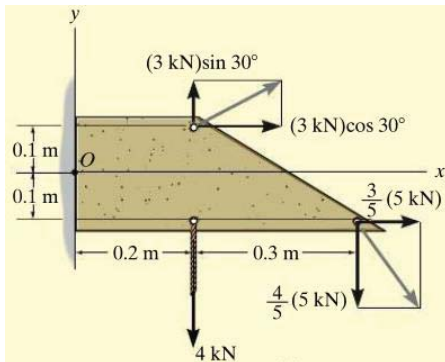


- نیروهای وارد مطابق شکل را با یک سیستم معادل نیرو-کوپل در نقطه O جایگزین کنید.

3-67

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

مثال سیستم معادل نیرو-کوپل



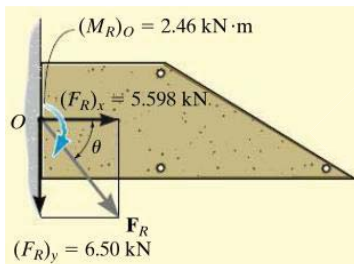
$$R_x = \sum F_x = 3 \cos 30 + \frac{3}{5} * 5 = 5.60 \text{ kN}$$

$$R_y = \sum F_y = 3 \sin 30 - \frac{4}{5} * 5 - 4 = -6.50 \text{ kN}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{5.60^2 + 6.50^2} = 8.58 \text{ kN}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{6.50}{5.60} \right| = 49.3^\circ \searrow$$

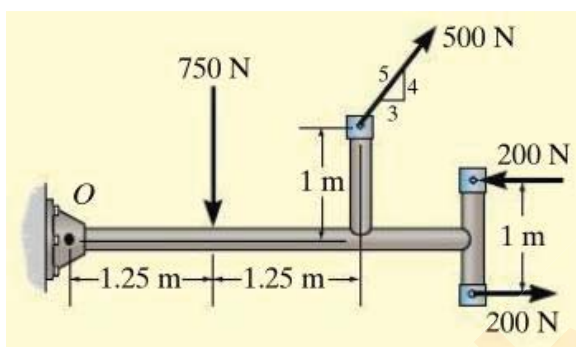
$$M_O = \sum M_O^F = 3 \sin 30(0.2) - 3 \cos 30(0.1) + \frac{3}{5} * 5(0.1) - \frac{4}{5} * 5(0.5) - 4(0.2) = -2.46 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright$$



3-68

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

مثال سیستم معادل نیرو-کوپل لوله

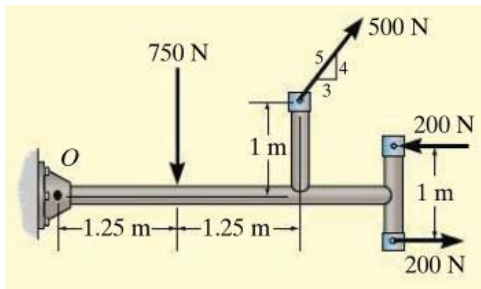


نیرو و کوپل شکل مقابل را با یک سیستم نیرو-کوپل معادل در نقطه O جایگزین کنید.

3-69

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

مثال سیستم معادل نیرو-کوپل لوله



$$R_x = \sum F_x = \frac{3}{5} * 500 - 200 + 200 = 300 \text{ N}$$

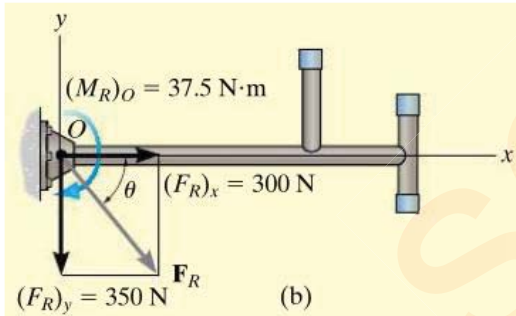
$$R_y = \sum F_y = -750 + 500 * \frac{4}{5} = -350 \text{ N}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{300^2 + 350^2} = 461 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{R_y}{R_x} \right| = \tan^{-1} \left| \frac{350}{300} \right| = 49.4^\circ \searrow$$

$$M_O = \sum M_O^F + \sum M$$

$$= -750(1.25) + 500 * \frac{4}{5} (2.5) - 500 * \frac{3}{5} (1) + 200(1) = -37.5 \text{ Nm} \sim$$



