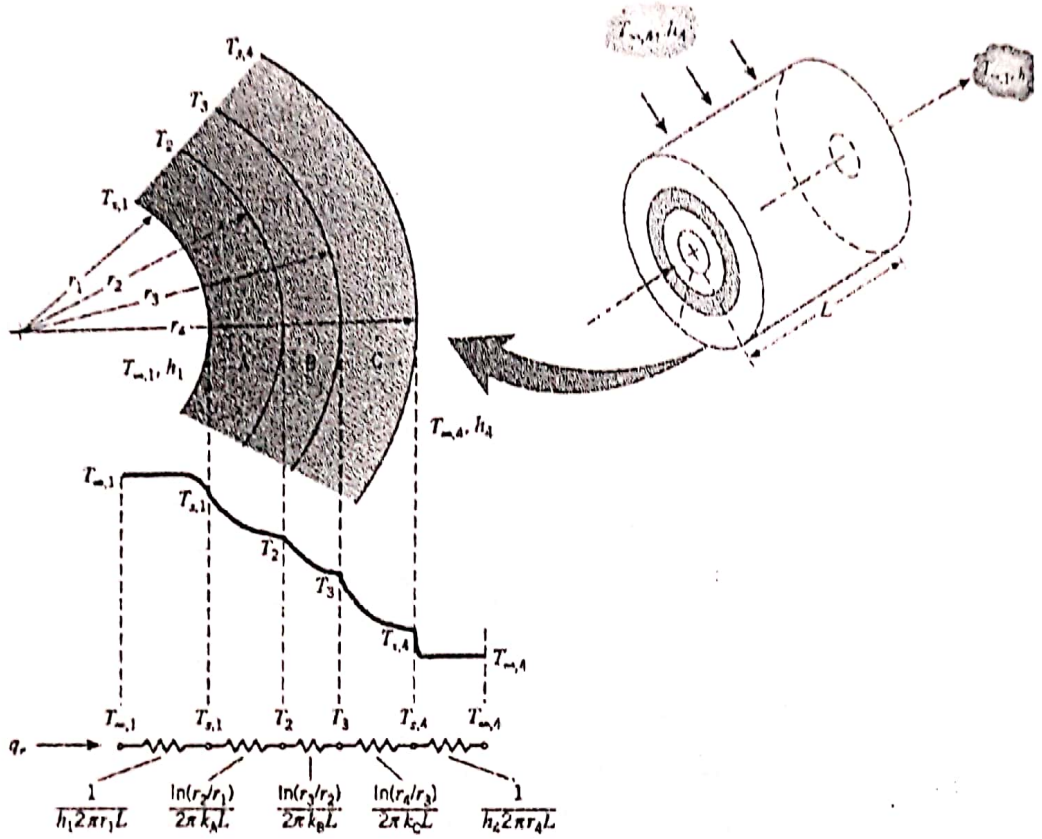


شکل ۳-۷ توزیع دما برای یک دیوار استوانه‌ای مرکب.

اکنون سیستم مرکب شکل ۳-۷ را در نظر بگیرید. به پیروی از روش دیوار تخت مرکب و با چشم‌پوشی از مقاومت‌های گرمایی سطح تماس، نرخ انتقال گرما به صورت زیر درمی‌آید.

$$q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\frac{1}{2\pi r_1 L h_1} + \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi k_A L} + \frac{\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)}{2\pi k_B L} + \frac{\ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right)}{2\pi k_C L} + \frac{1}{2\pi r_4 L h_4}} \qquad (۲۹-۳)$$

نتیجهٔ حاصله را می‌توان برحسب ضریب انتقال گرمای کلی بیان کرد. یعنی،

$$q_r = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{R_{tot}} = UA\,(T_{\infty,1} - T_{\infty,4}) \qquad (۳۰-۳)$$

اگر U برحسب مساحت سطح درونی، $A_1 = 2\pi r_1 L$، تعریف شود، از ترکیب معادله‌های (۳-۲۹) و (۳-۳۰) نتیجه می‌شود.

