۳

رسانایی گرمای دایم و یک بعدی

در این فصل به بررسی مواردی می‌پردازیم که در آنها پخش گرما تحت شرایط **دایم** و **یک‌بعدی** رخ می‌دهد. واژهٔ یک بعدی، به حالتی گفته می‌شود که فقط یک جهت مختصات برای توصیف تغییر مکانی متغیرهای وابسته لازم است. بنابراین، در یک سیستم **یک بعدی** گرادیان دما فقط در امتداد یکی از محورهای مختصات وجود دارد و انتقال گرما منحصراً در این جهت رخ می‌دهد. اگر دما در هر نقطه مستقل از زمان باشد، سیستم با شرایط ***حالت دایم*** مشخص می‌شود. علی‌رغم سادگی، مدل‌های یک بعدی و دایم ممکن است برای بیان دقیق رفتار سیستم‌های مهندسی بیشماری به کار روند.

بررسی رسانایی گرمای دایم و یک بعدی را با بحث انتقال گرما بدون تولید انرژی گرمایی شروع می‌کنیم (بخش‌های ۳-۱ تا ۳-۴). هدف، تعیین عبارت‌هایی برای توزیع دما و نرخ انتقال گرما در اشکال متداول هندسی (اجسام تخت، استوانه‌ای و کروی) است. هدف دیگر معرفی مفهوم ***مقاومت گرمایی***[۱] و استفاده از ***مدارهای گرمایی***[۲] برای نشان دادن و محاسبه جریان گرماست (همانند مدار برقی برای جریان برق). سپس اثر تولید انرژی داخلی در بخش ۳-۵ بررسی می‌شود که هدف تعیین توزیع دما و نرخ انتقال گرماست. در بخش ۳-۶، حالت خاص انتقال گرمای رسانای یک بعدی و دایم در ***سطوح گسترده***[۳] ارائه می‌شود. این سطوح معمولاً پره نامیده می‌شوند و برای افزایش انتقال گرمای جابه‌جایی به سیال به کار می‌روند. علاوه بر به دست آوردن روابط توزیع دما و نرخ گرما در ***پره‌ها***[۴]، پارامترهای عملکرد و بازده آنها نیز معرفی می‌شود.

۳-۱ دیوار تخت

در رسانایی یک بعدی در یک دیوار تخت، دما تنها تابعی از x است و گرما تنها در این جهت انتقال می‌یابد. در شکل ۳-۱الف دیواری تخت دو سیال را با دمای متفاوت از هم جدا می‌سازد. انتقال گرما در اثر جابه‌جایی از سیال گرم با دمای $T_{\infty,1}$ به سطح دیوار با دمای $T_{s,1}$، توسط

۱- Thermal Resistance
۲- Thermal Circuits
۳- Extended sarface
۴- fins

Scanned by CamScanner

رسانایی از دیوار و توسط جابه‌جایی از سطح دیگر دیوار در دمای $T_{s,2}$ به سیال سرد به دمای $T_{\infty,2}$ رخ می‌دهد.

بررسی خود را با توجه به شرایط **داخل** دیوار شروع می‌کنیم. ابتدا توزیع دما را به دست آورده و با استفاده از آن نرخ انتقال گرمای رسانایی را تعیین می‌کنیم.

۳-۱-۱ توزیع دما

توزیع دما در دیوار را می‌توان با حل معادلهٔ پخش گرما با توجه به شرایط مرزی مربوطه به دست آورد. برای شرایط دایم بدون وجود منبع یا چاه انرژی در دیوار، شکل مناسب معادلهٔ گرما، معادلهٔ (۲-۱۷)، به صورت زیر است.