3-70

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

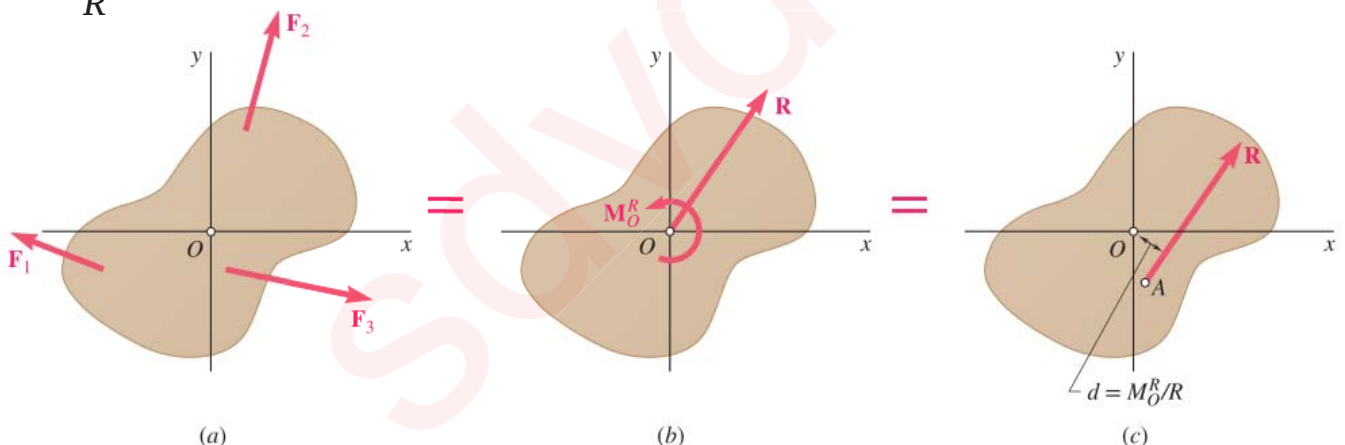
ساده سازی بیشتر سیستم های نیرویی (2D)

$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$

$$\vec{M}_O^R = \sum \vec{M}_O = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

$$d = \frac{M_O^R}{R}$$

هر تعداد نیروی واقع در یک صفحه (2D) را که به یک جسم صلب اثر کند، می توان فقط با یک تک نیرو ($\vec{R}$) که خط اثر منحصر به فردی دارد، جایگزین کرد.



3-71

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

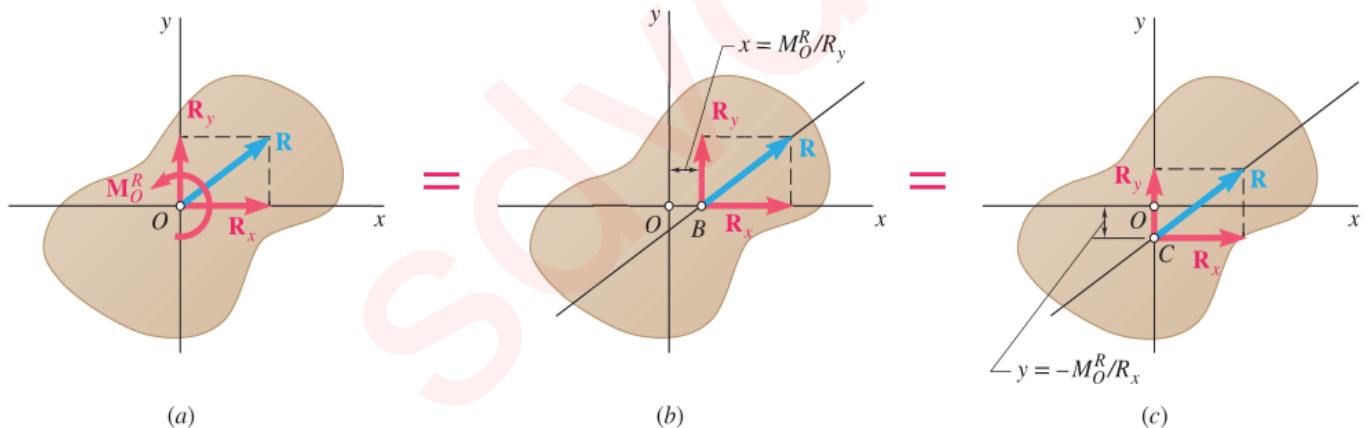
ساده‌سازی بیشتر سیستم‌های نیرویی (2D)