$$U_1 = \frac{1}{\frac{1}{h_1} + \frac{r_1}{k_A}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_1}{k_B}\ln\frac{r_3}{r_2} + \frac{r_1}{k_C}\ln\frac{r_4}{r_3} + \frac{r_1}{r_4}\cdot\frac{1}{h_4}} \qquad (۳۱-۳)$$

این تعریف یک تعریف دلخواه است، و ضریب کلی را می‌توان برحسب A_4 یا هر سطح میانی

Scanned with CamScanner

بیان کرد. توجه داشته باشید که

$$U_1A_1 = U_2A_2 = U_3A_3 = U_4A_4 = (\sum R_t)^{-1} \qquad (۳۲-۳)$$

شکل‌های خاص U_2 ، U_3 و U_4 را می‌توان از معادله‌های (۳-۲۹) و (۳-۳۰) به دست آورد.

مثال ۳-۴

به علت اثرهای متقابل افزایش ضخامت عایق بر مقاومت‌های گرمایی، به نظر می‌رسد که در سیستم‌های شعاعی یک ضخامت بهینه وجود داشته باشد. هر چند با افزایش ضخامت عایق مقاومت رسانایی زیاد می‌شود، ولی به علت افزایش مساحت سطح بیرونی از مقاومت جابه‌جایی کاسته می‌شود. بنابراین ممکن است ضخامتی از عایق وجود داشته باشد که به ازای آن مقاومت گرمایی کل حداکثر و نرخ گرمای هدر رفته حداقل باشد. با در نظر گرفتن سیستم زیر این موضوع را بررسی کنید.

۱- یک لولهٔ مسی جدار نازک به شعاع r_i برای انتقال سیال مبرد در دمای پایین، T_i ، که کمتر از دمای هوای محیط T_∞ است استفاده شده است. آیا ضخامت بهینه‌ای برای عایق وجود دارد؟

۲- با محاسبهٔ مقاومت گرمایی کل بر واحد طول لوله‌ای به قطر ۱۰ mm و عایقهایی به ضخامت ۰ ، ۲ ، ۵ ، ۱۰ ، ۲۰ و ۴۰ میلی‌متر نتیجهٔ بالا را تایید کنید. عایق از شیشهٔ مشبک ساخته شده و ضریب جابه‌جایی سطح بیرونی $5\ W/m^2.K$ است.

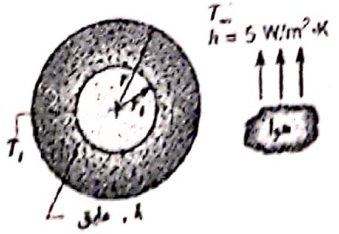
حل:

داده: یک لولهٔ مسی جدار نازک به شعاع r_i و دمای T_i عایق‌بندی شده است.

خواسته:

۱- آیا ضخامت بهینه‌ای برای عایق وجود دارد که نرخ انتقال گرما را به کمترین مقدار خود برساند؟

۲- مقاومت گرمایی عایق شیشه‌ای مشبک با ضخامت متغیر.



فرض‌ها:

۱- شرایط دایم است.

۲- انتقال گرما در جهت شعاعی (استوانه‌ای) یک بعدی است.

۳- از مقاومت گرمایی دیوار لوله چشم‌پوشی می‌شود.

۴- خواص عایق ثابت است.

۵- از تبادل تابش بین سطح بیرونی عایق و محیط چشم‌پوشی می‌شود.

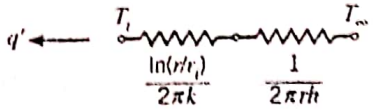
Scanned with CamScanner

خواص: از جدول الف-۳ برای شیشه مشبک (با فرض دمای ۲۸۵ K):

$k = ۰/۰۵۵ \ W/m.K$

تحلیل:

۱- عمده‌ترین مقاومت در مقابل انتقال گرما بین مبرد و هوا رسانایی در عایق و جابه‌جایی در هواست. بنابراین مدار گرمایی به صورت زیر است.



