

به نام خدا

انتقال حرارت ۱

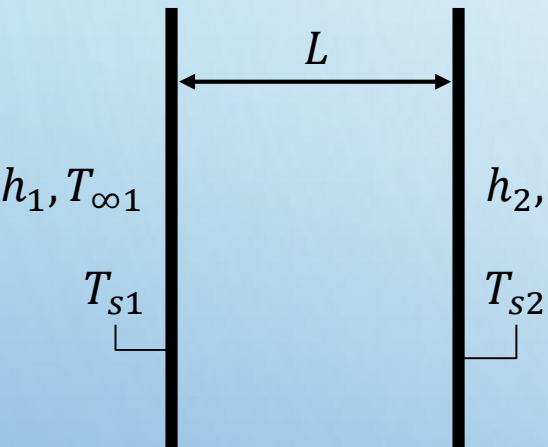
فصل سوم

عنوان: رسانش یک بعدی پایا

مدرس: مجتبیٰ برزویی

رسانش یک بعدی پایا

✓ بسیاری از محاسبات انتقال حرارت رسانش در شرایط پایا انجام می شوند. مثال هایی از این قبیل را می توان در محاسبات بار حرارتی و بار برودتی ساختمان ها، عایق کاری لوله ها، تاسیسات حرارتی و مواردی از این قبیل مشاهده کرد.



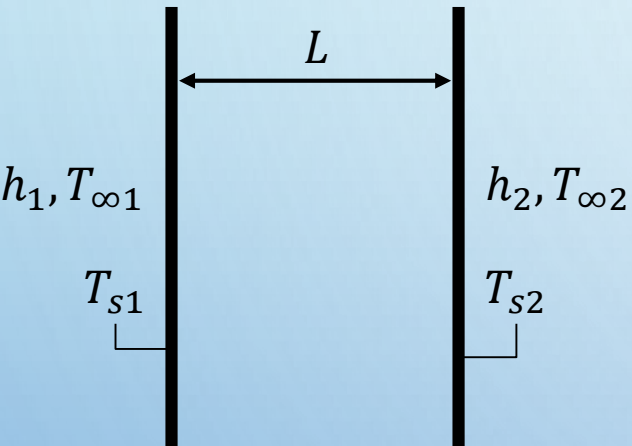
اکنون شرایط یک بعدی، پایا و بدون تولید حرارت داخلی را در داخل یک دیواره مطابق شکل در نظر بگیرید. در اینجا هدف به دست آوردن نرخ انتقال حرارت گذرنده از دیواره است. نشان داده می شود که استفاده از روشی تحت عنوان "تشابه الکتریکی" حجم محاسبات را کاهش و احتمال رخداد اشتباه محاسباتی را کاهش می دهد.

رسانش یک بعدی پایا

✓ تشابه الکتریکی (*Electrical Analogy*)

قانون فوریه برای حرارت منتقل شده از دیواره سمت چپ به دیواره سمت راست عبارتست از:

$$q = \frac{kA}{L} (T_{s1} - T_{s2})$$



اگر معادله بالا به صورت زیر بازنویسی شده

$$q = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\frac{L}{kA}}$$

و با قانون اهم ($i = \frac{\Delta V}{R}$) در الکتریسیته مقایسه شود، تشابهی بین انتقال گرما و جریان الکتریکی مشاهده

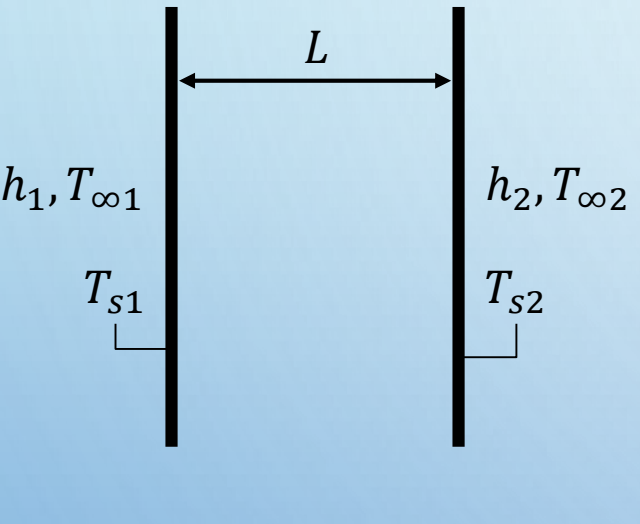
می شود و میتوان پارامتر جدیدی با عنوان "مقاومت رسانشی" به صورت زیر تعریف کرد:

$$R_k = \frac{L}{kA}$$

رسانش یک بعدی پایا

✓ تشابه الکتریکی (*Electrical Analogy*)

