

بہ نام خدا

مکانیک سیالات ۲

عنوان: مباحث سینماتیکی

مدرس: مجتبیٰ برزویی

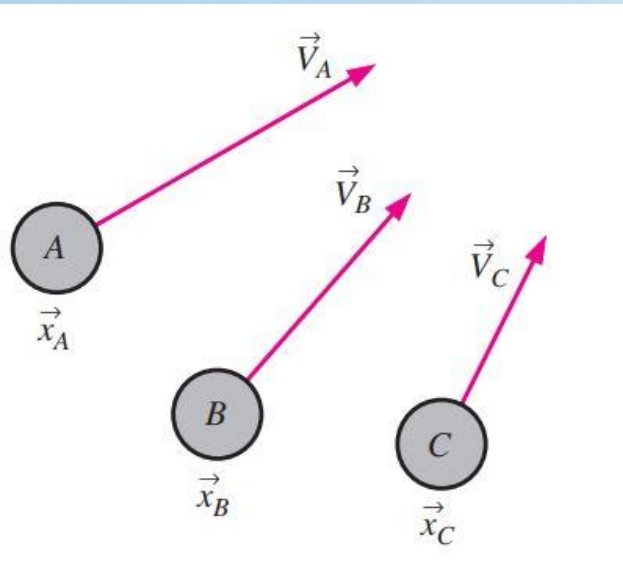
جلسہ دوم - ۹۹/۷/۲۰

مباحث سینماتیکی

❖ سینماتیک ذرات سیال

✓ دیدگاه لاگرانژی

- در این دیدگاه، برای تبیین سرعت و شتاب ذرات سیال، حرکت ذرات در طول مسیر دنبال می شود.



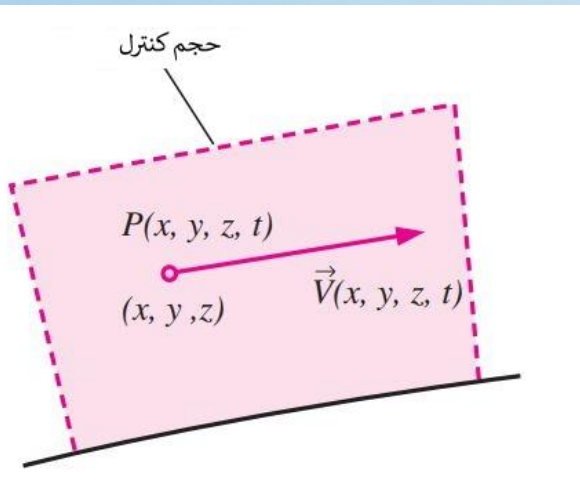
- متغیرهای مستقل در این دیدگاه عبارتند از: x_0, y_0, z_0, t
- حالت پایا در این دیدگاه وجود ندارد و تمام مسائل بصورت گذرا حل می گردند.
- کاربرد اصلی این دیدگاه در مکانیک جامدات است و در مکانیک سیالات بدلیل زیاد بودن تعداد ذرات تشکیل دهنده سیال، استفاده از این دیدگاه تقریباً غیرممکن است.

مباحث سینماتیکی

❖ سینماتیک ذرات سیال

✓ دیدگاه اولری

- در این دیدگاه، ذرات سیال در طول مسیر دنبال نمی شوند؛ بلکه حرکت آنها در داخل حجم کنترل هایی که از لحاظ مکانی موقعیت ثابتی دارند، مورد بررسی قرار می گیرد.
- متغیرهای مستقل در این دیدگاه عبارتند از: x, y, z, t
- برخلاف دیدگاه لاگرانژی، در این دیدگاه می توان مسائل را بصورت پایا در نظر گرفت.
- بدلیل آنکه در این روش، همواره توده ای از سیال از داخل حجم کنترل عبور می کند، بنابراین کاربرد گسترده ای در مکانیک سیالات دارد.