که در آن مقاومت‌های رسانایی و جابه جایی بر واحد طول به ترتیب از معادله‌های (۳-۲۸) و (۳-۹) به دست می‌آیند. مقاومت گرمایی کل بر واحد طول لوله عبارت است از

$$R'_{tot} = \frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{۲\pi k} + \frac{۱}{۲\pi r h}$$

که در آن نرخ انتقال گرما بر واحد طول لوله برابر است با:

$$q' = \frac{T_\infty - T_i}{R'_{tot}}$$

ضخامت بهینهٔ عایق هنگامی به دست می‌آید که q' نسبت به r کمترین و R'_{tot} نسبت به r بیشترین مقدار را داشته باشد. این مقدار با رعایت شرط زیر به دست می‌آید.

$$\frac{dR'_{tot}}{dr} = ۰$$

بنابراین

$$\frac{۱}{۲\pi k r} - \frac{۱}{۲\pi r^۲ h} = ۰$$

یا

$$r = \frac{k}{h}$$

برای تعیین این‌که نتیجهٔ حاصله مقاومت کل را بیشترین یا کمترین مقدار می‌کند. باید مشتق دوم را محاسبه کرد. داریم

$$\frac{d^۲R'_{tot}}{dr^۲} = -\frac{۱}{۲\pi k r^۲} + \frac{۱}{\pi r^۳ h}$$

یا در $r=k/h$:

$$\frac{d^۲R'_{tot}}{dr^۲} = \frac{۱}{\pi\left(\frac{k}{h}\right)^۲}\left(\frac{۱}{k} - \frac{۱}{۲k}\right) = \frac{۱}{\frac{۲\pi k^۳}{h^۲}} > ۰$$

چون این نتیجه همواره مثبت است، لذا $r=k/h$ شعاع عایقی است که مقاومت کل را به کمترین

مقدار، نه بیشترین مقدار، می‌رساند. بنابراین، ضخامت بهینهٔ عایق وجود ندارد. با استفاده از نتیجهٔ بالا بهتر است شعاع بحرانی عایق[1] به صورت

$$r_{cr} \equiv \frac{k}{h}$$

تعریف شود که اگر شعاع عایق از این مقدار کمتر باشد، با افزایش r، q' افزایش یافته و اگر بیشتر از این مقدار باشد با افزایش r، q' کاهش می‌یابد.

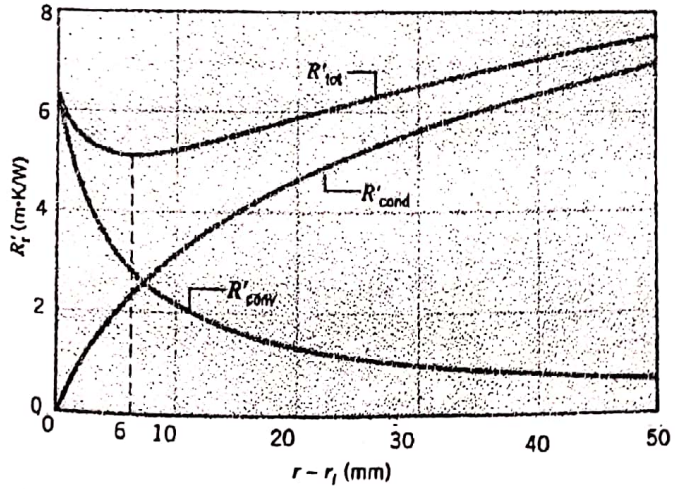
۲- با $h=۵\ W/m^{۲}.K$ و $k=۰/۰۵۵\ W/m.K$، شعاع بحرانی به صورت زیر در می‌آید

$$r_{cr}=\frac{۰/۰۵۵ W/m.K}{۵ W/m^{۲}.K}=۰/۰۱۱\ m$$

بنابراین $r_{cr}>r_i$ بوده و انتقال گرما با افزایش ضخامت عایق تا مقدار

$$r_{cr}-r_i=(۰/۰۱۱-۰/۰۰۵)m=۰/۰۰۶\ m$$

افزایش می‌یابد. مقاومت‌های گرمایی مربوط به ضخامتهای داده شده عایق محاسبه شد و در شکل زیر آمده است.