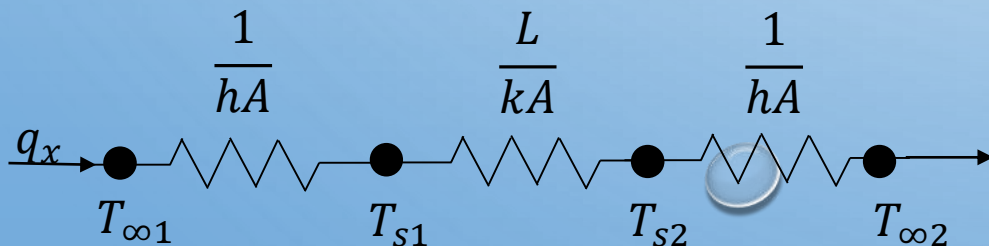
همین عمل را می توان برای انتقال حرارت جابجایی نیز انجام داد و مقاومتی تحت عنوان "مقاومت حرارتی جابجایی" تعریف کرد. قانون سرمایش نیوتن می دهد:


$$q = hA(T_s - T_{\infty})$$

$$q = \frac{T_s - T_{\infty}}{\frac{1}{hA}} \rightarrow R_h = \frac{1}{hA}$$

پس:

از آنجا که حرارت عبوری در دیوار فوق ثابت است، می توان یک مدار الکتریکی مطابق شکل زیر برای حرارت عبوری تعریف نمود.



رسانش یک بعدی پایا

✓ تشابه الکتریکی (*Electrical Analogy*)

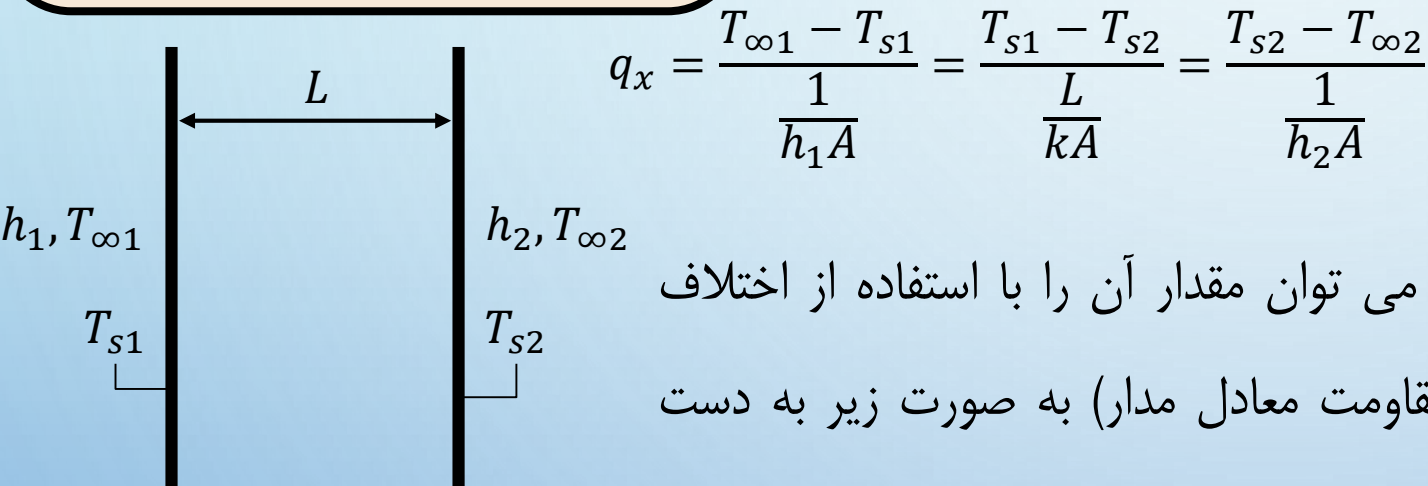
بنابراین:

مقاومت کل در مدارات سری:

$$R_{tot} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

مقاومت کل در مدارات موازی:

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$



$$q_x = \frac{T_{\infty 1} - T_{s1}}{\frac{1}{h_1 A}} = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{\frac{L}{kA}} = \frac{T_{s2} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_2 A}}$$