مباحث سینماتیکی

❖ یادآوری ریاضی

✓ عملگر نابلا

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

۱. اگر عملگر نابلا بر روی یک اسکالر (مانند T) عمل کند، حاصل را "گرادیان" می نامند. گرادیان، یک بردار است:

$$\vec{\nabla} T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

۲. اگر عملگر نابلا در یک بردار ضرب داخلی شود، حاصل را "دیورژانس" گویند. دیورژانس، یک اسکالر است:

$$\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (u, v, w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

مباحث سینماتیکی

❖ یادآوری ریاضی

✓ عملگر نابلا

۳. اگر عملگر نابلا در یک بردار ضرب خارجی شود، حاصل را "کرل" گویند. کرل، یک بردار است:

$$\text{curl } \vec{V} = \vec{V} \times \vec{V} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{bmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

۴. اگر عملگر نابلا در بردار گرادیان ضرب داخلی شود، حاصل را "لاپلاسین" می نامند. لاپلاسین، یک اسکالر است.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} T = \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

مباحث سینماتیکی

❖ قضیه مشتق مادی

فرض کنید B خاصیت دلخواهی از یک سیال یا یک جریان باشد (مثلاً دانسیته، دما، سرعت و...). همانطور که به آن اشاره شد، در دیدگاه اولری خاصیت B بصورت تابعی پیوسته از مکان و زمان داده می شود.

به عنوان مثال، در مختصات کارتیزین داریم $B = B(x, y, z, t)$ ؛ در نتیجه، در این دیدگاه می توان دیفرانسیل کامل B را بصورت زیر نوشت:

$$dB = \frac{\partial B}{\partial t} dt + \frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy + \frac{\partial B}{\partial z} dz$$

در نتیجه نرخ زمانی تغییر در خاصیت B بصورت زیر بدست می آید:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{\partial B}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt} \right) + \frac{\partial B}{\partial z} \left(\frac{dz}{dt} \right)$$

باتوجه به تعریف مولف های سرعت در مختصات کارتیزین داریم:

$$\xrightarrow{u=\frac{dx}{dt}; v=\frac{dy}{dt}; w=\frac{dz}{dt}} \frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + u \frac{\partial B}{\partial x} + v \frac{\partial B}{\partial y} + w \frac{\partial B}{\partial z} \longrightarrow \frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) B \longrightarrow \boxed{\frac{DB}{Dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) B}$$

مباحث سینماتیکی

❖ قضیه مشتق مادی

در رابطه اسلاید قبل $\frac{DB}{Dt}$ نرخ زمانی تغییر در خاصیت B از نقطه نظر لاگرانژی است. قضیه مشتق مادی نشان می دهد که برای بدست

آوردن کمیت مزبور (یعنی $\frac{DB}{Dt}$) نیازی به تعقیب ذره وجود ندارد و می توان با معلوم بودن میدان سرعت و میدان B براحتی به $\frac{DB}{Dt}$ رسید. در

حقیقت، با استفاده از قضیه مشتق مادی می توان شتاب ذرات سیال را بدون اینکه نیازی به دنبال کردن آنها وجود داشته باشد، با استفاده از

میدان سرعت اولری بدست آورد. برای این منظور کافی است در این قضیه بجای B بردار سرعت $\vec{V}$ را قرار دهیم. در این صورت بردار شتاب

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$$

ذره ($\vec{a}$) بصورت زیر بدست می آید:

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

به عنوان مثال در دستگاه مختصات کارتزین داریم:

مباحث سینماتیکی

❖ قضیه مشتق مادی

مثال ۱: فرض کنید میدان سرعت دودهای خروجی از آگزوز موتور یک نوع اتومبیل بصورت رابطه $\vec{V}(x,y,t) = (x+t)\hat{i} - (y)\hat{j} + \hat{k}$ بر حسب m/s داده شده باشد. شتاب یک ذره UHC واقع در نقطه $(1,1)$ در لحظه $t = 0$ چقدر است؟

