

به نام خدا

مکانیک سیالات ۲

عنوان: دینامیک توده ای از سیال

مدرس: مجتبی برزویی

دینامیک توده ای از سیال

❖ مقدمه

✓ در فصل قبل، دینامیک جریان غیرلزج از دیدگاه ذره ای مورد بررسی قرار گرفت. برای این منظور، معادلات اولر و برنولی معرفی گردید که در حالت کلی برای سیالات لزج قابل استفاده نبودند. در حالی که در اغلب مسائل مکانیک سیالات، اثرات ناشی از لزجت بر روی خواص جریان و سیال بقدری شدید است که نمیتوان از لزجت سیال چشم پوشی نمود. برای تحلیل مسائلی از این دست، از دو روش انتگرالی و دیفرانسیلی استفاده می شود. روش انتگرالی به مراتب از روش دیفرانسیلی ساده تر می باشد. پیش از توضیح روش انتگرالی، ابتدا بایستی با یکسری مفاهیم اولیه در این زمینه آشنایی پیدا کرد.

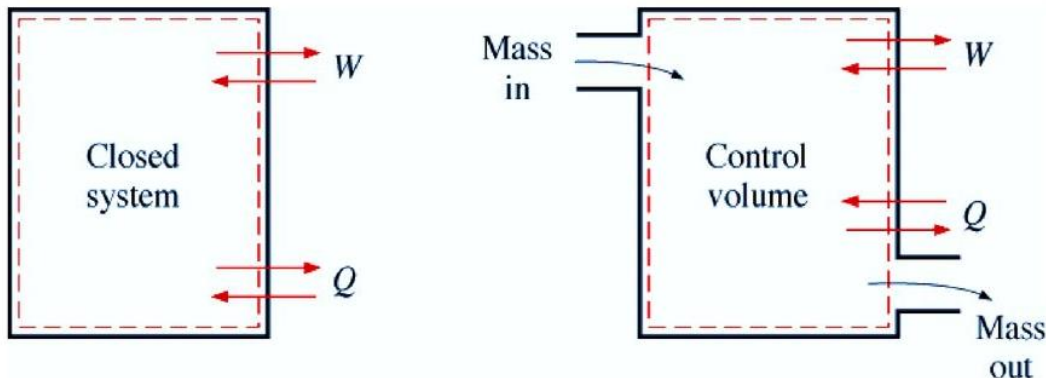
دینامیک توده ای از سیال (روش انتگرالی)

❖ مقدمه

✓ **حجم کنترل:** یک حجم فرضی بسته در فضا که امکان ورود و خروج جرم از آن وجود دارد.

✓ **سیستم:** موجودیتی که دارای جرم ثابت و مرزهای معین می باشد. به مرزهای سیستم نه جرمی وارد میشود و نه جرمی خارج

Difference between closed and open systems



می گردد.

✓ **سطح کنترل:** سطوح و مرزهای حجم کنترل را گویند.

دینامیک توده ای از سیال (روش انتگرالی)

❖ مقدمه

✓ در حیطه کارهای مهندسی برای هر محیط پیوسته چهار قانون اساسی وجود دارد که در قالب معادلات مربوطه بیان می شوند.
این قوانین عبارتند از:

۱. قانون بقاء جرم (*conservation of mass*) : معادله پیوستگی (*continuity equation*)
۲. قانون دوم نیوتن (اصل بقاء ممنتوم (*conservation of momentum*)) : معادله ممنتوم (*momentum equation*)
۳. قانون بقاء انرژی (قانون اول ترمودینامیک) : معادله انرژی (*energy equation*)
۴. قانون دوم ترمودینامیک

دینامیک توده ای از سیال (روش انتگرالی)