همچنین با توجه به یک بعدی بودن انتقال حرارت می توان مقدار آن را با استفاده از اختلاف دمای کلی $T_{\infty 1}$ و $T_{\infty 2}$ و مقاومت حرارتی کلی (مقاومت معادل مدار) به صورت زیر به دست

آورد:

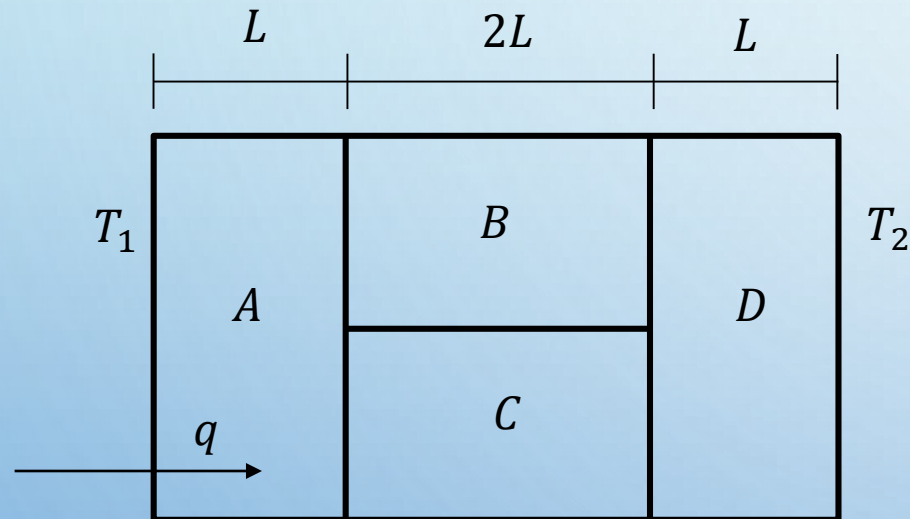
$$q_x = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A}}, \quad R_{t,total} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A}$$

$$q_x = \frac{T_{\infty 1} - T_{\infty 2}}{\sum R_t}$$

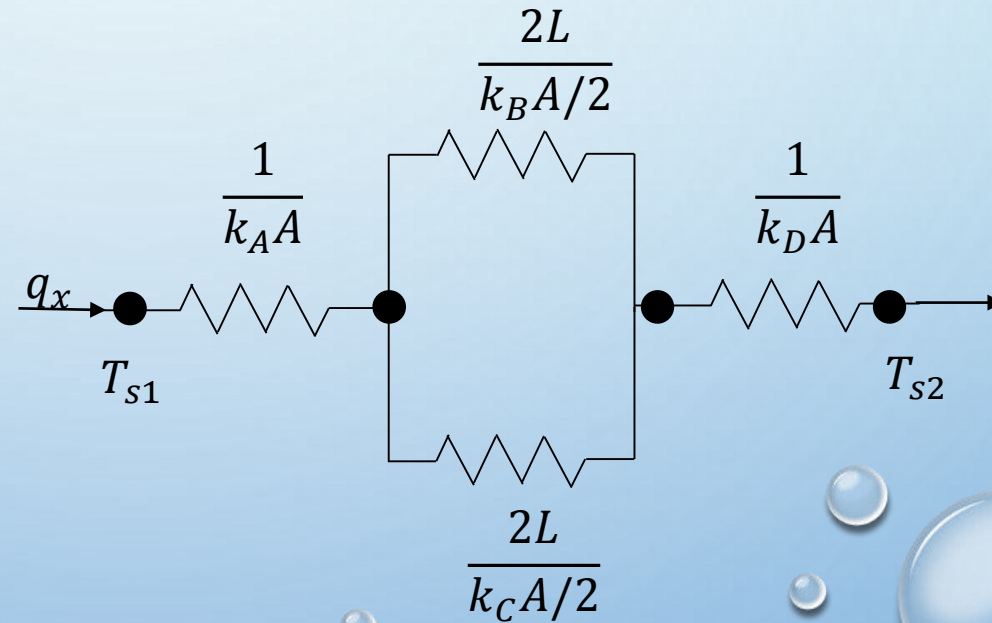
رسانش یک بعدی پایا

✓ دیواره های مرکب

مثال: مدار معادل الکتریکی برای انتقال حرارت شرایط پایای دیوار شکل مقابل را به دست آورد.