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = 1 + (x+t)|_{t=0} = 1 + x = 2 \left(\frac{m}{s} \right)$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -y(-1) = y = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{5} \left(\frac{m}{s} \right)$$

مباحث سینماتیکی

❖ انواع جریان

جریان قابل تراکم و جریان تراکم ناپذیر

جریان سیال غیرقابل تراکم را "جریان تراکم ناپذیر" می گویند. با دانستن این موضوع که در جهان هستی سیال غیرقابل تراکم به

معنای مطلق کلمه وجود ندارد، اما چنانچه عدد ماخ جریان شرط $M \leq 0.3$ را ارضاء نماید، $\Delta\rho/\rho$ به قدری کوچک می شود که

می توان از اثرات ناشی از تراکم پذیری سیال چشم پوشی نموده و جریان را تراکم ناپذیر در نظر گرفت. جریانی که عدد ماخ آن

بزرگتر از ۰.۳ باشد، "جریان قابل تراکم" نام دارد.

عدد ماخ : نسبت سرعت سیال یا جسم
به سرعت صوت در سیال مورد نظر.

مباحث سینماتیکی

❖ انواع جریان

جریان لزج و جریان غیر لزج

جریان لزج جریانی است که در آن تنش برشی مخالف صفر باشد. هر جریانی که در آن تنش برشی برابر با صفر باشد، "جریان غیرلزج" نامیده می شود. اگر سیال، غیرلزج باشد، بدیهی است که جریان آن جریانی از نوع غیرلزج خواهد بود. در مورد سیالات لزج این امکان وجود دارد که در موارد خاص، به علت عدم وجود گرادیان سرعت (خطی یا زاویه ای) جریان از نوع غیرلزج (یعنی $\tau = 0$) باشد.

مباحث سینماتیکی

❖ انواع جریان

جریان ایده آل و جریان غیر ایده آل

جریانی که هم تراکم ناپذیر و هم غیرلزج باشد، جریان ایده آل محسوب می شود. برای ایده آل بودن یک جریان لازم است هر دو شرط بالا برقرار باشند ولی برای غیر ایده آل بودن جریان کافی است فقط یکی از این دو شرط نقض شود.

جریان دائم و جریان غیردائم

جریان دائم جریانی است که در آن تمام خواص سیال (مانند دانسیته)، تمام خواص جریان (مانند بردار سرعت) و تمام خواص هندسی درگیر در مسئله (مانند زبری جدار داخلی لوله) مستقل از زمان باشند. برای غیردائم بودن جریان کافی است فقط یکی از این پارامترها تابع زمان باشند.

