فرض‌ها:

۱- انتقال گرما دایم است.

۲- رسانایی از پنجرهٔ اجاق یک بعدی است.

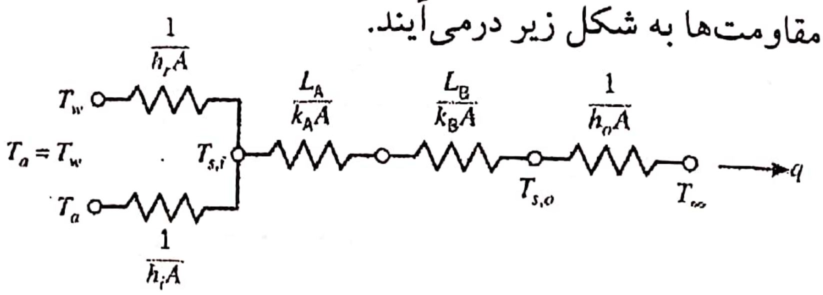
۳- مقاومت سطح تماس ناچیز است.

۴- جذب تابش در پنجره قابل چشم‌پوشی است و در نتیجه تولید داخلی گرما وجود ندارد (تبادل تابش بین پنجره و دیواره‌های اجاق در سطح تماس پنجره صورت می‌گیرد).

۵- تبادل تابش بین سطح خارجی پنجره و محیط ناچیز است.

۶- هر یک از ورق‌های پلاستیکی همگن و دارای خواص ثابت‌اند.

تحلیل: مدار معادل گرمایی را می‌توان با توجه به مقاومت‌های گرمایی جابه‌جایی در سطح بیرونی و رسانایی در ورق‌های پلاستیکی و جابه‌جایی و تابشی در سطح داخلی رسم نمود. بنابراین مدار و مقاومت‌ها به شکل زیر درمی‌آیند.



چون دمای سطح خارجی پنجره $T_{s,o}$ معلوم است، ضخامت مورد نیاز پنجره با اعمال موازنهٔ انرژی در این سطح به دست می‌آید. با استفاده از معادلهٔ (۱-۱۲) داریم

$$\dot{E}_{in} = \dot{E}_{out}$$

که از (۳-۱۹) و $T_w = T_a$ نتیجه می‌شود

$$\dot{E}_{in} = q = \frac{T_a - T_{s,o}}{\sum R_t}$$

و از معادله (۳-۸)

$$\dot{E}_{out} = q = h_o A\left(T_{s,o} - T_\infty\right)$$

مقاومت گرمایی کل بین داخل اجاق و سطح خارجی پنجره شامل مقاومت مؤثر ناشی از جابه‌جایی و تابشی، که به طور موازی در سطح داخلی پنجره عمل می‌کنند، و مقاومت‌های رسانایی در ورق‌های پلاستیکی است. بنابراین

$$\sum R_t = \left(\frac{1}{\frac{1}{h_i A}} + \frac{1}{\frac{1}{h_r A}}\right)^{-1} + \frac{L_A}{k_A A} + \frac{L_B}{k_B A}$$

یا

$$\sum R_t = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{h_i + h_r} + \frac{L_A}{k_A} + \frac{L_A}{2k_B}\right)$$

با جاگذاری آن در موازنهٔ انرژی نتیجه می‌شود

$$\frac{T_a - T_{s,o}}{(h_r + h_i)^{-1} + \left(\frac{L_A}{k_A} + \frac{L_A}{2k_B}\right)} = h_o\,(T_{s,o} - T_\infty)$$

پس از حل آن برای L_A خواهیم داشت:

$$L_A = \frac{\left(\frac{1}{h_o}\right)(T_a - T_{s,o})\,/\,(T_{s,o} - T_\infty) - (h_i + h_r)^{-1}}{\left(\frac{1}{k_A} + \frac{1}{2k_B}\right)}$$

$$L_A = \frac{0/04\,m^2.K/W\left(\frac{400-50}{50-25}\right) - 0/02\,m^2.K/W}{\left(\frac{1}{0/15} + \frac{1}{0/16}\right)\,m.K/W} = 0/0418\,m$$

چون $L_B = \frac{L_A}{2} = 0/0209\,m$ است، بنابراین

$$L = L_A + L_B = 0/0627\,m = 62/7\,mm$$

توضیح

۱- تا آنجا که به پاسخ گرمایی پنجره مربوط می‌شود، عمل خودپاک‌کنی یک فرایند گذراست و در مدت این فرایند ممکن است شرایط دایم فراهم نشود ولی بیشترین مقدار $T_{s,o}$ در شرایط دایم حاصل می‌شود، بنابراین برای محاسبات طراحی مناسب‌تر است.