$$A_B = A_C = A/2$$

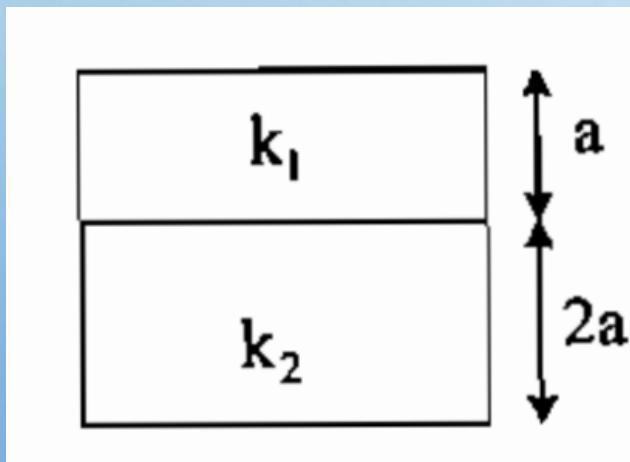
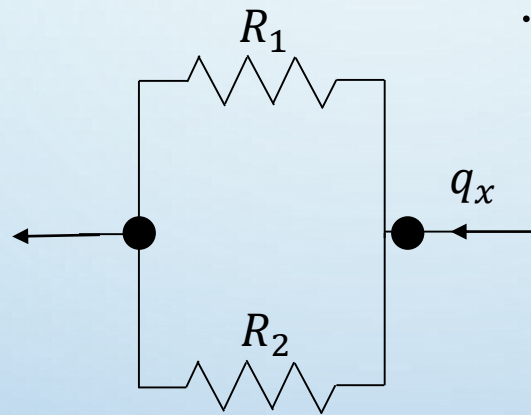
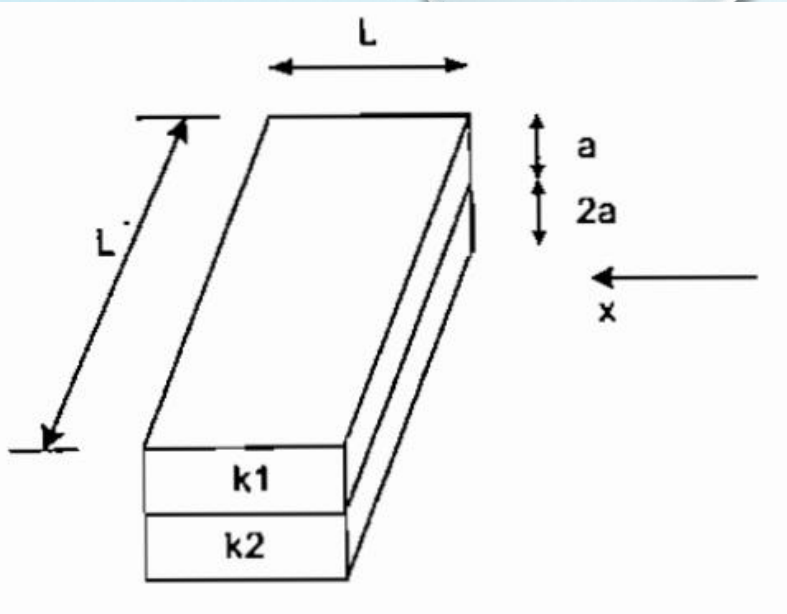


$$q = \frac{T_{s1} - T_{s2}}{L/k_A A + \frac{1}{\frac{k_B A/2}{2L} + \frac{k_C A/2}{2L}} + L/k_D A}$$

رسانش یک بعدی پایا

✓ دیواره های مرکب

مثال: مقاومت حرارتی در جهت x را به دست آورید.



$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{\frac{L}{k_1 a}} + \frac{1}{\frac{L}{k_2 2a}} = \frac{1}{R_{tot}} \rightarrow \frac{1}{R_{tot}} = k_1 a + 2a k_2 = a(k_1 + 2k_2) \rightarrow R_{tot} = \frac{1}{a(k_1 + 2k_2)}$$

رسانش یک بعدی پایا

✓ مقاومت تماس

در دیواره های مرکب ممکن است افت دما در سطح تماس بین دو دیوار قابل ملاحظه باشد. این افت دما ناشی از فضاهای خالی کوچک بین پستی و بلندی های موجود روی سطوح بوده و تحت عنوان "مقاومت حرارتی تماس" (R_C Thermal Contact Resistance) خوانده می شود.