❖ معادله پیوستگی (قانون بقاء جرم)

$$\frac{\partial m_{cv}}{\partial t} + \sum \dot{m}_{out} - \sum \dot{m}_{in} = 0$$

steady state cond.: $\sum \dot{m}_{out} = \sum \dot{m}_{in}$ $\xrightarrow{\text{یک ورودی و یک خروجی}}$ $\dot{m}_{out} = \dot{m}_{in}$ or $(\rho Q)_{out} = (\rho Q)_{in}$

incompressible fluid $\xrightarrow{\rho:cte}$ $Q_{out} = Q_{in}$ or $(AV)_{out} = (AV)_{in}$

دینامیک توده ای از سیال (روش انتگرالی)

❖ معادله ممنتوم خطی

$$\vec{M} = \dot{m}\vec{V}$$

$$\sum \vec{F} = \frac{d(\dot{m}\vec{V})_{cv}}{dt} + \sum (\dot{m}\vec{V})_{out} - \sum (\dot{m}\vec{V})_{in}$$

steadu state cond.: $\sum \vec{F} = \sum (\dot{m}\vec{V})_{out} - \sum (\dot{m}\vec{V})_{in} = \sum (\rho Q \vec{V})_{out} - \sum (\rho Q \vec{V})_{in}$

دینامیک توده ای از سیال (روش دیفرانسیلی)

❖ معادله پیوستگی

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\text{incompressible \& steady flow : } \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\text{steady state cond.: } \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

دینامیک توده ای از سیال

❖ معادله پیوستگی

✓ مثال: در یک جریان دوبعدی و غیرقابل تراکم میدان سرعت به صورت رابطه $u = 2x^2 + y^2$ ، $v = yf(x) + x^2$ داده شده

است. تابع $f(x)$ را طوری تعیین کنید که این جریان از نظر فیزیکی قابل قبول باشد. (مکانیک ۸۱)

$$f(x) = -4x + 2y \quad (۴) \quad f(x) = -4x + 2 \quad (۳) \quad f(x) = 4xy \quad (۲) \quad f(x) = -4x \quad (۱)$$

پاسخ: برای اینکه یک پروفیل سرعت از نظر فیزیکی قابل قبول باشد، باید در معادله پیوستگی صدق کند. با توجه به معادله پیوستگی

داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow 4x + f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -4x$$

دینامیک توده ای از سیال (روش دیفرانسیلی)

❖ معادلات ناویر-استوکس

این معادلات، فرم دیفرانسیلی معادله ممنتوم می باشند. معادلات ناویر-استوکس جزو پیچیده ترین معادلات دیفرانسیل در تمام علوم مهندسی به شمار می روند. مشکل عمده این معادلات مربوط به ترم های غیرخطی (ترم های اینرسی) در سمت چپ آنهاست که نه تنها حل این معادلات را بسیار دشوار می کند، بلکه با توجه به ماهیت غیرخطی آنها ممکن است مسئله دارای چندین حل باشد. حل این معادلات بسته به نوع مسئله می تواند دارای "حل دقیق" و یا "حل تشابهی" باشد. در اینجا تعدادی از ساده ترین حل های موجود برای معادلات ناویر-استوکس به روش حل دقیق معرفی می گردد.

با توجه به اینکه مکانیزم های موجود برای به حرکت درآوردن سیال بطور کلی به سه دسته (۱) فشاری، (۲) کششی و (۳) ثقلی تقسیم می شوند، در اسلایدهای بعد از هریک از این سه مکانیزم، مثال ساده ای حل شود.

ویژگی های معادلات ناویر-استوکس

۱. فقط برای سیالات نیوتنی قابل استفاده اند.

۲. فقط برای سیالات غیرقابل تراکم قابل استفاده اند.

۳. هم برای جریان آرام و هم مغشوش قابل استفاده اند.

۴. در این معادلات، ویسکوزیته ثابت است.