توضیح:

۱- اثر شعاع بحرانی با این حقیقت روشن می‌شود که حتی با عایق ۲۰ mm، مقاومت کل از وقتی که عایق وجود ندارد کمتر است.

۲- اگر مانند این مسأله $r_i<r_{cr}$ باشد، با افزودن عایق، مقاومت کل کم شده و نرخ انتقال گرما افزایش می‌یابد. این روند تا آنجا ادامه دارد که شعاع خارجی عایق به شعاع بحرانی برسد. این روند برای جریان برق در یک سیم مطلوب است، چون افزودن عایق الکتریکی در انتقال گرمای تولید شده در سیم به محیط کمک خواهد کرد. اما، اگر $r_i>r_{cr}$ باشد، افزودن عایق باعث افزایش مقاومت کل و کاهش اتلاف گرما خواهد شد. این رفتار برای جریان بخار در لوله مطلوب است، که در آن افزودن عایق باعث کاهش اتلاف گرما به محیط می‌شود.

۳- مسأله کاهش مقاومت کل با استفاده از عایق در سیستم‌های شعاعی فقط برای سیمها یا

۱- Critical Insulation Radius

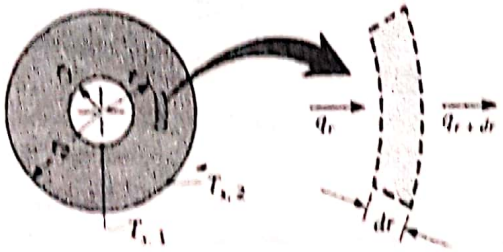
Scanned with CamScanner

لوله‌های با قطر کوچک و ضریب جابه‌جایی کم، یعنی هنگامی که $r_{cr}>r_i$ باشد، مطرح است. برای عایقی با ضریب رسانایی ($k=0/03\ W/m.K$) و جابه‌جایی آزاد در هوا ($h=10\ W/m^2.K$) خواهیم داشت $r_{cr}=(k/h)=0/003\ m$. برای چنین مقدار کوچکی معمولاً $r_i>r_{cr}$ است و نیازی به بررسی اثرهای شعاع بحرانی نیست.

۲- شعاع بحرانی هنگامی وجود دارد که سطح مقطع جریان درجهت انتقال گرما تغییر کند، مانند رسانایی شعاعی در یک استوانه (یا در یک کره). در یک دیوار تخت که سطح عمود بر جهت انتقال گرما ثابت است، ضخامت بحرانی عایق وجود ندارد (مقاومت کل همواره با افزایش ضخامت عایق زیاد می‌شود).

۳-۳-۲ کره

اکنون روش دیگری را برای تجزیه و تحلیل رسانایی در یک کرهٔ توخالی شکل ۳-۸ به کار می‌بریم. موازنهٔ انرژی در شرایط دایم، یک بعدی و بدون تولید گرما برای حجم کنترل دیفرانسیلی شکل ۳-۸ به صورت $q_r=q_{r+dr}$ است. شکل مناسب قانون فوریه به صورت زیر است.



شکل ۳-۸ رسانایی در پوستهٔ کروی

$$q_r = -kA\frac{dT}{dr} = -k(4\pi r^2)\frac{dT}{dr} \qquad (۳۳-۳)$$

که در آن $A=4\pi r^2$ سطح عمود بر جهت انتقال گرماست.