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) = 0 \qquad (۳-۱)$$

بنابراین از معادله (۲-۲) نتیجه می‌شود که در ***رسانایی دایم و یک بعدی در دیوار تخت بدون تولید گرما، شار گرما مستقل از x است***. اگر ضریب رسانایی جنس دیوار ثابت فرض شود، با دو بار انتگرال‌گیری به **جواب عمومی** زیر خواهیم رسید.

$$T(x) = C_1 x + C_2 \qquad (۳-۲)$$

برای به دست آوردن ثابت‌های انتگرال‌گیری C_1 و C_2، بایستی از شرایط مرزی استفاده کرد. بدین منظور از شرط نوع اول در $x=0$ و $x=L$ داریم

$$T(0) = T_{s,1} \qquad \text{و} \qquad T(L) = T_{s,2}$$

با اعمال شرط مرزی در $x=0$ در جواب عمومی، داریم

$$T_{s,1} = C_2$$

به همین ترتیب در $x=L$،

$$T_{s,2} = C_1 L + C_2 = C_1 L + T_{s,1}$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$\frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L} = C_1$$

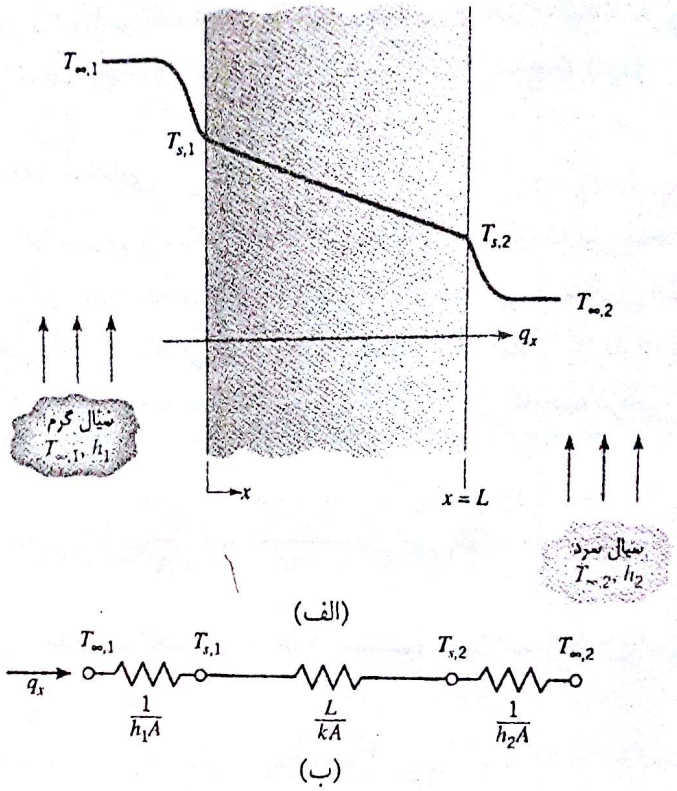
با جاگذاری دو ثابت فوق در جواب عمومی، توزیع دما به صورت زیر درمی‌آید

$$T(x) = (T_{s,2} - T_{s,1})\frac{x}{L} + T_{s,1} \qquad (۳-۳)$$

از نتیجهٔ به دست آمده واضح است که در ***رسانایی دایم و یک بعدی در یک دیوار تخت بدون تولید داخلی گرما و با ضریب رسانایی گرمای ثابت، دما به صورت خطی با x تغییر می‌کند.***

با داشتن توزیع دما، می‌توانیم با استفاده از قانون فوریه، معادلهٔ (۲-۱)، نرخ انتقال گرمای

Scanned by CamScanner



شکل ۳-۱ انتقال گرما از یک دیوار تخت (الف) توزیع دما و (ب) مدار معادل گرمایی

رسانایی را به دست آوریم.

$$q_x = -kA\frac{dT}{dx} = \frac{kA}{L}\left(T_{s,1} - T_{s,2}\right) \qquad (۳-۴)$$

توجه داشته باشید که A سطح دیوار **عمود** بر جهت انتقال گرما و مستقل از x است. بنابراین شار گرما برابر است با

$$q''_x = \frac{q_x}{A} = \frac{k}{L}\left(T_{s,1} - T_{s,2}\right) \qquad (۳-۵)$$

معادله (۳-۴) و (۳-۵) بیانگر این اند که نرخ گرما، q_x، و شار گرما، q''_x، ثابت و مستقل از x اند.