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$$

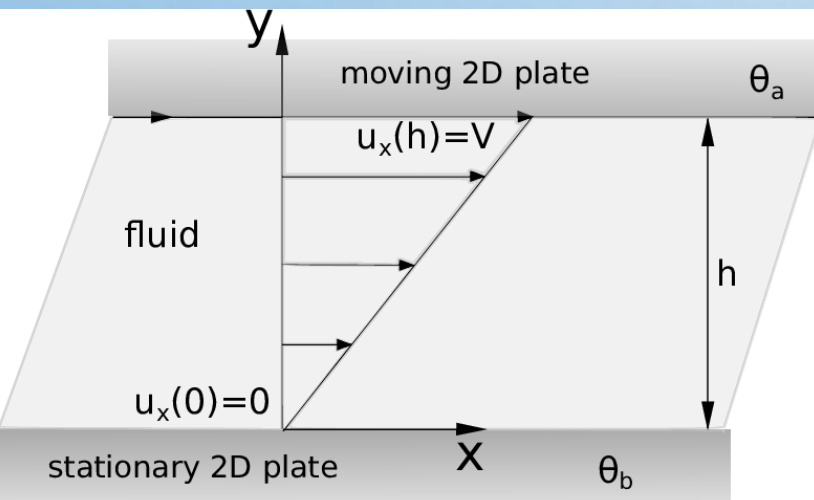
$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$$

دینامیک توده ای از سیال

❖ معادلات ناویر-استوکس

✓ مثال: جریان آرام، دائم و غیرقابل تراکم یک سیال نیوتنی بین دو صفحه موازی افقی بزرگ را اصطلاحاً "جریان کوئت صفحه ای" می گویند که در آن صفحه بالایی متحرک و صفحه پائینی ساکن می باشد. پروفیل سرعت سیال را بدست آورید (از تغییرات سرعت در راستای عمود بر صفحه صرف نظر کنید).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

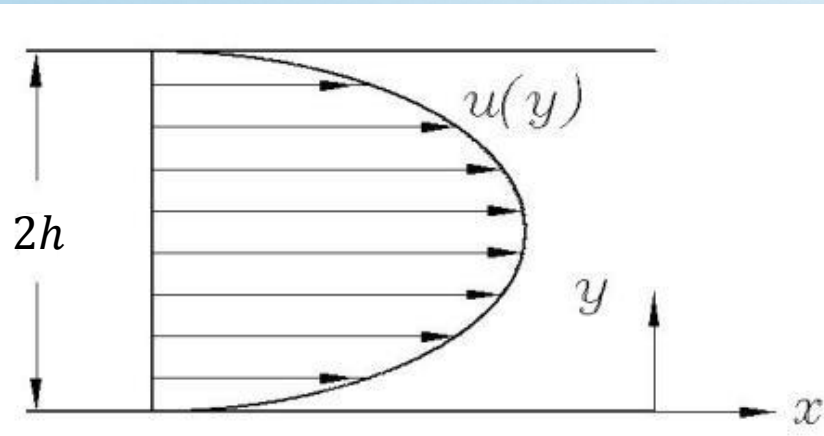


$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$
$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \rightarrow \int \frac{du}{dy} = C_1 \rightarrow \int u(y) = C_1 y + C_2$$
$$B.C \left\{ \begin{array}{l} @y = 0 ; u = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ @y = h ; u = V_{plate} \Rightarrow C_1 = V_{plate} / h \end{array} \right\} \Rightarrow u = \frac{V_{plate}}{h} y$$

دینامیک توده ای از سیال

❖ معادلات ناویر-استوکس

✓ مثال: جریان آرام و دائم یک سیال غیرقابل تراکم نیوتنی در اثر ایجاد گرادیان فشار (مثلاً پمپ) بین دو صفحه موازی (و یا داخل لوله) را "جریان پوآزی" می گویند. پروفیل سرعت در این جریان را به دست آورید (از تغییرات سرعت در راستای عمود بر صفحه صرف نظر کنید و گرادیان فشار را مقداری ثابت در نظر بگیرید).