۲- در واقع تبادل تابش بین دیواره‌های داخل اجاق و پنجرهٔ مرکب به دمای سطح داخلی $T_{s,i}$ بستگی دارد. تبادل تابش بین سطح بیرونی پنجره و محیط نیز وجود دارد که به $T_{s,o}$ بستگی دارد که در این مثال نادیده گرفته شده است. با انجام یک تجزیه و تحلیل جامع‌تر می‌توان $T_{s,o}$ و $T_{s,i}$ را به طور همزمان به دست آورد. با فرض این‌که محفظهٔ داخل اجاق خیلی بزرگ‌تر از پنجره باشد و با نوشتن معادلهٔ انرژی، معادلهٔ (۱-۱۲)، روی سطح داخلی داریم

$$q''_{rad,i} + q''_{conv,i} = q''_{cond}$$

یا

$$\varepsilon\sigma\,(T_{w,i}^4 - T_{s,i}^4) + h_i\,(T_a - T_{s,i}) = \frac{T_{s,i} - T_{s,o}}{\left(\frac{L_A}{k_A}\right) + \left(\frac{L_B}{k_B}\right)} \qquad (1)$$

فرض کنید که دیوارهای آشپزخانه محیط بزرگ و همدما و $T_{w,o} = T_\infty$ باشد، در این صورت با

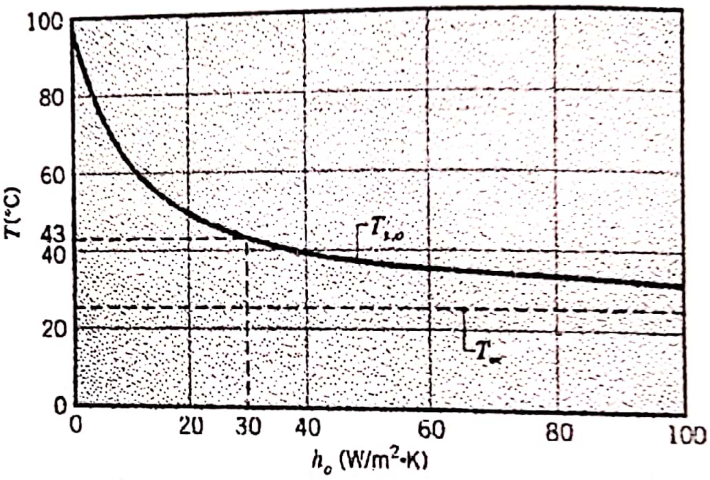
اعمال موازنهٔ انرژی در سطح خارجی خواهیم داشت:

$$q''_{cond} = q''_{rad,\circ} + q''_{conv,\circ}$$

$$\frac{T_{s,i} - T_{s,\circ}}{\left(\frac{L_A}{k_A}\right) + \left(\frac{L_B}{k_B}\right)} = \varepsilon\sigma\left(T^{4}_{s,\circ} - T^{4}_{w,\circ}\right) + h_\circ\left(T_{s,\circ} - T_\infty\right) \quad (۲)$$

اگر سایر کمیت‌ها معلوم باشند، $T_{s,\circ}$ و $T_{s,i}$ را می‌توان با حل معادله‌های (۱) و (۲) به دست آورد.

می‌خواهیم اثر تغییر سرعت جریان هوای روی سطح بیرونی پنجره، و در نتیجه ضریب انتقال گرمای جابه‌جایی، را بر مقدار $T_{s,\circ}$ بررسی کنیم. معادله‌های (۱) و (۲) برای $\varepsilon = ۰/۹$ و مقادیر $h_\circ$ در گسترهٔ $۰ \le h_\circ \le ۱۰۰ \ \mathrm{W/m^2.K}$ حل شده و نتایج به طور ترسیمی در شکل زیر نشان داده شده است.