در بخش‌های آینده از یک ***روش استاندارد*** برای حل مسأله‌های رسانایی استفاده شده است. یعنی با استفاده از شکل مناسب معادله گرما، جواب عمومی توزیع دما به دست می‌آید. سپس جواب ویژه با استفاده از شرایط مرزی و نرخ انتقال گرما با استفاده از معادله فوریه به دست خواهد آمد. توجه کنید که دمای سطح در $x=0$ و $x=L$ به عنوان شرایط مرزی به کار رفته‌اند، هر چند که معمولاً دماهای سیال معلوم‌اند نه دمای سطوح. اما، چون دماهای سیال مجاور و سطح را به سادگی می‌توان از طریق موازنهٔ انرژی سطحی با هم ارتباط داد (به بخش ۱-۳-۲ مراجعه کنید)، به آسانی می‌توان معادله‌های (۳-۳) تا (۳-۵) را برحسب دماهای سیال، نیز بیان کرد.

نتایج مشابهی را می‌توان با استفاده از موازنهٔ انرژی سطحی به عنوان شرایط مرزی نوع سوم در محاسبهٔ ثابت‌های معادلهٔ (۳-۲) به دست آورد (به مسألهٔ ۳-۱ مراجعه شود).

۳-۱-۲ مقاومت گرمایی

در اینجا به یکی از مفاهیم مهم معادله (۳-۴) توجه کنید. در حقیقت بین پخش گرما و بار الکتریکی تشابهی وجود دارد. همان طوری که مقاومت الکتریکی با رسانایی الکتریکی ارتباط دارد، مقاومت گرمایی هم با رسانایی گرما رابطه دارد. اگر مقاومت را به عنوان نسبت پتانسیل رانش به نرخ انتقال گرمای مربوطه تعریف کنیم، از معادلهٔ (۳-۴) ***مقاومت گرمایی برای رسانایی*** برابر خواهد بود با

$$R_{t,cond} \equiv \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{q_x} = \frac{L}{kA} \qquad (۳-۶)$$

به همین ترتیب برای مقاومت الکتریکی در همان سیستم، قانون اهم رابطه زیر را برای مقاومت الکتریکی می‌دهد

$$R_e = \frac{E_{s,1} - E_{s,2}}{I} = \frac{L}{\sigma A} \qquad (۳-۷)$$

تشابه بین معادله‌های (۳-۶) و (۳-۷) واضح است. برای انتقال گرمای جابه‌جایی از یک سطح نیز می‌توان یک مقاومت گرمایی تعریف کرد. از قانون سرمایش نیوتن داریم

$$q = hA\,(T_s - T_\infty) \qquad (۳-۸)$$

که از آن ***مقاومت گرمایی برای جابه‌جایی*** به دست می‌آید:

$$R_{t,conv} \equiv \frac{T_s - T_\infty}{q} = \frac{1}{hA} \qquad (۳-۹)$$

مدار معادل ابزار مفیدی برای درک و محاسبهٔ مسأله‌های انتقال گرماست. در شکل ۳-۱ب مدار معادل گرمایی[1] برای یک دیوار تخت با جابه‌جایی روی سطح دیده می‌شود.

نرخ انتقال گرما را می‌توان با بررسی جداگانهٔ هر یک از اجزای مدار به دست آورد. چون q_x در سراسر مدار ثابت است، داریم:

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{\frac{1}{h_1 A}} = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\frac{L}{kA}} = \frac{T_{s,2} - T_{\infty,2}}{\frac{1}{h_2 A}} \qquad (۳-۱۰)$$

نرخ انتقال گرما را می‌توان برحسب اختلاف دمای کلی[2]، $T_{\infty,1} - T_{\infty,2}$، و مقاومت گرمایی کلی،

Scanned by CamScanner

R_{tot}، به صورت زیر بیان کرد

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{R_{tot}} \qquad (۱۱-۳)$$

چون مقاومت‌های رسانایی و جابه‌جایی به صورت سری قرار گرفته‌اند و با هم جمع می‌شوند، داریم

$$R_{tot} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A} \qquad (۱۲-۳)$$

اگر سطح ماده توسط گازی از محیطی خیلی گسترده جدا شده باشد (بخش ۱-۲-۳)، مقاومت دیگری نیز وجود دارد. یعنی، تبادل تابش بین سطح و محیط آن مهم بوده و نرخ انتقال را می‌توان از معادلهٔ (۱-۸) به دست آورد. بنابراین، ***مقاومت گرمایی برای تابش*** را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$R_{t,rad} = \frac{T_s - T_{sur}}{q_{rad}} = \frac{1}{h_r A} \qquad (۱۳-۳)$$

که در آن h_r از معادلهٔ (۱-۹) به دست می‌آید. مقاومت‌های تابشی و جابه‌جایی به طور موازی عمل می‌کنند. اگر $T_\infty = T_{sur}$ باشد، با ترکیب آنها می‌توان یک مقاومت سطحی مؤثر به دست آورد.