مباحث سینماتیکی

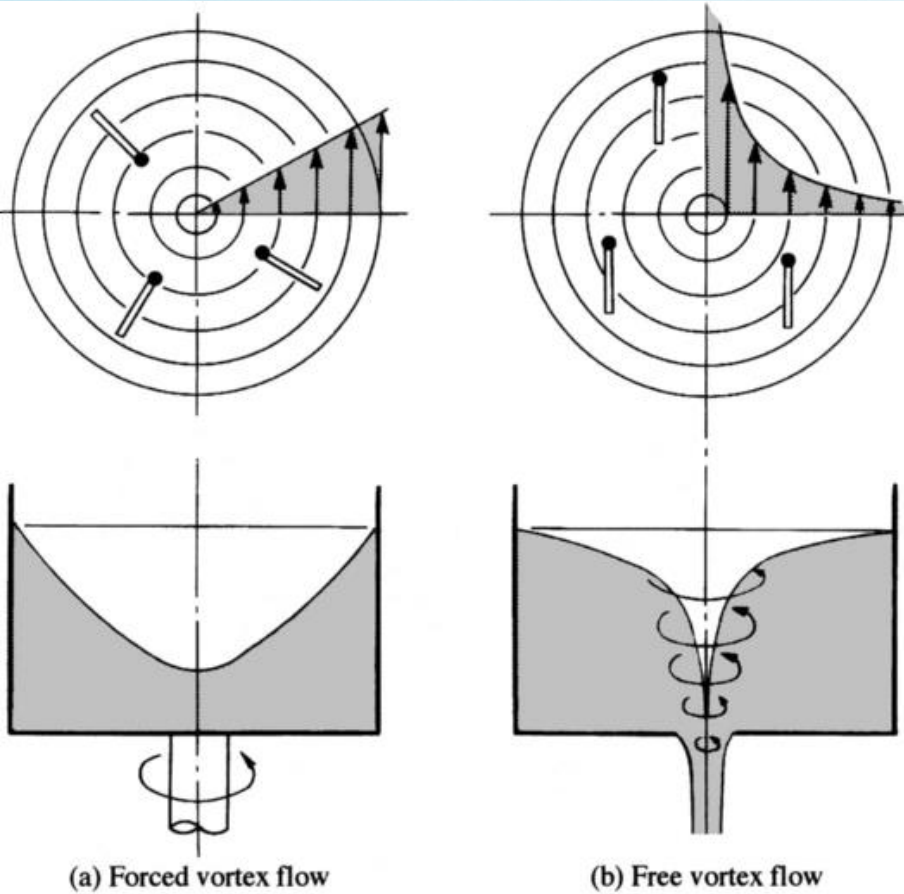
❖ انواع جریان

جریان چرخشی و جریان غیرچرخشی

جریان چرخشی جریانی است که در آن ذرات سیال حول مرکز ثقل خود در حال چرخش باشند. در غیر اینصورت جریان، غیرچرخشی نامیده می شود.

شرط غیرچرخشی بودن جریان: کرل بردار سرعت که با نام **برداری ورتیسیتی** (ζ) معرفی می شود، برابر با صفر باشد.

$$\vec{\zeta} = \text{curl } \vec{V} = \vec{V} \times \vec{V} = \hat{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$



(a) Forced vortex flow

(b) Free vortex flow

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} (\vec{V} \times \vec{V})$$

نکته: بردار ورتیسیتی، دوبرابر بردار سرعت زاویه ای ذرات سیال است:

مباحث سینماتیکی

❖ انواع جریان

جریان چرخشی و جریان غیرچرخشی

در حالت کلی، دو عامل موجب ایجاد چرخش در ذرات سیال می گردد که عبارتند از: (۱) تنش برشی، (۲) فشار.

✓ تنش برشی از آنجا که منجر به تغییر شکل زاویه ای می شود، می تواند موجب چرخش ذرات سیال شود.

✓ برای اینکه فشار بتواند موجب چرخش ذرات سیال شود، لازم است خطوط فشار ثابت روی سطح ذره و خطوط چگالی ثابت

موازی هم نباشند. این وضعیت هنگامی پیش می آید که مثلاً میدان دما غیریکنواخت باشد. در چنین شرایطی مرکز ثقل ذره از

محور تقارن آن فاصله گرفته و امکان چرخش ذره در اثر فشار بوجود می آید. در مورد سیالات غیرقابل تراکم و نیز سیالاتی که

دانسیته آنها فقط به فشار بستگی دارد (سیالات باروتروپیک)، از آنجا که خطوط فشار ثابت و خطوط دانسیته ثابت موازی هم

هستند، مرکز ثقل ذره همچنان بر محور تقارن آن قرار می گیرد و امکان چرخش ذرات سیال در اثر فشار وجود ندارد.