با توجه به این‌که q_r ثابت و مستقل از r است، معادلهٔ (۳-۳۳) را می‌توان به شکل انتگرال بیان کرد.

$$\frac{q_r}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -\int_{T_{s,1}}^{T_{s,2}} k(T)\,dT \qquad (۳۴-۳)$$

با فرض ثابت بودن k، خواهیم داشت:

$$q_r = \frac{4\pi k\,(T_{s,1}-T_{s,2})}{\left(\frac{1}{r_1}\right)-\left(\frac{1}{r_2}\right)} \qquad (۳۵-۳)$$

به خاطر داشته باشید که مقاومت گرمایی به صورت نسبت اختلاف دما به نرخ انتقال گرما تعریف شده در نتیجه

$$R_{t,cond} = \frac{1}{4\pi k}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right) \qquad (۳۶-۳)$$

Scanned with CamScanner

توجه کنید که توزیع دما و معادله‌های (۳-۳۵) و (۳-۳۶) را می‌توان با استفاده از روش استاندارد که با شکل مناسب معادلهٔ گرما شروع می‌شود، به دست آورد. کره‌های مرکب را می‌توان به روشی شبیه به دیوارها و استوانه‌های مرکب بررسی کرد و از آن می‌توان شکل‌های مناسب مقاومت کل و ضریب انتقال گرمای کلی را به دست آورد.

مثال ۳-۵

از یک مخزن فلزی کروی و جدار نازک برای نگه‌داری نیتروژن مایع در دمای ۷۷ K استفاده شده است. قطر مخزن ۰/۵ m بوده و با عایقی انعکاسی و خالی از هوا متشکل از پودر سیلیکا پوشیده شده است. ضخامت عایق ۲۵ mm بوده و سطح بیرونی آن در معرض هوای محیط به دمای ۳۰۰ K و ضریب جابه‌جایی ۲۰ $W/m^2.K$ قرار دارد. گرمای نهان تبخیر و چگالی نیتروژن مایع به ترتیب 2×10^5 J/kg و ۸۰۴ kg/m^3 است.

۱- نرخ انتقال گرما به نیتروژن مایع چقدر است؟

۲- نرخ تبخیر مایع چقدر است؟

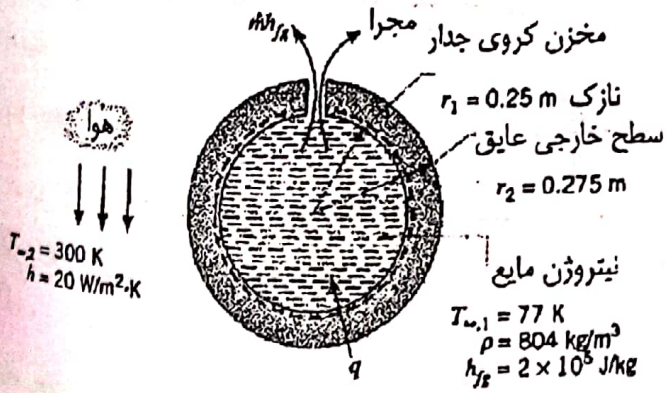
حل:

داده: نیتروژن مایع ذخیره شده که از عایق پوشیده شده و در معرض هوای اطراف قرار دارد.

خواسته:

۱- نرخ انتقال گرما به نیتروژن.

۲- نرخ جرمی تبخیر نیتروژن.



فرض‌ها:

۱- شرایط دایم است.

۲- انتقال گرما در جهت شعاعی یک بعدی است.

۳- مقاومت گرمایی در مقابل انتقال گرما از دیوارهٔ مخزن و از مخزن به نیتروژن ناچیز است.

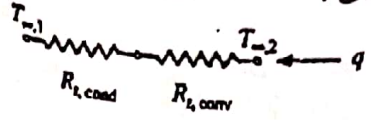
۴- خواص ثابت‌اند.

۵- تبادل تابش بین سطح بیرونی عایق و محیط آن ناچیز است.

خواص: ازجدول الف-۳ پیوست برای پودرسیلیکای خالی‌از هوا(۳۰۰K): $k=0/0017 W/m.K$

تحلیل:

۱- مدار گرمایی از مقاومت‌های رسانایی و جابه‌جایی با اتصال سری تشکیل شده است.