افزایش $h_\circ$ مقاومت جابه‌جایی را کم می‌کند و مقدار $h_\circ = ۳۰ \ \mathrm{W/m^2.K}$ منجر به دمای $T_{s,\circ} = ۴۳°C$ می‌شود که از نظر ایمنی قابل قبول است. چون مقاومت رسانایی خیلی بزرگ است، تغییر در مقدار $h_\circ$ اثر ناچیزی بر $T_{s,i}$ دارد، ولی بر دمای سطح بیرونی اثر محسوسی دارد. وقتی $h_\circ$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند $T_{s,\circ}$ نیز به سوی T_∞ میل می‌کند.

مثال ۳-۲

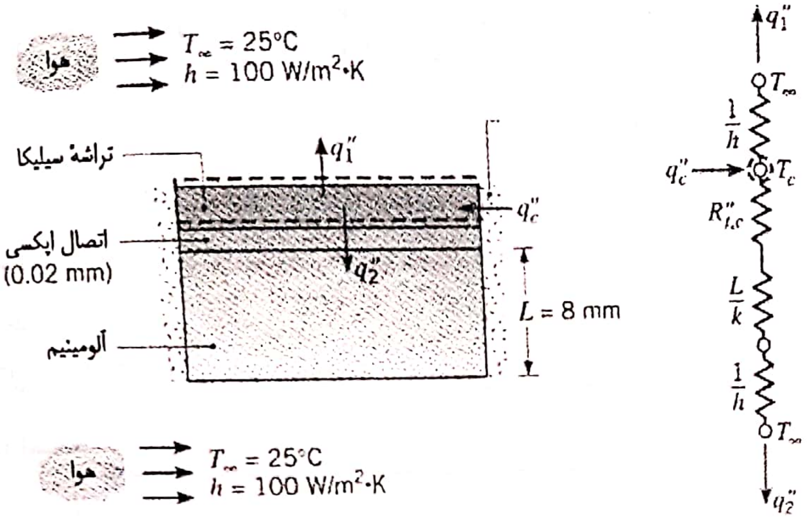
یک تراشهٔ نازک سیلیکانی و یک زمینهٔ آلومینیمی به ضخامت ۸ mm توسط یک چسب اپکسی به ضخامت ۰/۰۲ mm از یکدیگر جدا شده‌اند. تراشه و زمینهٔ مربعی به طول ضلع ۱۰mm بوده و در معرض سرمایش جریان هوا به دمای ۲۵°C و ضریب جابه‌جایی ۱۰۰ $\mathrm{W/m^2.K}$ قرار دارد. اگر تولید گرما در تراشه در شرایط عادی $۱۰^۴ \ \mathrm{W/m^2}$ باشد، آیا دمای آن از حد مجاز ۸۵°C کمتر خواهد بود؟

حل:

داده: ابعاد، پخش گرما و حداکثر دمای مجاز تراشهٔ سیلیکانی، ضخامت زمینهٔ آلومینیمی و چسب اپکسی. شرایط جابه‌جایی در سطح روی تراشه و سطح زیر زمینه.

خواسته: آیا دمای تراشه از حداکثر مجاز آن فراتر می‌رود.

شکل:



فرض‌ها:

۱- شرایط دایم است.

۲- رسانایی یک بعدی است (انتقال گرما از سطوح جانبی ناچیز است).

۳- مقاومت گرمایی تراشه ناچیز است (تراشهٔ همدما).

۴- خواص ثابت‌اند.

۵- تبادل تابش با محیط ناچیز است.