مباحث سینماتیکی

❖ انواع جریان

جریان پتانسیل و جریان غیرپتانسیل

اگر جریان غیرچرخشی باشد، می توان تابعی به نام "تابع پتانسیل سرعت (φ)" برای آن تعریف کرد. طبق تعریف، جریان پتانسیل جریانی است که بتوان در آن بردار سرعت را از رابطه زیر به دست آورد:

$$\vec{V} = \vec{V}\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \rightarrow \begin{cases} u = \partial \varphi / \partial x \\ v = \partial \varphi / \partial y \\ w = \partial \varphi / \partial z \end{cases}$$

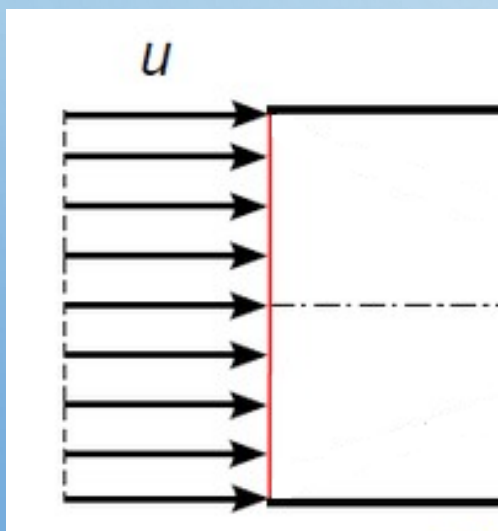
لازم به ذکر است که تابع پتانسیل می تواند در حالت کلی، سه بعدی و غیردائم نیز باشد.

مباحث سینماتیکی

❖ انواع جریان

جریان یکنواخت و جریان غیریکنواخت

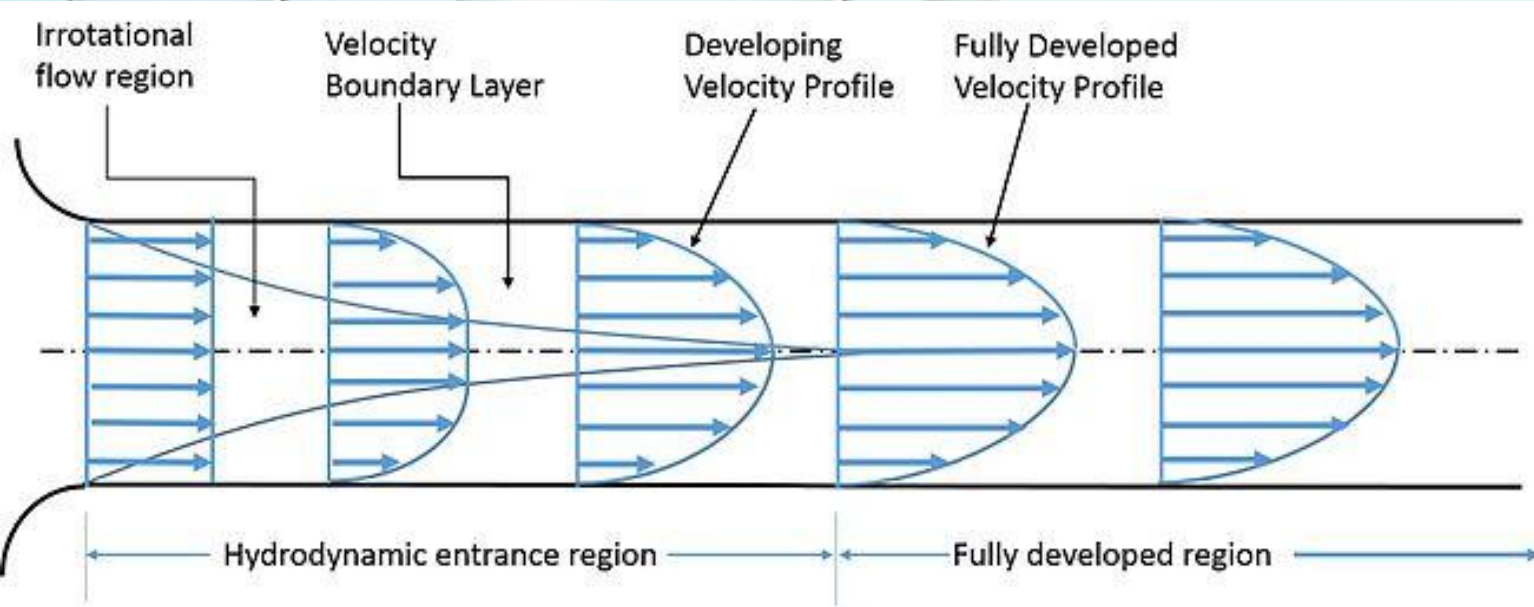
در صورتی که ذرات مختلف سیال دارای سرعت یکسان از نظر اندازه و جهت باشند، جریان را "یکنواخت" و در غیر اینصورت آن را "غیریکنواخت" گویند. میدان یکنواخت به معنی مطلق کلمه، مختص سیالات غیرلزج است. درمورد سیالات لزج، ارضای شرط عدم لغزش در دیواره ها موجب غیریکنواخت شدن میدان جریان می شود. در مورد سیالات لزج، مشاهدات تجربی حاکی از آن است که در مقطع ورودی لوله ها و کانال ها می توان پروفیل سرعت را با دقت قابل قبولی یکنواخت در نظر گرفت.