۳-۱-۳ دیوار مرکب

از مدار معادل گرمایی می‌توان برای سیستم‌های پیچیده‌تری مانند ***دیوار مرکب*** نیز استفاده کرد. چنین دیوارهایی شامل مقاومت‌های گرمایی سری و موازی‌اند که در اثر لایه‌های مختلف دیوار به وجود می‌آیند. به دیوار سری - مرکب در شکل ۳-۲ توجه کنید. نرخ انتقال گرمای یک بعدی برای این سیستم را می‌توان به صورت زیر نوشت

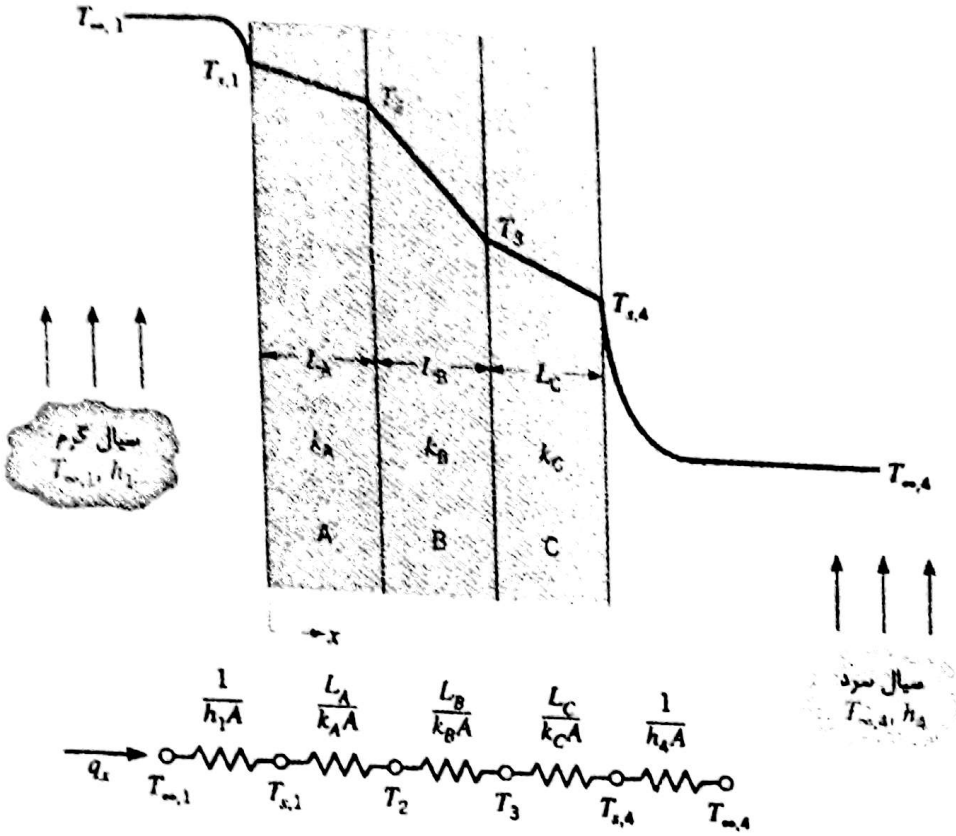
$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\sum R_t} \qquad (۱۴-۳)$$

که در آن $T_{\infty,1} - T_{\infty,4}$ ***اختلاف دمای کلی*** است و نماد Σ جمع کلیهٔ مقاومت‌های گرمایی را شامل می‌شود. بنابراین:

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,4}}{\left[\left(\frac{1}{h_1 A}\right) + \left(\frac{L_A}{k_A A}\right) + \left(\frac{L_B}{k_B A}\right) + \left(\frac{L_C}{k_C A}\right) + \left(\frac{1}{h_4 A}\right)\right]} \qquad (۱۵-۳)$$

از طرف دیگر نرخ انتقال گرما را می‌توان برحسب اختلاف دما و مقاومت هر یک از اجزا نوشت، برای مثال