خواص: از جدول الف-۱ پیوست برای آلومینیم خالص (در ۳۵۰ K) k=۲۳۸ W/m.K

تحلیل:

گرمای تولید شده در تراشه به طور مستقیم از سطح آن به هوا و غیرمستقیم از چسب اپکسی و زمینه آلومینیمی منتقل می‌شود. با اعمال موازنهٔ انرژی برای سطح کنترلی که تراشه را در برمی‌گیرد بر واحد سطح خواهیم داشت

$$q_c'' = q_1'' + q_2''$$

یا

$$q_c'' = \frac{T_c - T_\infty}{\left(\frac{1}{h}\right)} + \frac{T_c - T_\infty}{R''_{t,c} + \left(\frac{L}{k}\right) + \left(\frac{1}{h}\right)}$$

به منظور تخمین محتاطانه T_c، حداکثر مقدار ممکن مقاومت تماس از جدول ۳-۲ برابر با $R''_{t,c} = ۰/۹ \times ۱۰^{-۴}\ m^۲.K/W$ به دست می‌آید. بنابراین

$$T_c = T_\infty + q_c'' \left[h + \frac{۱}{R''_{t,c} + \left(\frac{L}{k}\right) + \left(\frac{۱}{h}\right)} \right]^{-۱}$$

یا

$$T_c = ۲۵°C + ۱۰^۴ W/m^۲ \times \left[۱۰۰ + \frac{۱}{(۰/۹ + ۰/۳۴ + ۱۰۰) \times ۱۰^{-۴}} \right]^{-۱} m^۲.K/W$$

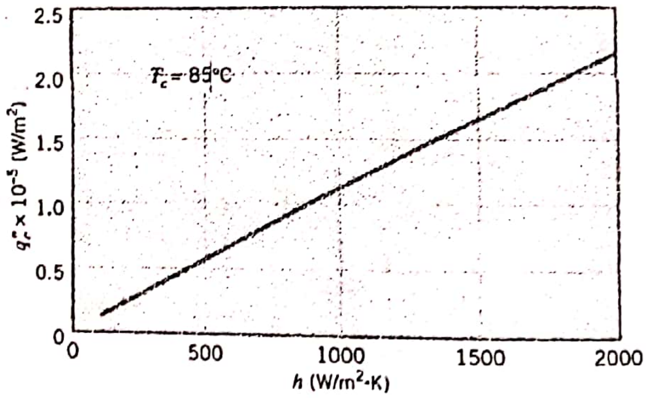
$$T_c = ۲۵°C + ۵۰/۳°C = ۷۵/۳°C$$

بنابراین، تراشه پایینتر از حداکثر دمای مجاز کار خواهد کرد.

توضیح:

۱- مقاومت‌های چسب اپکسی و زمینهٔ آلومینیمی خیلی کمتر از مقاومت جابه‌جایی هستند. اگر مقاومت چسب اپکسی از مقدار زیاد و غیرواقعی، ۵۰×۱۰^{-۴} $m^۲.K/W$ تجاوز کند، دمای تراشه از مقدار مجاز بیشتر می‌شود.

۲- توان مجاز را می‌توان با افزایش ضریب‌های جابه‌جایی، یا با زیاد کردن سرعت هوا و یا با جایگزین نمودن هوا با یک سیال مؤثرتر افزایش داد. نتیجهٔ محاسبات انجام شده در گسترهٔ $۱۰۰ \leq h \leq ۲۰۰۰$ $W/m^۲.K$ در نمودار زیر نشان داده شده است.

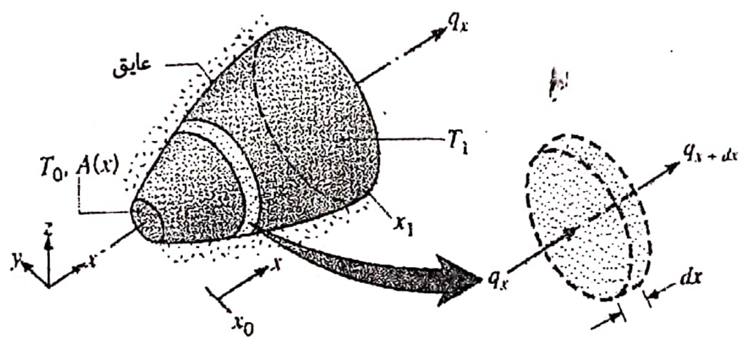


هنگامی که $h \to \infty$ میل می‌کند، $q_۲''$ به سمت صفر میل می‌کند، یعنی تمام توان تراشه مستقیماً به سیال منتقل می‌شود.