مباحث سینماتیکی

❖ انواع جریان

جریان توسعه یافته و جریان توسعه نیافته



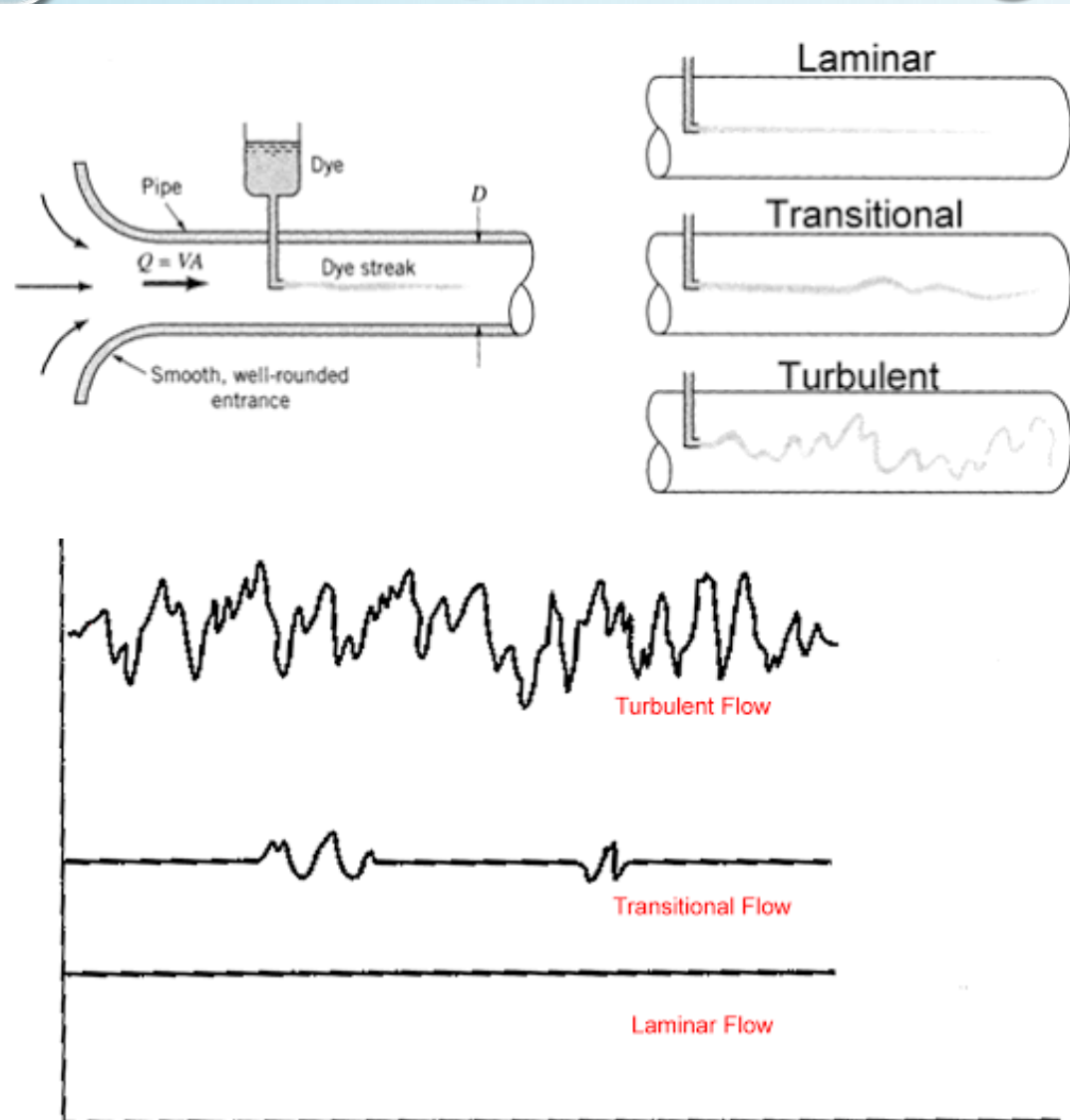
در ورودی لوله ها و کانال ها می توان با دقت قابل قبولی پروفیل سرعت را حتی برای سیالات لزج نیز یکنواخت در نظر گرفت، اما به محض ورود سیال به داخل لوله، آن دسته از ذراتی که در تماس مستقیم با دیواره قرار می گیرند، به دلیل شرط عدم لغزش، به سرعت صفر می رسند؛ در نتیجه، پروفیل سرعت در داخل لوله به سرعت از حالت یکنواخت خارج می شود. با حرکت سیال به سمت جلو، تعداد ذراتی که تحت تاثیر دیواره قرار می گیرند به طور پیوسته افزایش می یابد و این امر به معنای رشد لایه مرزی از دیواره به سمت مرکز لوله است. در یک لوله، رشد ضخامت لایه مرزی می تواند حداکثر تا مرکز لوله ادامه یابد؛ در نتیجه از مقطع خاصی به بعد شکل پروفیل سرعت ثابت می ماند. به این ناحیه از لوله، "ناحیه توسعه یافته" و به جریان در این ناحیه، "جریان توسعه یافته" گفته می شود. طول لوله از مقطع ورود تا این مقطع خاص را نیز "طول توسعه نیافته" یا "طول ورود" می نامند.