$$R_x = \sum F_x \quad R_y = \sum F_y$$

$$M_z^R = M_O^R = \sum M_O$$

$$x = \frac{M_O^R}{R_y} \quad y = \frac{M_O^R}{R_x}$$

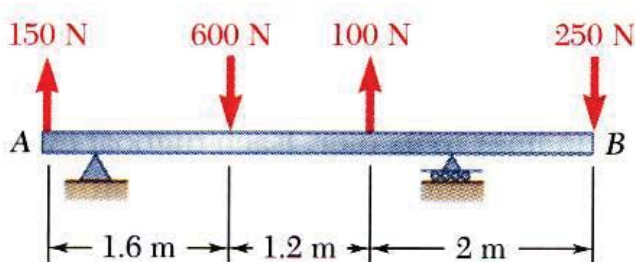
هر تعداد نیروی واقع در یک صفحه (2D) را که به یک جسم صلب اثر کند، می‌توان فقط با یک تک نیرو ($\mathbf{R}$) که خط اثر منحصر به فردی دارد، جایگزین کرد.



3-72

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

مثال سیستم معادل نیرو-کوپل تیر 2D



در تیر شکل، با صرف‌نظر از نیروهای تکیه‌گاهی، نیروهای نشان داده شده را به

(الف) سیستم معادل نیرو-کوپل در نقطه A

(ب) سیستم معادل نیرو-کوپل در نقطه B

(ج) یک تک نیروی معادل

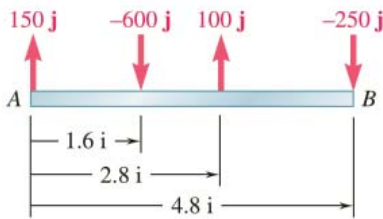
تبدیل کنید.

3-73

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

مثال سیستم معادل نیرو-کوپل تیر 2D

الف) سیستم معادل نیرو-کوپل در نقطه A



$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$

$$= (150 \text{ N})\vec{j} - (600 \text{ N})\vec{j} + (100 \text{ N})\vec{j} - (250 \text{ N})\vec{j}$$

$$\vec{R} = -(600 \text{ N})\vec{j}$$

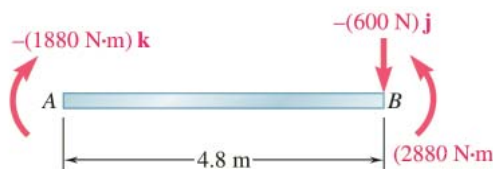
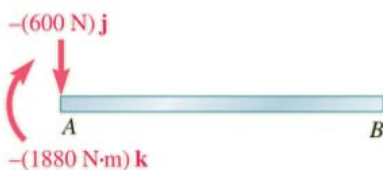
$$\vec{M}_A^R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

$$= (1.6\vec{i}) \times (-600\vec{j}) + (2.8\vec{i}) \times (100\vec{j}) + (4.8\vec{i}) \times (-250\vec{j})$$

$$\vec{M}_A^R = -(1880 \text{ N}\cdot\text{m})\vec{k}$$

مثال سیستم معادل نیرو-کوپل تیر 2D

ب) سیستم معادل نیرو-کوپل در نقطه B



$$\vec{R} = -(600 \text{ N})\vec{j}$$

$$\vec{M}_B^R = \vec{M}_A^R + \vec{r}_{B/A} \times \vec{R}$$

$$= -(1880 \text{ N}\cdot\text{m})\vec{k} + (-4.8\text{ m})\vec{i} \times (-600 \text{ N})\vec{j}$$