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$

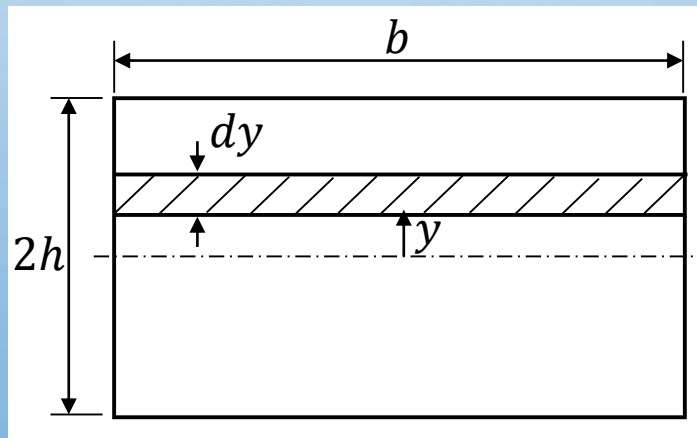
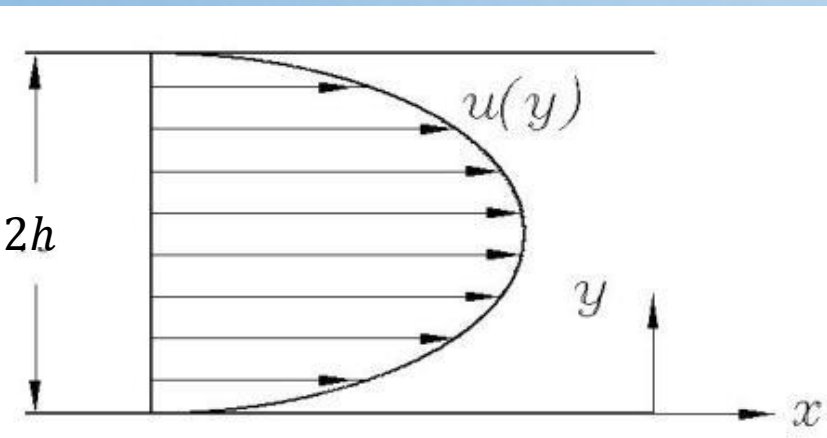
$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \int \frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} y + C_1 \int u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$$
$$B.C \left\{ \begin{array}{l} @y = h ; u = 0 \\ @y = -h ; u = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} C_2 = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h^2 \\ C_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow u = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - h^2)$$

دینامیک توده ای از سیال

❖ معادلات ناویر-استوکس

✓ مثال: در جریان پوآزی بین دو صفحه موازی ساکن، دبی را بدست آورید.

$$Q = 2 \int_0^h \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - h^2) b dy = \frac{b}{\mu} \frac{dp}{dx} \left(\frac{y^3}{3} - h^2 y \right)_0^h \Rightarrow Q = -\frac{2bh^3}{3\mu} \frac{dp}{dx}$$



دینامیک توده ای از سیال

❖ معادلات ناویر-استوکس

نکته: در سطح مشترک مایعات و گازها، گرادیان سرعت در راستای قائم برابر با صفر است؛ بنابراین در سطح آزاد، تنش برشی برابر با صفر می باشد.