Scanned by CamScanner



شکل ۳-۲ مدار گرمایی معادل برای دیوار سری مرکب

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{\left(\frac{1}{h_1 A}\right)} = \frac{T_{s,1} - T_2}{\left(\frac{L_A}{k_A A}\right)} = \frac{T_2 - T_3}{\left(\frac{L_B}{k_B A}\right)} = \dots \qquad (۳-۱۶)$$

برای سیستم‌های مرکب، اغلب آسانتر است که با **ضریب انتقال گرمای کلی** کار شود که با عبارتی مانند قانون سرمایش نیوتن تعریف می‌شود. یعنی

$$q_x = UA\,\Delta T \qquad (۳-۱۷)$$

که در آن ΔT اختلاف دمای کلی است. ضریب انتقال گرمای کلی با مقاومت گرمایی کلی ارتباط دارد. از معادله‌های (۳-۱۴) و (۳-۱۷) ملاحظه می‌شود که $UA = 1/R_{tot}$ است. بنابراین برای دیوار مرکب شکل ۳-۳، این رابطه به صورت زیر نوشته می‌شود

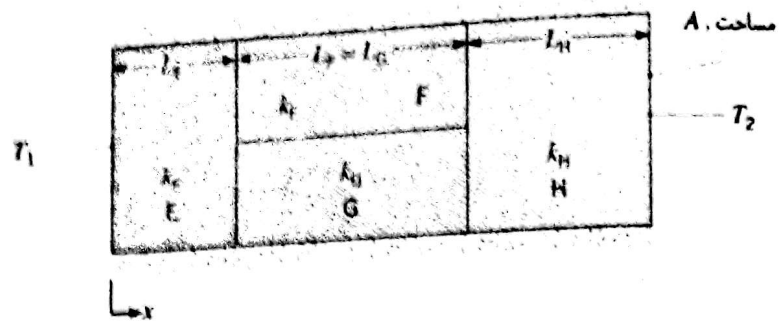
$$U = \frac{1}{R_{tot} A} = \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{h_1}\right) + \left(\frac{L_A}{k_A}\right) + \left(\frac{L_B}{k_B}\right) + \left(\frac{L_C}{k_C}\right) + \left(\frac{1}{h_2}\right)\right]} \qquad (۳-۱۸)$$

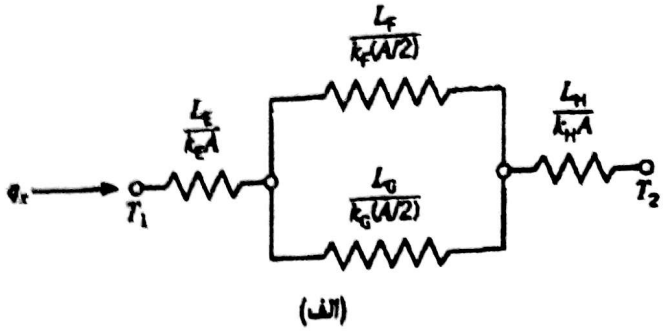
به طور کلی، می‌توان نوشت

$$R_{tot} = \Sigma R_t = \frac{\Delta T}{q} = \frac{1}{UA} \qquad (۳-۱۹)$$

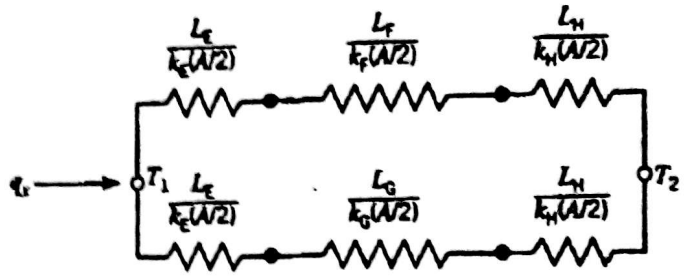
همان طوری که در شکل ۳-۳ نشان داده شده است، دیوارهای مرکب می‌توانند ترکیب سری

Scanned by CamScanner





(الف)



(ب)