۳- شرایطی را در نظر بگیرید که جریان هوا روی سطح تراشه (بالا) یا زمینه (پایین) قطع شود. اگر انتقال گرما از این دو سطح ناچیز باشد، دمای تراشه با توان $q_c'' = ۱۰^۴ W/m^۲$ چقدر خواهد بود؟ [جدول: به ترتیب $۱۲۶°C$ و $۱۲۵°C$].

۳-۲ روش دیگر برای تحلیل رسانایی

در تجزیه و تحلیل رسانایی در بخش (۳-۱)، از یک ***روش استاندارد*** استفاده شده است. یعنی: از حل معادلهٔ گرما برای به دست اوردن توزیع دما، معادلهٔ (۳-۳)، استفاده شده است و سپس قانون فوریه برای محاسبهٔ نرخ انتقال گرما، معادلهٔ (۳-۴)، به کار رفته است. ولی، از روش دیگری هم می‌توان برای شرایط مورد نظر استفاده کرد. رسانایی در سیستم شکل ۳-۵ را در نظر بگیرید. توجه کنید که برای ***شرایط دایم***، ***بدون تولید گرما*** و ***بدون گرمای هدر رفته از اطراف***، نرخ انتقال گرما q_x بایستی ثابت و مستقل از x باشد. یعنی، برای هر جزء دیفرانسیلی dx، رابطه $q_x = q_{x+dx}$ برقرار است. البته این شرط در نتیجهٔ بقای انرژی است و حتی اگر سطح مقطع



شکل ۳-۵ یک سیستم با نرخ انتقال گرمای رسانایی ثابت.

با مکان، $A(x)$، و ضریب رسانایی گرما با دما، $k(T)$ تغییر کنند نیز برقرار است. هر چند که ممکن است توزیع دما دوبعدی بوده و با x و y تغییر کند، اغلب معقول است که از تغییر دما در جهت y چشم‌پوشی کرد و توزیع دما را در جهت x **یک بعدی** فرض نمود.

در شرایط بالا می‌توان تنها با استفاده از قانون فوریه، رسانایی را تجزیه و تحلیل نمود. به ویژه، چون نرخ رسانایی گرما ثابت است، حتی اگر این نرخ و توزیع دما نامعلوم باشند، می‌توان از معادلهٔ نرخ انتقال گرما ***انتگرال*** گرفت. قانون فوریه، معادلهٔ (۲-۱)، را برای شکل ۳-۵ در نظر بگیرید. گرچه هیچ گونه اطلاعی از مقدار q_x یا شکل $T(x)$ نداریم، ولی می‌دانیم که q_x ثابت است. بنابراین، می‌توان قانون فوریه را به شکل انتگرالی ارائه نمود.

$$q_x \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{A(x)} = -\int_{T_0}^{T} k(T)\, dT \qquad (۳-۲۱)$$

مساحت سطح مقطع می‌تواند تابع معلومی از x و ضریب رسانایی گرمای ماده نیز تابع معلومی از دما باشد. اگر انتگرال‌گیری از نقطه x_0، که در آن دمای T_0 معلوم است، انجام شود، معادلهٔ حاصله توزیع دمای $T(x)$ را می‌دهد. به علاوه، اگر دمای $T=T_1$ در $x=x_1$ معلوم باشد، از انتگرال گیری بین x_0 و x_1 معادله‌ای حاصل می‌شود که از آن می‌توان $q(x)$ را محاسبه کرد. اگر مساحت A یک‌نواخت و k مستقل از دما باشد، معادلهٔ (۳-۲۱) به صورت زیر درمی‌آید.

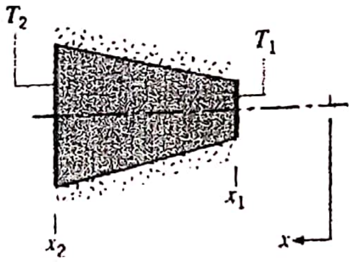
$$\frac{q_x\, \Delta x}{A} = -k\, \Delta T \qquad (۳-۲۲)$$

که در آن $\Delta x = x_1 - x_0$ و $\Delta T = T_1 - T_0$ است.