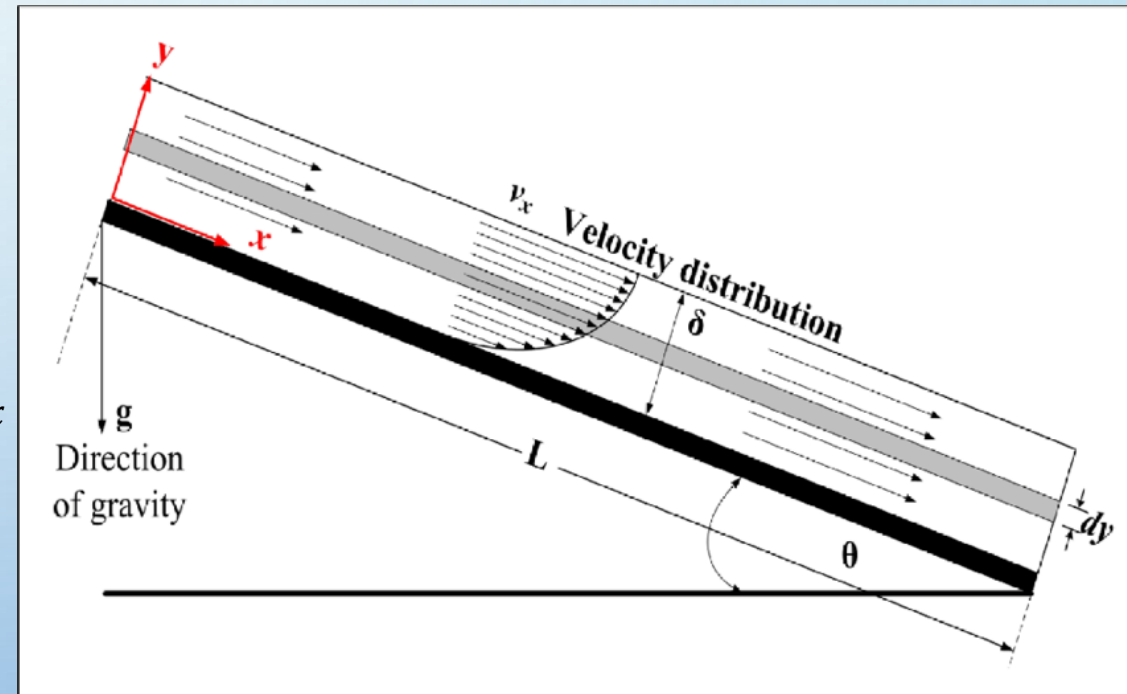
$$\frac{du}{dy} = 0$$

✓ مثال: پروفیل سرعت جریان ثقیلی زیر را بدست آورید (جریان آرام، دائم، تراکم ناپذیر می باشد).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$$
$$\rightarrow 0 = \mu \left(\frac{d^2 u}{dy^2} \right) + \rho g \sin \theta \rightarrow u(y) = - \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \left(\frac{y^2}{2} \right) + c_1 y + c_2$$

$$B.C \left\{ \begin{array}{l} @y = 0 ; u = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ @y = h ; du/dy = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \cdot h \end{array} \right\} \Rightarrow u(y) = \frac{\gamma \sin \theta}{\mu} \left(hy - \frac{y^2}{2} \right)$$



دینامیک توده ای از سیال

❖ تابع جریان

یادآوری: در جریان غیر چرخشی، تابع پتانسیل سرعت بصورت زیر تعریف می شود:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} ; v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} ; w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

✓ اگر جریان دوبعدی و تراکم ناپذیر باشد، تابع جریان (ψ) بصورت زیر تعریف می شود:

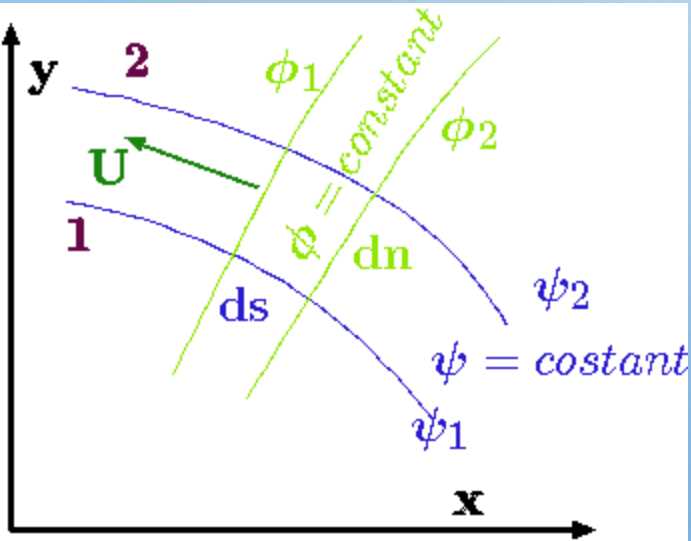
$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

✓ نکته ۱: تابع جریان در حقیقت معادله خطوط جریان می باشد. به عبارت دیگر هر خط جریان یک خط ψ ثابت می باشد؛ یعنی مقدار ψ برای نقاط واقع بر یک خط جریان، یکسان است.