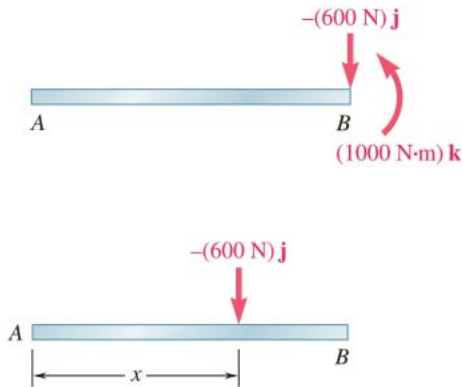
$$= -(1880 \text{ N}\cdot\text{m})\vec{k} + (2880 \text{ N}\cdot\text{m})\vec{k}$$

$$\vec{M}_B^R = +(1000 \text{ N}\cdot\text{m})\vec{k}$$



مثال سیستم معادل نیرو-کوپل تیر 2D

(ج) یک نیروی معادل



$$\vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_A^R$$

$$x\vec{i} \times (-600)\vec{j} = -1880\vec{k}$$

$$-x(600)\vec{k} = -1880\vec{k}$$

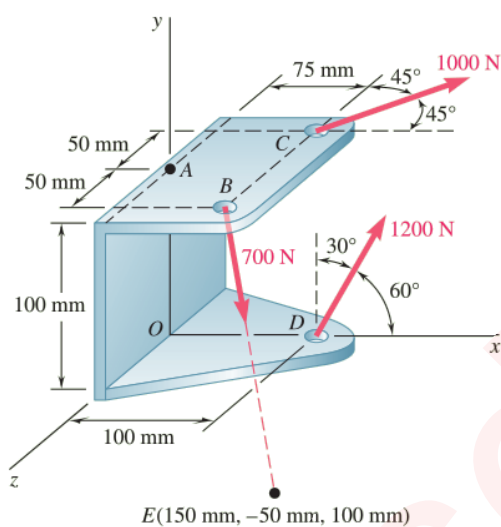
$$x = 3.13 \text{ m}$$

$$R = 600 \text{ N } \downarrow, \quad x = 3.13 \text{ m}$$

3-76

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

مثال سیستم معادل نیرو-کوپل پایه 3D

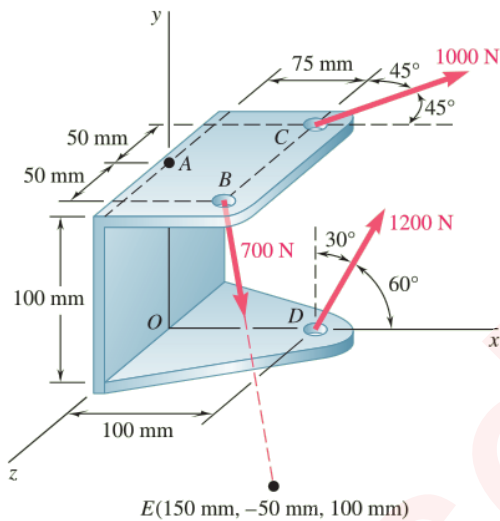


سه کابل مطابق شکل به پایه شکل متصل شده‌اند. نیروهای وارد شده توسط کابل‌ها را با یک سیستم معادل نیرو-کوپل در نقطه A جایگزین کنید.

3-77

استاتیک | شهاب داودی | www.sdvd.ir | davoudi@gmail.com

مثال سیستم معادل نیرو-کوپل پایه 3D



$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_{B/A} = 0.075\vec{i} + 0.050\vec{k} \text{ (m)}$$

$$\vec{r}_{AC} = \vec{r}_{C/A} = 0.075\vec{i} - 0.050\vec{k} \text{ (m)}$$

$$\vec{r}_{AD} = \vec{r}_{D/A} = 0.100\vec{i} - 0.100\vec{j} \text{ (m)}$$

$$\vec{F}_B = (700 \text{ N}) \vec{\lambda}_{BE}$$

$$\vec{\lambda} = \frac{\vec{r}_{BE}}{r_{BE}} = \frac{75\vec{i} - 150\vec{j} + 50\vec{k}}{175}$$