شکل ۳-۳ مدار معادل گرمایی برای دیوار مرکب سری - موازی

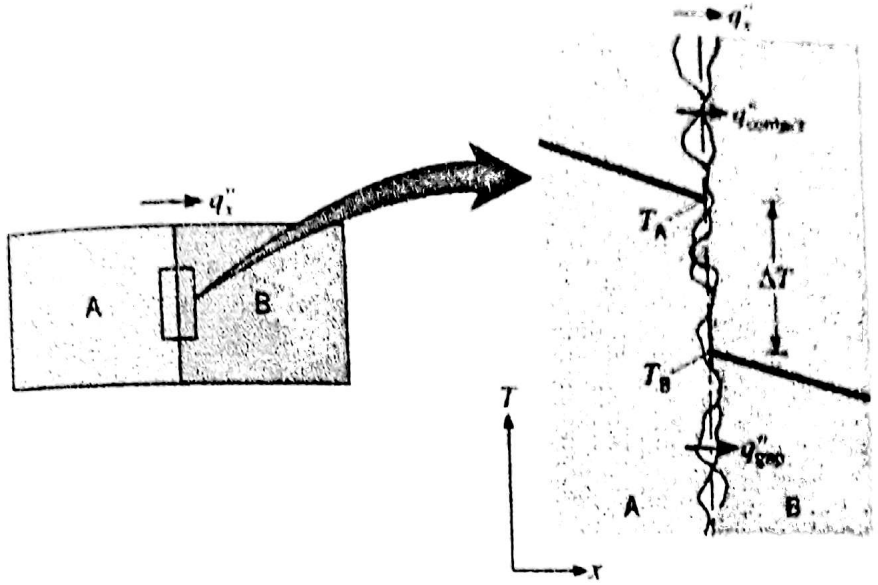
- موازی داشته باشند. گرچه جریان گرما در این شکل دوبعدی است، اغلب فرض شرط یک بعدی معقول است. بر اساس این فرض می‌توان از دو نوع مدار معادل گرمایی استفاده کرد. در حالت (الف) سطوح عمود بر جهت x را همدما فرض می‌کنیم. در حالی که در حالت (ب) سطوح موازی با جهت x، آدیاباتیک هستند. نتایج متفاوتی برای R_{tot} و مقدار q به دست می‌آید که نرخ انتقال گرمای واقعی را دربرمی‌گیرد. با افزایش (k_F-k_G) اثرهای دوبعدی مهمتر شده و اختلاف نتایج دو روش بیشتر می‌شود.

۳-۱-۴ مقاومت سطح تماس

در سیستم‌های مرکب ممکن است افت دما در سطح تماس مواد قابل توجه باشد، ولی تاکنون از این اثر چشم‌پوشی شده است. این تغییر دما ناشی از **مقاومت گرمایی سطح تماس** $R_{t,c}$ است. در شکل ۳-۴ این اثر دیده می‌شود. تعریف مقاومت بر واحد سطح چنین است:

$$R''_{t,c}=\frac{T_A-T_B}{q''_x} \qquad (۲۰-۳)$$

Scanned by CamScanner



شکل ۳-۴ افت دما در اثر مقاومت سطح تماس

وجود مقاومت معین در سطح تماس اساساً ناشی از اثرهای زبری سطح است. بین نقاط تماس شکاف‌هایی پر از هوا وجود دارد. در نتیجه، از محل تماس واقعی سطوح انتقال گرمای رسانایی و از شکاف‌ها انتقال گرمای تابشی و رسانایی صورت می‌گیرد. مقاومت سطح تماس را می‌توان از دو مقاومت موازی، یعنی مقاومت‌های ناشی از نقاط تماس و شکاف‌ها در نظر گرفت. معمولاً مساحت سطح تماس کوچک است و در سطوح زبر، سهم اصلی مقاومت مربوط به شکاف‌هاست.

جدول ۳-۱ مقاومت گرمایی سطح تماس برای (الف) سطوح تماس فلزی در شرایط خلاء و (ب) سطح تماس آلومینیومی (با زبری سطح μm ۱۰ و فشار N/m^2 10^5) با سیالهای مختلف در سطح تماس [۱].