اغلب برای حل مسأله‌های پخش گرما از شکل انتگرالی معادله‌های نرخ پخش گرما استفاده می‌شود. اما، شرایط محدود کننده آن بایستی به خاطر سپرده شود: یعنی انتقال ***گرما دایم***، یک ***بعدی و بدون تولید گرماست.***

مثال ۳-۳

شکل زیر یک مقطع مخروطی را که از پیروسرام ساخته شده است نشان می‌دهد. سطح مقطع آن



دایره‌ای بـا قـطر $D=ax$، کـه در آن $a=0/25$، است. قاعدهٔ کوچکتر در $x_1=50$ mm و قاعدهٔ بـزرگتر آن در $x_2=250$ mm است. دماهای دو انتهای آن به ترتیب $T_1=400$ K و $T_2=600$ K است و سطوح جانبی کاملاً عایق کاری شده است

۱- فرض کنید شرایط یک بعدی است، عبارتی برای توزیع دما، $T(x)$، به صورت پـارامـتری به‌دست آورید. توزیع دما را رسم کنید.

۲- نرخ گرما، q_x، را در مخروط محاسبه کنید.

حل:

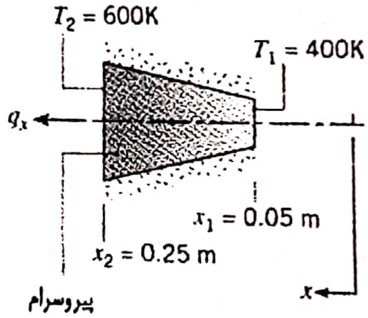
داده: رسانایی در مخروطی با سطح مقطع دایره‌ای به قطر $D=ax$ که در آن $a=0/25$ است.

خواسته:

۱- توزیع دما، $T(x)$.

۲- نرخ انتقال گرما، q_x.

شکل:



فرض‌ها:

۱- شرایط دایم است.

۲- رسانایی در جهت x یک بعدی است.

۳- تولید داخلی گرما وجود ندارد.

۴- خواص ثابت‌اند.

خواص: از جدول الف-۲-پیوست برای پیروسرام (در 500 K): $k=3/46$ W/m.K.

تحلیل:

۱- چون رسانایی تحت شرایط دایم، یک بعدی و بدون تولید داخلی گرما رخ مـی‌دهد، نـرخ انتقال گرما، q_x مستقل از x و ثابت است. به همین ترتیب، توزیع دما را می‌توان با استفاده از قانون فوریه، معادلهٔ (۲-۱)، به دست آورد.

$$q_x = -kA\frac{dT}{dx}$$

با جاگذاری $A=\frac{\pi D^2}{4}=\frac{\pi a^2 x^2}{4}$ و جداسازی متغیرها داریم:

$$\frac{4q_x\,dx}{\pi a^2 x^2} = -kdT$$

با انتگرال گیری از x_1 تا x در مخروط و با توجه به این‌که q_x و k ثابت‌اند، خواهیم داشت:

$$\frac{4q_x}{\pi a^2}\int_{x_1}^{x}\frac{dx}{x^2}=-k\int_{T_1}^{T}dT$$

بنابراین

$$\frac{4q_x}{\pi a^2}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x_1}\right)=-k\left(T-T_1\right)$$

که پس از حل برای دما خواهیم داشت

$$T(x)=T_1-\frac{4q_x}{\pi a^2 k}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x}\right)$$

گرچه q_x ثابت است، ولی هنوز مقدار آن معلوم نیست. مقدار آن را می‌توان با محاسبهٔ معادلهٔ بالا در $x=x_2$، که در آن $T(x_2)=T_2$ است، به دست آورد.