✓ نکته ۲: برای بدست آوردن دبی بین دو خط جریان از رابطه زیر استفاده می شود:

$$Q = b|\psi_2 - \psi_1|$$



دینامیک توده ای از سیال

❖ تابع پتانسیل و تابع جریان

✓ مثال: در یک جریان دوبعدی، تابع پتانسیل بصورت رابطه $\phi(x, y) = x^2 + y^2$ داده شده است. آیا می توان با استفاده از معادله برنولی، اختلاف فشار بین دو نقطه دلخواه را در این جریان بدست آورد؟ (مکانیک ۸۱)

(۱) خیر؛ چون جریان غیردائم است. (۲) خیر؛ چون جریان تراکم پذیر است.

(۳) بله؛ چون جریان غیرچرخشی است. (۴) بله؛ چون جریان دائم است.

پاسخ: معادله برنولی تنها برای سیالات تراکم ناپذیر معتبر است. اگر مولفه های سرعت را از تابع پتانسیل محاسبه کنیم، خواهیم دید که جریان از نوع تراکم پذیر است. در نتیجه استفاده از معادله برنولی حتی برای یک ذره نیز مجاز نیست (چه رسد به دو ذره دلخواه).

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = 2x \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{V} \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 4 \neq 0$$

دینامیک توده ای از سیال

❖ تابع پتانسیل و تابع جریان

✓ مثال: در یک جریان دوبعدی و غیرقابل تراکم، تابع جریان بصورت رابطه $\psi(x,y) = (x^2 + y^2)$ داده شده است. آیا می توان به کمک معادله برنولی اختلاف فشار بین دو نقطه $(1,1)$ و $(1,2)$ را در این جریان بدست آورد؟

(۱) بله؛ چون جریان غیرچرخشی است. (۲) خیر؛ چون جریان چرخشی است.

(۳) خیر؛ چون دو نقطه روی یک خط جریان قرار ندارند. (۴) بله؛ چون جریان دائم و غیرقابل تراکم است.

پاسخ: با توجه به اینکه جریان از نوع چرخشی است و دو نقطه بر روی دو خط جریان قرار دارند، نمی توان از معادله برنولی استفاده کرد.

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2y \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -2 \neq 0$$

دینامیک توده ای از سیال

❖ نکات مهم

- ✓ معادلات ناویر-استوکس تنها برای سیالات نیوتنی قابل استفاده هستند.
- ✓ معادلات ناویر-استوکس هم برای سیالات قابل تراکم و هم غیرقابل تراکم معتبر هستند.
- ✓ معادلات ناویر-استوکس هم در جریان آرام و هم در جریان درهم قابل استفاده اند.
- ✓ معادلات ناویر-استوکس در حالت کلی دارای حل تحلیلی نیستند.
- ✓ به دلیل وجود ترم های اینرسی (که غیرخطی هستند) حل معادلات ناویر-استوکس منحصر بفرد نیست.
- ✓ در معادلات ناویر-استوکس، ویسکوزیته سیال می تواند متغیر باشد (مثلاً در اثر گرادیان درجه حرارت).
- ✓ در معادله پیوستگی، دانسیته سیال می تواند متغیر باشد (مثلاً در اثر گرادیان درجه حرارت).

دینامیک توده ای از سیال

❖ نکات مهم

- ✓ تابع جریان فقط در جریان دوبعدی و غیرقابل تراکم کاربرد دارد.
- ✓ اختلاف بین دو خط جریان معرف دبی عبوری بین این دو خط است.
- ✓ نزدیک شدن خطوط جریان به یکدیگر به معنای شتاب گرفتن سیال است و برعکس.
- ✓ تابع جریان هم در جریان لزج و هم در جریان غیرلزج قابل تعریف است.

پایان فصل سوم

خسته نباشد