

بہ نام خدا

مکانیک سیالات ۲

فصل اول

عنوان: مباحث سینماتیکی

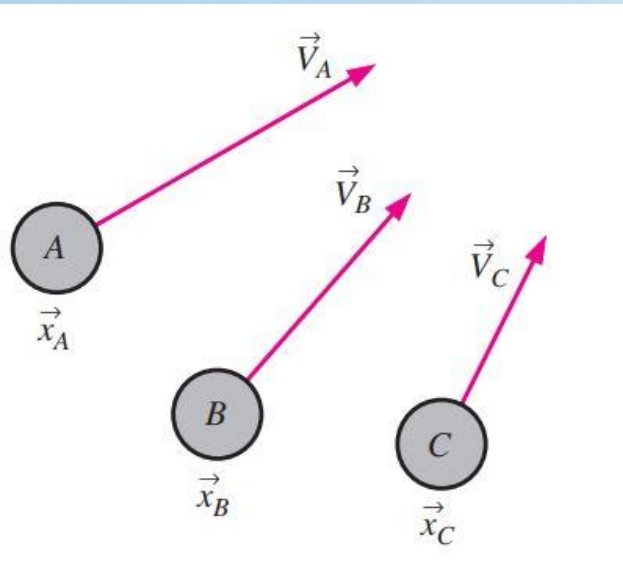
مدرس: مجتبیٰ برزویی

مباحث سینماتیکی

❖ سینماتیک ذرات سیال

✓ دیدگاه لاگرانژی

- در این دیدگاه، برای تبیین سرعت و شتاب ذرات سیال، حرکت ذرات در طول مسیر دنبال می شود.



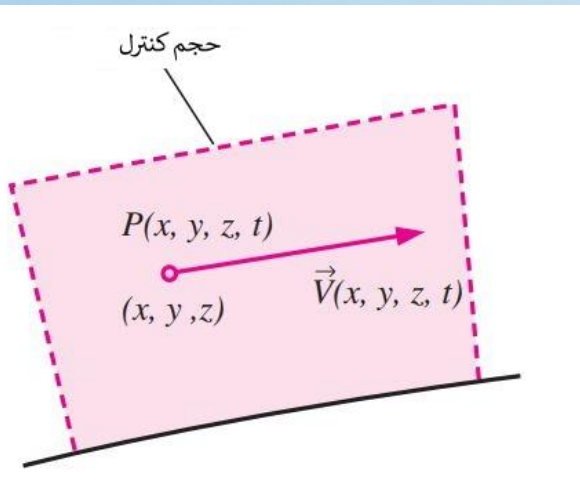
- متغیرهای مستقل در این دیدگاه عبارتند از: x_0, y_0, z_0, t
- حالت پایا در این دیدگاه وجود ندارد و تمام مسائل بصورت گذرا حل می گردند.
- کاربرد اصلی این دیدگاه در مکانیک جامدات است و در مکانیک سیالات بدلیل زیاد بودن تعداد ذرات تشکیل دهنده سیال، استفاده از این دیدگاه تقریباً غیرممکن است.

مباحث سینماتیکی

❖ سینماتیک ذرات سیال

✓ دیدگاه اولری

- در این دیدگاه، ذرات سیال در طول مسیر دنبال نمی شوند؛ بلکه حرکت آنها در داخل حجم کنترل هایی که از لحاظ مکانی موقعیت ثابتی دارند، مورد بررسی قرار می گیرد.
- متغیرهای مستقل در این دیدگاه عبارتند از: x, y, z, t
- برخلاف دیدگاه لاگرانژی، در این دیدگاه می توان مسائل را بصورت پایا در نظر گرفت.
- بدلیل آنکه در این روش، همواره توده ای از سیال از داخل حجم کنترل عبور می کند، بنابراین کاربرد گسترده ای در مکانیک سیالات دارد.