	مقاومت حرارتی، $R''_{t,c} \times 10^4$ $(m^2.K/W)$			
	(الف) سطح تماس خلاء		(ب) سطح تماس با وجود سیال	
فشار سطح تماس	۱۰۰ kN/m^2	۱۰۰۰۰ kN/m^2	هوا	۲/۷۵
فولاد ضدزنگ	۶-۲۵	۰/۷-۴/۰	هلیوم	۱/۰۵
مس	۱-۱۰	۰/۱-۰/۵	هیدروژن	۰/۷۲۰
منیزیوم	۱/۵-۳/۵	۰/۲-۰/۴	روغن سیلیکان	۰/۵۲۵
آلومینیم	۱/۵-۵/۰	۰/۲-۰/۴	گلیسیرین	۰/۲۶۵

برای جامدهایی که ضریب رسانایی گرمای آنها بیش از سیال موجود در منافذ بین آنهاست، می‌توان با افزایش مساحت سطح تماس مستقیم بین دو فلز، مقاومت سطح تماس راکاهش داد. مقدار افزایش به فشار تماس و زبری سطوح بستگی دارد. مقاومت سطح تماس را می‌توان با استفاده از سیال میانی با ضریب رسانایی بالا نیز کاهش داد. برعکس، خلاء در شکاف‌های بین

Scanned by CamScanner

جدول ۳-۲ مقاومت گرمایی چند سطح تماس جامد - جامد

سطح تماس و مادهٔ حائل	$R''_{t,c}\times10^{4}$ ($m^2.K/W$)	مرجع
تراشهٔ سیلیکان - آلومینیوم صیقلی در هوا (۲۷-۵۰۰ kN/m^2)	۰/۳-۰/۶	[۲]
آلومینیوم - آلومینیوم با فویل ایندیوم (~۱۰۰ kN/m^2)	~۰/۰۷	[۳و۱]
فولاد ضدزنگ - فولاد ضدزنگ با فویل ایندیوم (~۳۵۰۰ kN/m^2)	~۰/۰۴	[۳و۱]
آلومینیوم - آلومینیوم با پوشش فلزی (سرب)	۰/۰۱-۰/۱	[۴]
آلومینیوم - آلومینیوم با گریس ۳۴۰ داو (~۱۰۰ kN/m^2)	~۰/۰۷	[۳و۱]
فولاد ضدزنگ - فولاد ضدزنگ با گریس ۳۴۰ داو (~۳۵۰۰ kN/m^2)	~۰/۰۴	[۳و۱]
تراشهٔ سیلیکان - آلومینیوم با اپکسی به ضخامت ۰/۰۲ mm	۰/۲-۰/۹	[۵]
برنج - برنج با لحیم قلع به ضخامت ۱۵ μm	۰/۰۲۵-۰/۱۴	[۶]

سطوح باعث افزایش مقاومت سطح تماس می‌شود. اگرچه برای پیش‌بینی مقدار $R_{t,c}$ تئوری‌هایی ارائه شده است، ولی نتایج قابل اطمینان غالباً از طریق تجربی به دست می‌آید. جدول ۳-۱الف اثر بارگذاری (فشار) سطح تماس را در شرایط خلاء نشان می‌دهد. اثر سیال میانی بر مقاومت گرمایی سطح تماس آلومینیمی نیز در جدول ۳-۱ب ارائه شده است.

برخلاف نتایج جدول ۳-۱، در بیشتر کاربردها از سطح تماس بین جامدهای متفاوت و مواد پرکنندهٔ مختلف در سطح مشترک استفاده می‌شود (جدول ۳-۲). اگر ضریب رسانایی ماده‌ای که شکاف‌های سطح تماس را پرمی‌کند بیش از هوا باشد مقاومت سطح تماس کاهش خواهد یافت. فلزات نرم و روغن‌های گرمایی دو نوع ماده مناسب برای این کارند. این فلزات که شامل ایندیم، سرب، قلع و نقره‌اند می‌توانند به صورت ورقی نازک بین سطوح تماس و یا به صورت پوشش نازک روی یکی از سطوح تماس به‌کار روند. مزیت گریسهای گرمایی سیلیکانی، توانایی آنها در پرکردن فضای بین سطوح تماس است و این‌که ضریب رسانایی گرمای آن ۵۰ برابر بیشتر از هواست.