Scanned with CamScanner

با استفاده از معادلهٔ (۳-۳۶) داریم

$$R_{t,cond} = \frac{1}{4\pi k}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

و از معادلهٔ (۳-۹) داریم

$$R_{t,conv} = \frac{1}{4h\pi r_2^2}$$

بنابراین نرخ انتقال گرما به نیتروژن مایع مساوی است با:

$$\frac{T_{\infty,2} - T_{\infty,1}}{\left[\left(\frac{1}{r_1}\right) - \left(\frac{1}{r_2}\right)\right] + \left(\frac{1}{h\,4\pi r_2^2}\right)}$$

در نتیجه

$$\left(\frac{1}{\text{۵m}} - \frac{1}{\text{۰/۲۷۵m}}\right) + \frac{1}{(\text{۲۰ W/m}^2\text{.K})\,4\pi(\text{۰/۲۷۵ m})^2}\Bigg]$$

Scanned with CamScanner

$\dot{m}=۵/۶۴ kg/day$

و یا بر مبنای حجمی

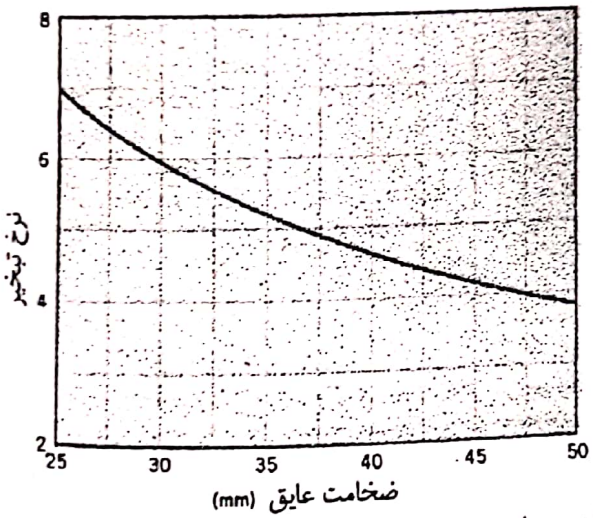
$$\dot{V}=\frac{\dot{m}}{\rho}=\frac{۵/۶۴ kg/day}{۸۰۴ kg/m^۳}=۰/۰۰۷ m^۳/day = ۷ lit/day$$

توضیح:

۱- چون $R_{t,conv} << R_{t,cond}$، بخش عمده مقاومت گرمایی کل ناشی از رسانایی در عایق است. حتی اگر ضریب جابه‌جایی ۱۰ برابر بزرگ‌تر شود و در نتیجه مقاومت جابه‌جایی به همان نسبت کوچک‌تر نشود، اثر آن روی مقدار تبخیر ناچیز است.

۲- نرخ تبخیر روزانه برای مخزنی با گنجایش $۶۵ lit = ۰/۰۶۵ m^۳ = \left(\frac{۴}{۳}\right)\left(\pi r_۱^۳\right)$ برابر است با $(۷ lit \div ۶۵ lit) \times ۱۰۰ = ۱۰/۸\%$ ظرفیت کل مخزن.

۳- با استفاده از مدل بالا، نرخ تبخیر به صورت تابعی از ضخامت عایق $\Delta r=(r_۲-r_۱)$ رسم شده است که در آن $r_۱=۰/۲۵ m$



همان‌طوری که در شکل ملاحظه می‌شود، دو برابر شدن ضخامت عایق از ۲۵ mm به ۵۰ mm نرخ تبخیر را ۴۵٪ کاهش می‌دهد.

۴- از طراح مخزن خواسته شد نرخ تبخیر را از ۷ لیتر در روز به ۴ لیتر در روز کاهش دهد. ضخامت عایق پودر سیلیکا چقدر بایستی باشد تا این منظور تأمین شود؟ انتخاب دیگر استفاده از سیستم عایق خلأ برای کاربرد مادون سرد است. ضریب رسانایی گرمای این سیستم $۰/۰۰۰۱۶ W/m$ و ضخامت آن ۵ میلی‌متر است. نرخ تبخیر روزانه در این حالت چقدر است؟ [جواب‌ها: ۴۷/۵mm و ۳/۱ لیتر در روز].