مباحث سینماتیکی

❖ انواع جریان

جریان آرام، درهم و گذرا

جریان آرام جریانی است که تبادل ممنتوم بین لایه های مجاور هم در مقیاس میکروسکوپی (یا مولکولی) صورت گیرد. در جریان درهم این تبادل ممنتوم به صورت ماکروسکوپی و در مقیاس بزرگ (که با چشم غیرمسلح نیز قابل مشاهده اند) صورت می گیرد. در جریان گذرا، در لحظات خاصی از زمان، به طور کاملاً تصادفی، تبادل ممنتوم در مقیاس ماکروسکوپی و در لحظاتی دیگر در مقیاس میکروسکوپی صورت می گیرد.



مباحث سینماتیکی

❖ انواع جریان

جریان یک بعدی، دو بعدی و سه بعدی

بعد یک جریان برابر است با تعداد مولفه های مکانی ظاهر شده در بردار سرعت و یا یکی دیگر از پارامترهای درگیر در مسئله (مانند دانسیته، ویسکوزیته و یا دما).

جریان یک جهته، دو جهته و سه جهته

تعداد جهت یک جریان برابر است با تعداد مولفه های غیر صفر در بردار سرعت آن.

مثال ۲: در یک کانال، میدان سرعت به صورت رابطه $\vec{V}(x,y,z,t) = (x + t^2)\hat{i} - (yz)\hat{j}$ داده شده است. این جریان چند بعدی و چند جهته است؟

پاسخ: این جریان، سه بعدی، دو جهته و غیر دائم است.