برخلاف سطوح تماس فوق، بسیاری از سطوح تماس دارای اتصال دایمی هستند. این اتصال را می‌توان با استفاده از چسب اپکسی، لحیم نرم، سرب یا لحیم سفت مانند آلیاژ طلا - قلع به وجود آورد. به علت وجود مقاومت‌های سطح تماس بین مواد اصلی و مادهٔ اتصال، مقاومت گرمایی واقعی اتصال بیش از مقدار تئوری (L/k) است، که در آن L ضخامت و k

Scanned by CamScanner

ضریب رسانایی گرمای مادهٔ اتصال است. وجود منافذ و ترکها در اتصال چسب اپکسی یا لحیم بر مقاومت گرمایی سطح تماس اثر منفی دارد. این منافذ و ترکها ممکن است طی فرایند تولید یا در اثر بارهای گرمایی در هنگام کارکرد معمولی به وجود آید.

اسنیث[1] و همکاران [۳]، مادسودانا[2] و فلچر[3] [۷] و یوانویچ[4] [۸] بررسی جامعی از مقاومت گرمایی سطح تماس و مدل‌های مربوطه ارائه کرده‌اند.

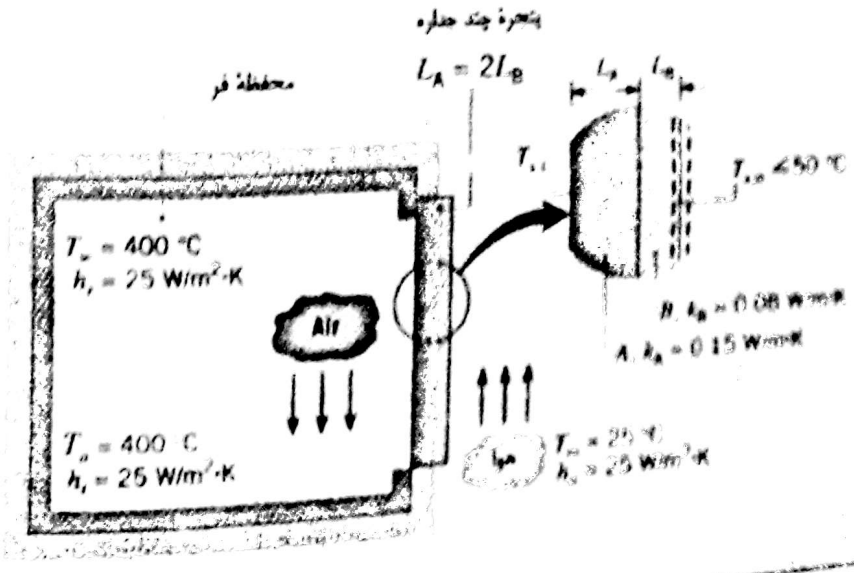
مثال ۳-۱

یک کارخانهٔ مشهور تولیدکنندهٔ وسایل خانگی طرح اجاق گاز خود پاک کنی را پیشنهاد نموده است. در این طرح از پنجره‌ای مرکب که داخل اجاق را از بیرون جدا می‌سازد استفاده می‌شود. این پنجرهٔ مرکب از دو ورق پلاستیکی (A و B) مقاوم در مقابل گرما با ضخامتهای $L_A = 2L_B$ و با ضریب‌های رسانایی $k_A = 0/15$ W/m.K و $k_B = 0/08$ W/m.K ساخته شده است. در طول فرایند خودپاک‌کنی اجاق، دمای دیوارهٔ اجاق و هوای داخل آن، T_w و T_a، برابر با ۴۰۰°C و دمای هوای بیرون T_∞، برابر با ۲۵°C است. ضریب جابه‌جایی و تابش انتقال گرمای داخل h_i و h_r و هم‌چنین ضریب جابه‌جایی بیرون هر کدام تقریباً برابر با ۲۵ W/m².K است. برای آن‌که دمای سطح خارجی پنجره از ۵۰°C بیشتر نشود، حداقل ضخامت پنجره چقدر باید باشد؟ بنابر مقررات ایمنی نباید از این دما تجاوز کرد.

حل:

داده: خواص و ابعاد مربوط به مواد پلاستیکی که در پنجرهٔ مرکب اجاق به کار رفته و شرایطی که در آن اجاق به طور خودکار تمیز می‌شود.

خواسته: ضخامت L_A+L_B که برای عملکرد ایمن لازم است.



۱- Snaith
۲- Madhusudana

Scanned by CamScanner