۳-۴ خلاصهٔ نتایج رسانایی یک بعدی

بیشتر مساله‌های مهم توسط رسانایی یک بعدی، دایم و بدون تولید انرژی گرمایی در دیوارهای تخت، استوانه‌ای یا کروی قابل بررسی هستند. نتایج کلیدی این سه شکل هندسی در جدول ۳-۳ خلاصه شده است که در آن ΔT اختلاف دمای، $T_{s,۱}-T_{s,۲}$، بین سطوح بیرونی و درونی

جدول ۳-۳ جوابهای یک بعدی و دایم معادلهٔ گرما بدون تولید انرژی

	دیوار تخت	دیوار استوانه‌ای	دیوار کروی
معادله گرما	$\frac{d^2T}{dx^2}=0$	$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right)=0$	$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dT}{dr}\right)=0$
توزیع دما	$T_{s,1}-\Delta T\frac{x}{L}$	$T_{s,2}+\Delta T\frac{\ln\left(\frac{r}{r_2}\right)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}$	$T_{s,1}-\Delta T\left[\frac{1-\left(\frac{r_1}{r}\right)}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}\right]$
شار گرما (q'')	$k\frac{\Delta T}{L}$	$\frac{k\Delta T}{r\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$	$\frac{k\Delta T}{r^2\left[\left(\frac{1}{r_1}\right)-\left(\frac{1}{r_2}\right)\right]}$
نرخ گرما	$k\frac{\Delta T}{L}$	$\frac{2\pi Lk\Delta T}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$	$\frac{2\pi k\Delta T}{\left(\frac{1}{r_1}\right)-\left(\frac{1}{r_2}\right)}$
مقاومت گرمایی	$\frac{L}{kA}$	$\frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi Lk}$	$\frac{\left(\frac{1}{r_1}\right)-\left(\frac{1}{r_2}\right)}{4\pi k}$

* شعاعهای بحرانی برای استوانه $r_{cr}=k/h$ و برای کره $r_{cr}=2k/h$ است.

سیستم‌هاست که در شکل‌های ۳-۱، ۳-۶ و ۳-۸ نشان داده شده است. در هر یک از این حالتها، با استفاده از معادله گرما می‌توانید عبارت‌های مربوط به توزیع دما، شار گرما، نرخ گرما و مقاومت گرمایی را به دست آورید.

۳-۵ رسانایی با تولید انرژی گرمایی

در فصل قبل، آن دسته از مسأله‌های رسانایی بررسی شد که در آنها توزیع دما در یک جسم فقط تحت شرایط موجود در مرزها تعیین می‌شود. اکنون می‌خواهیم تأثیر دیگر فرایندهایی را که ممکن است در جسم رخ دهد، بر توزیع دما مورد بررسی قرار دهیم. به ویژه، حالتهایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آنها انرژی گرمایی توسط تبدیل شکل دیگر انرژی در جسم تولید می‌شود.

فرایند متداول تولید انرژی گرمایی شامل تبدیل ***انرژی الکتریکی به انرژی گرمایی*** در یک جسم حامل جریان برق (گرمایش اهمی یا مقاومتی) است. نرخ تولید انرژی در اثر عبور جریان I از جسمی با مقاومت الکتریکی R_e عبارت است از

$$\dot{E}_g = I^2 R_e \qquad (۳-۳۷)$$

اگر تولید توان (W) به طور یک‌نواخت در ماده‌ای به حجم V رخ دهد، نرخ تولید بر واحد حجم