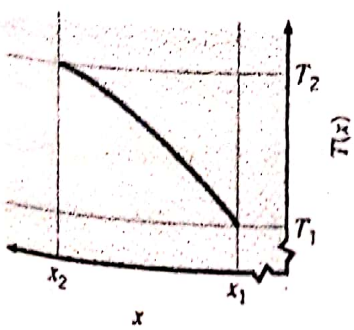
$$T_2=T_1-\frac{4q_x}{\pi a^2 k}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)$$

با حل این معادله q_x به دست می‌آید.

$$q_x=\frac{\pi a^2 k\left(T_1-T_2\right)}{4\left[\left(\frac{1}{x_1}\right)-\left(\frac{1}{x_2}\right)\right]}$$

با جاگذاری q_x در معادلهٔ $T(x)$، توزیع دما برابر خواهد بود با:

$$T(x)=T_1+\left(T_1-T_2\right)\left[\frac{\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{x_1}\right)}{\left(\frac{1}{x_1}\right)-\left(\frac{1}{x_2}\right)}\right]$$



با استفاده از این نتیجه، دما را می‌توان برحسب x محاسبه کرد که توزیع آن در شکل مقابل نشان داده شده است.

توجه کنید، چون بر طبق قانون فوریه $\frac{dT}{dx}=-\frac{4q_x}{k\pi a^2 x^2}$ است، با افزایش x گرادیان دما و شار گرما کاهش پیدا می‌کند.

۲- با جاگذاری مقادیر عددی در عبارت بالا، نرخ انتقال گرما برابر است با:

$$q_x=\frac{\pi(0/25)^2\times 3/46\ W/m.K\,(400-600)K}{4\left(\frac{1}{0/05m}-\frac{1}{0/25m}\right)}=-2/12\ W$$

توضیح : با افزایش پارامتر a از دقت فرض یک بعدی کاسته می‌شود. یعنی، وقتی تغییرات سطح مقطع شدید می‌شود درستی فرض مورد سوال قرار می‌گیرد.

۳-۳ سیستم‌های شعاعی

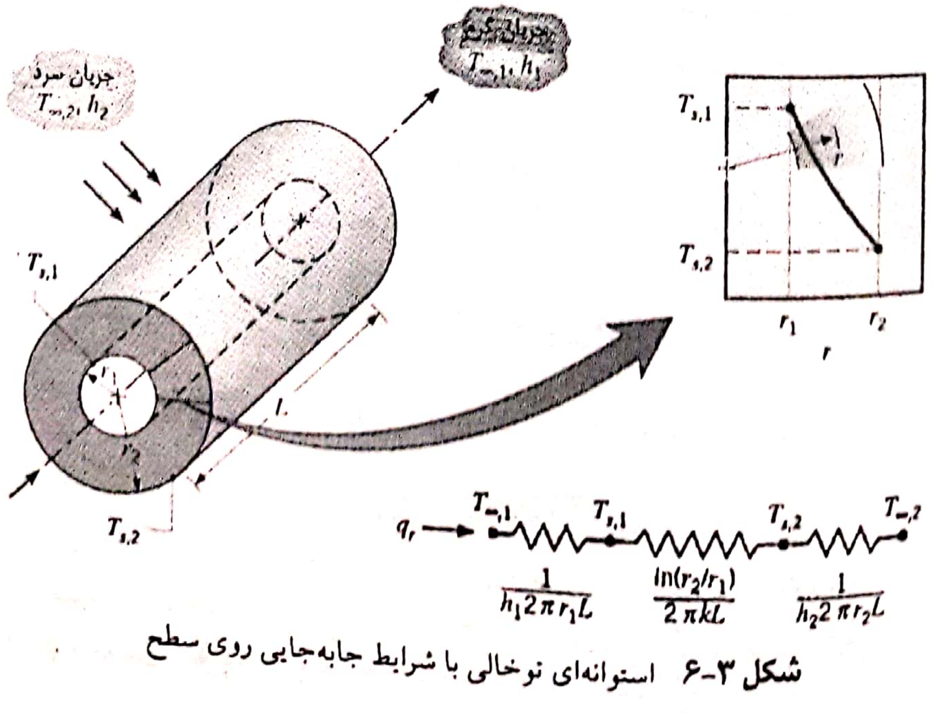
گرادیان دما در سیستم‌های کروی و استوانه‌ای اغلب تنها در جهت شعاعی است. بنابراین، می‌توان این سیستم‌ها را یک بعدی فرض کرد. علاوه براین در شرایط دایم و بدون تولید گرما، می‌توان با استفاده از **روش استاندارد**، که با شکل مناسب معادلهٔ گرما شروع می‌شود، یا **روش دیگر**، که با شکل مناسب قانون فوریه شروع می‌شود، می‌توان این سیستم‌ها را تجزیه و تحلیل کرد. در این بخش، سیستم استوانه‌ای با روش استاندارد و سیستم کروی با روش دیگر تجزیه و تحلیل می‌شوند.