$$= 0.429\vec{i} - 0.857\vec{j} + 0.289\vec{k}$$

$$\vec{F}_B = 300\vec{i} - 600\vec{j} + 200\vec{k} \text{ (N)}$$

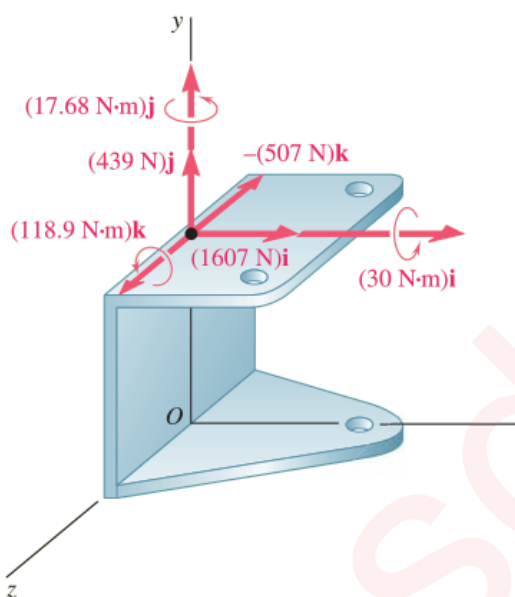
$$\begin{aligned} \vec{F}_C &= (1000 \text{ N})(\cos 45^\circ \vec{i} - \cos 45^\circ \vec{k}) \\ &= 707\vec{i} - 707\vec{k} \text{ (N)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_D &= (1200 \text{ N})(\cos 60^\circ \vec{i} + \cos 30^\circ \vec{j}) \\ &= 600\vec{i} + 1039\vec{j} \text{ (N)} \end{aligned}$$

3-78

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

مثال سیستم معادل نیرو-کوپل پایه 3D



$$\vec{F}_B = 300\vec{i} - 600\vec{j} + 200\vec{k} \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_C = 707\vec{i} - 707\vec{k} \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_D = 600\vec{i} + 1039\vec{j} \text{ (N)}$$

$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$

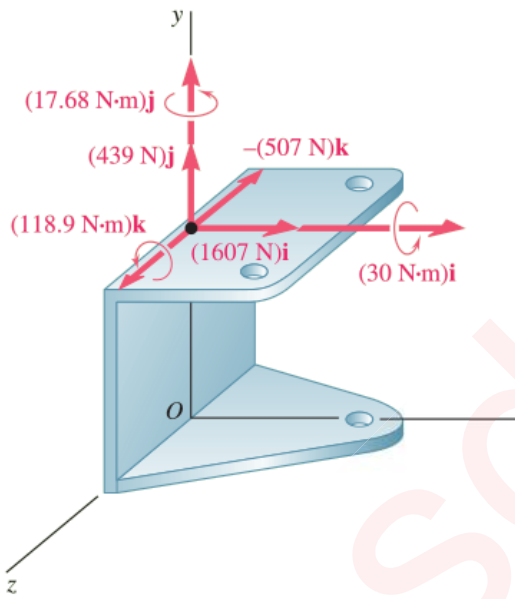
$$\begin{aligned} &= (300 + 707 + 600)\vec{i} \\ &\quad + (-600 + 1039)\vec{j} \\ &\quad + (200 - 707)\vec{k} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{R} = 1607\vec{i} + 439\vec{j} - 507\vec{k} \text{ (N)}}$$

3-79

استاتیک | شهاب داودی | davoudi@gmail.com | www.sdvd.ir

مثال سیستم معادل نیرو-کوپل پایه 3D



$$\vec{M}_A^R = \sum (\vec{r} \times \vec{F})$$

$$\vec{r}_{B/A} \times \vec{F}_B = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\vec{i} - 45\vec{k}$$

$$\vec{r}_{C/A} \times \vec{F}_C = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17.68\vec{j}$$

$$\vec{r}_{D/A} \times \vec{F}_D = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.100 & -0.100 & 0 \\ 600 & 1039 & 0 \end{vmatrix} = 163.9\vec{k}$$

$$\vec{M}_A^R = 30\vec{i} + 17.68\vec{j} + 118.9\vec{k}$$