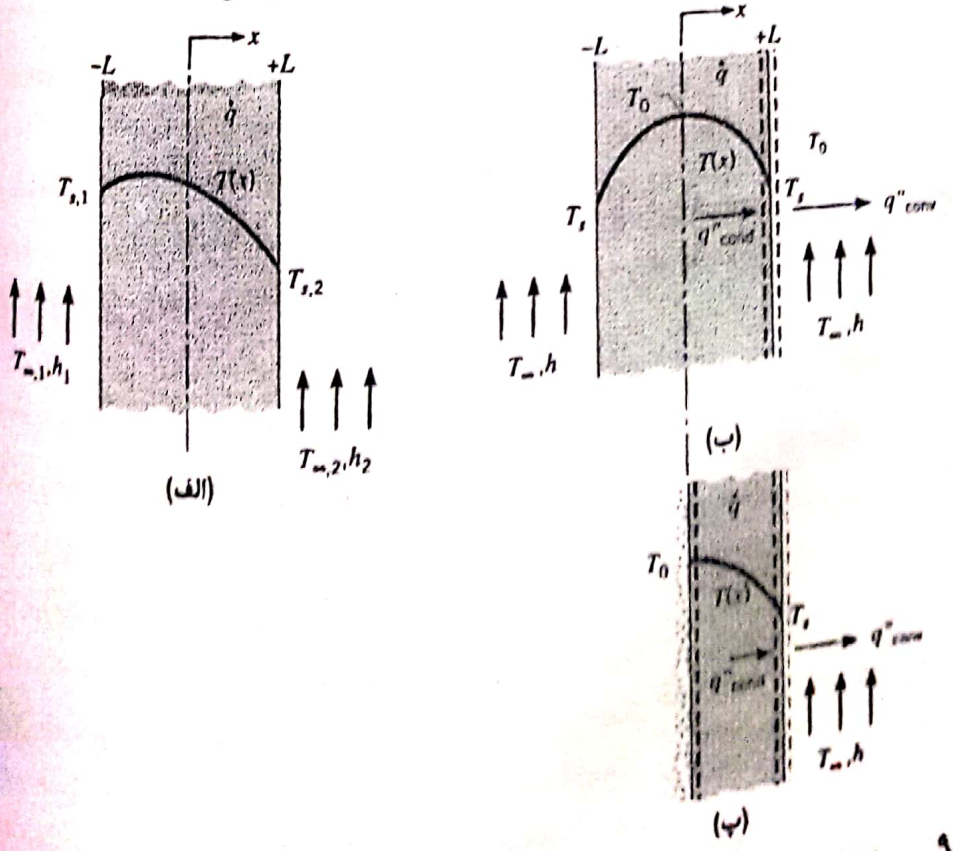
(W/m^3) برابر است با

$$\dot{q} \equiv \frac{\dot{E}_g}{V} = \frac{I^2 R_e}{V} \qquad (۳-۳۸)$$

تولید انرژی می‌تواند در نتیجهٔ کاهش سرعت یا جذب نوترون‌ها در میلهٔ سوخت یک راکتور هسته‌ای یا واکنش‌های شیمیایی گرمازا در داخل ماده رخ دهد. در مقابل در واکنش‌های گرماگیر حالت عکس رخ می‌دهد (چاه انرژی گرمایی) که در آن انرژی گرمایی به انرژی پیوند شیمیایی تبدیل می‌شود. جذب انرژی تابشی در داخل ماده نیز باعث تبدیل انرژی الکترومغناطیسی به انرژی گرمایی می‌شود. برای مثال، این فرایند در اثر جذب اشعهٔ گاما در اجزای بیرونی یک راکتور هسته‌ای (پوشش، حفاظ گرمایی، مخازن تحت فشار و غیره) یا در اثر جذب تابش مرئی در یک مادهٔ نیمه‌شفاف، رخ می‌دهد. توجه کنید که انرژی تولیدی نبایستی با انرژی ذخیره شده (بخش ۱-۳-۱) اشتباه شود.

۳-۵-۱ دیوار تخت

دیوار تخت شکل ۳-۹الف را در نظر بگیرید که در آن تولید انرژی بر واحد حجم یک‌نواخت است ($\dot{q}$ ثابت است) و سطوح جسم در دماهای $T_{s,1}$ و $T_{s,2}$ قرار دارند. اگر ضریب رسانایی گرمای k ثابت باشد، شکل مناسب معادلهٔ گرما، معادلهٔ (۲-۱۶) چنین است:



شکل ۳-۹ رسانایی در دیوار تخت با تولید گرمای یک‌نواخت (الف) شرایط مرزی متقارن و (ب) شرایط مرزی نامتقارن (پ) سطح مبانی آدیاباتیک

Scanned with CamScanner