۳-۳-۱ استوانه

یک مثال متداول استوانهٔ توخالی است، که سطوح درونی و بیرونی آن در معرض سیالی با دماهای متفاوت قرار گرفته است شکل ۳-۶. برای شرایط دایم بدون تولید گرما، شکل مناسب معادلهٔ گرما، معادلهٔ (۲-۲۰)، چنین است.

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(kr\frac{dT}{dr}\right)=0 \qquad (۳-۲۳)$$

که در آن k متغیر فرض می‌شود. اگر قانون فوریهٔ مربوط به این حالت را در نظر بگیرید، اهمیت فیزیکی این رابطه آشکار می‌شود. نرخ رسانایی انرژی از هر سطح دلخواه استوانه‌ای در جامد را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.



شکل ۳-۶ استوانه‌ای توخالی با شرایط جابه‌جایی روی سطح

$$q_r = -kA\frac{dT}{dr} = -k(2\pi rL)\frac{dT}{dr} \tag{۳-۲۴}$$

که در آن $A = 2\pi rL$ سطح عمود بر جهت انتقال گرماست. چون معادله (۳-۲۳) نشان می‌دهد که کمیت $kr(\frac{dT}{dr})$ مستقل از r است، از معادلهٔ (۳-۲۴) نتیجه می‌شود که ***نرخ انتقال گرمای رسانایی*** q_r (نه شار گرمای q''_r) در ***جهت شعاعی ثابت*** است.

توزیع دما در استوانه را می‌توان با حل معادلهٔ (۳-۲۳) و به کار گرفتن شرایط مرزی به دست آورد. فرض کنید مقدار k ثابت است، با دو بار انتگرال گیری از معادلهٔ (۳-۲۳) جواب عمومی زیر به دست می‌آید:

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2 \tag{۳-۲۵}$$

برای تعیین ثابت‌های C_1 و C_2، شرایط مرزی زیر را معرفی می‌کنیم:

$$T(r_1) = T_{s,1} \qquad \text{و} \qquad T(r_2) = T_{s,2}$$

با اعمال این شرایط در جواب عمومی، خواهیم داشت

$$T_{s,1} = C_1 \ln r_1 + C_2 \qquad \text{و} \qquad T_{s,2} = C_1 \ln r_2 + C_2$$

با حل معادله‌ها برای C_1 و C_2 و جاگذاری در جواب عمومی، خواهیم داشت:

$$T(r) = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_2}\right) + T_{s,2} \tag{۳-۲۶}$$

توجه کنید که توزیع دمای رسانایی شعاعی در استوانه لگاریتمی است، بر خلاف دیوار تخت که در شرایط مشابه خطی است. توزیع لگاریتمی در شکل ۳-۶ رسم شده است.

اگر توزیع دما، معادلهٔ (۳-۲۶)، را با قانون فوریه (۳-۲۴) استفاده کنیم، عبارت زیر برای نرخ انتقال گرما به دست می‌آید:

$$q_r = \frac{2\pi Lk\,(T_{s,1} - T_{s,2})}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} \tag{۳-۲۷}$$

این نتیجه نشان می‌دهد که مقاومت گرمایی برای رسانایی شعاعی در یک دیوار استوانه‌ای به صورت زیر است:

$$R_{t,cond} = \frac{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}{2\pi Lk} \tag{۳-۲۸}$$

این مقاومت در مدار گرمایی سری شکل ۳-۶ نشان داده شده است. توجه کنید چون مقدار q_r مستقل از r است، نتیجهٔ حاصله را می‌توان با استفاده از روش دیگر، یعنی با انتگرال گیری از معادلهٔ (۳-۲۴)، به دست آورد.