مباحث سینماتیکی

❖ یادآوری ریاضی

✓ عملگر نابلا

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

۱. اگر عملگر نابلا بر روی یک اسکالر (مانند T) عمل کند، حاصل را "گرادیان" می نامند. گرادیان، یک بردار است:

$$\vec{\nabla} T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

۲. اگر عملگر نابلا در یک بردار ضرب داخلی شود، حاصل را "دیورژانس" گویند. دیورژانس، یک اسکالر است:

$$\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (u, v, w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

مباحث سینماتیکی

❖ یادآوری ریاضی

✓ عملگر نابلا

۳. اگر عملگر نابلا در یک بردار ضرب خارجی شود، حاصل را "کرل" گویند. کرل، یک بردار است:

$$\text{curl } \vec{V} = \vec{V} \times \vec{V} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{bmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

۴. اگر عملگر نابلا در بردار گرادیان ضرب داخلی شود، حاصل را "لاپلاسین" می نامند. لاپلاسین، یک اسکالر است.

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} T = \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

مباحث سینماتیکی

❖ قضیه مشتق مادی

فرض کنید B خاصیت دلخواهی از یک سیال یا یک جریان باشد (مثلاً دانسیته، دما، سرعت و...). همانطور که به آن اشاره شد، در دیدگاه اولری خاصیت B بصورت تابعی پیوسته از مکان و زمان داده می شود.

به عنوان مثال، در مختصات کارتیزین داریم $B = B(x, y, z, t)$ ؛ در نتیجه، در این دیدگاه می توان دیفرانسیل کامل B را بصورت زیر نوشت:

$$dB = \frac{\partial B}{\partial t} dt + \frac{\partial B}{\partial x} dx + \frac{\partial B}{\partial y} dy + \frac{\partial B}{\partial z} dz$$

در نتیجه نرخ زمانی تغییر در خاصیت B بصورت زیر بدست می آید:

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt} \right) + \frac{\partial B}{\partial y} \left(\frac{dy}{dt} \right) + \frac{\partial B}{\partial z} \left(\frac{dz}{dt} \right)$$

باتوجه به تعریف مولف های سرعت در مختصات کارتیزین داریم:

$$\xrightarrow{u=\frac{dx}{dt}; v=\frac{dy}{dt}; w=\frac{dz}{dt}} \frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + u \frac{\partial B}{\partial x} + v \frac{\partial B}{\partial y} + w \frac{\partial B}{\partial z} \longrightarrow \frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) B \longrightarrow \boxed{\frac{DB}{Dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) B}$$

مباحث سینماتیکی

❖ قضیه مشتق مادی

در رابطه اسلاید قبل $\frac{DB}{Dt}$ نرخ زمانی تغییر در خاصیت B از نقطه نظر لاگرانژی است. قضیه مشتق مادی نشان می دهد که برای بدست

آوردن کمیت مزبور (یعنی $\frac{DB}{Dt}$) نیازی به تعقیب ذره وجود ندارد و می توان با معلوم بودن میدان سرعت و میدان B براحتی به $\frac{DB}{Dt}$ رسید. در

حقیقت، با استفاده از قضیه مشتق مادی می توان شتاب ذرات سیال را بدون اینکه نیازی به دنبال کردن آنها وجود داشته باشد، با استفاده از

میدان سرعت اولری بدست آورد. برای این منظور کافی است در این قضیه بجای B بردار سرعت $\vec{V}$ را قرار دهیم. در این صورت بردار شتاب

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V}$$

ذره ($\vec{a}$) بصورت زیر بدست می آید:

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}$$

به عنوان مثال در دستگاه مختصات کارتزین داریم:

مباحث سینماتیکی

❖ قضیه مشتق مادی

مثال ۱: فرض کنید میدان سرعت دودهای خروجی از آگزوز موتور یک نوع اتومبیل بصورت رابطه $\vec{V}(x,y,t) = (x+t)\hat{i} - (y)\hat{j} + \hat{k}$ بر حسب m/s داده شده باشد. شتاب یک ذره UHC واقع در نقطه $(1,1)$ در لحظه $t = 0$ چقدر است؟

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = 1 + (x+t)|_{t=0} = 1 + x = 2 \left(\frac{m}{s} \right)$$

$$a_y = \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -y(-1) = y = 1$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{5} \left(\frac{m}{s} \right)$$