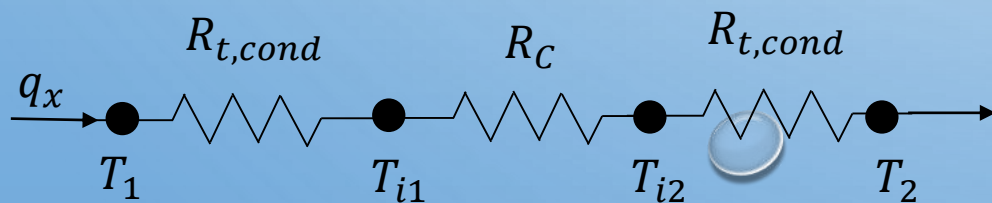
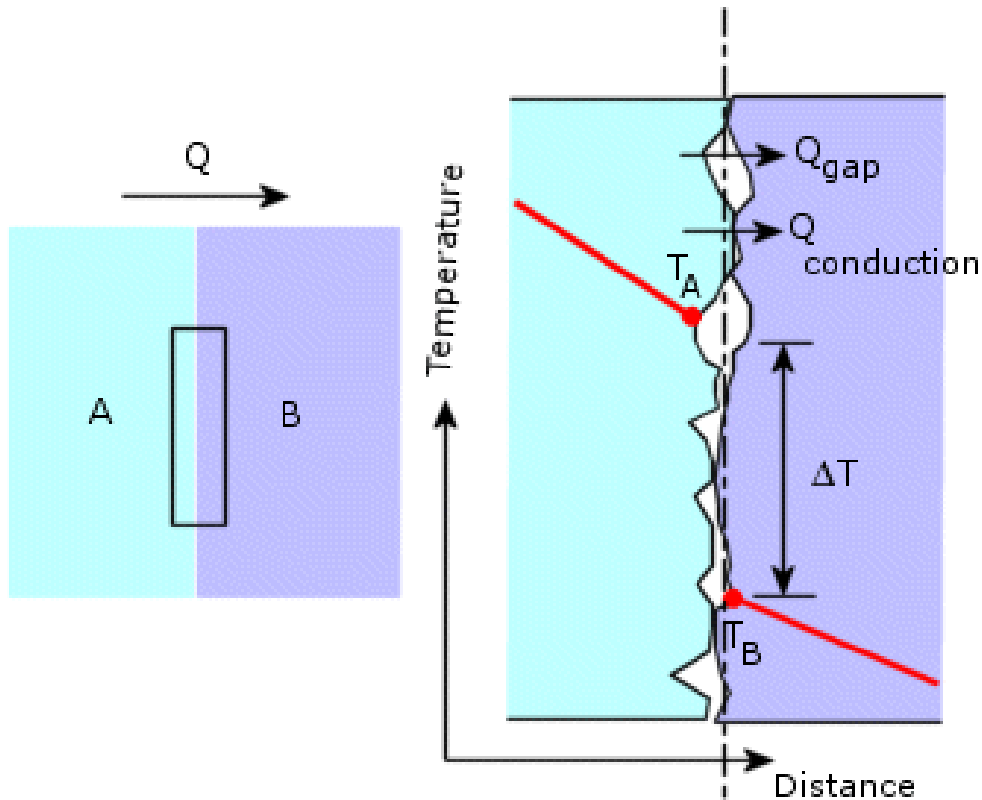
چنانچه مقاومت تماس قابل ملاحظه باشد، باید در محاسبات لحاظ شود.

برای فرموله کردن پدیده مقاومت تماس، پارامتری با عنوان "ضریب انتقال حرارت تماس" h_C معرفی می گردد که با توجه به رابطه زیر برای انتقال حرارت عبوری از سطح مشترک:

$$q = h_C A (T_{i1} - T_{i2})$$

مقاومت سطح تماس به صورت فرمول روبرو با ضریب انتقال حرارت سطح تماس h_C مرتبط می گردد:

$$R_C = \frac{1}{h_C A}$$



رسانش یک بعدی پایا

✓ ضریب انتقال حرارت کلی (U)

در مواردی در دیواره های مرکب، ساده تر است که انتقال حرارت کلی با عبارتی مشابه قانون سرمایش نیوتن فرموله شود،

بدین صورت که:

$$q = UA(\Delta T)$$

با مقایسه رابطه فوق با رابطه:

$$q = \frac{\Delta T}{R_{eq}}$$

می توان رابطه بین ضریب انتقال حرارت کلی U و مقاومت حرارتی معادل یک سیستم حرارتی را به صورت زیر به دست

$$U = \frac{1}{R_{eq}A}$$

آورد:

در این رابطه U ($\frac{W}{m^2K}$) ، ضریب انتقال حرارت کلی نامیده می شود که تمامی اثرات هدایت و جابجایی موجود در یک

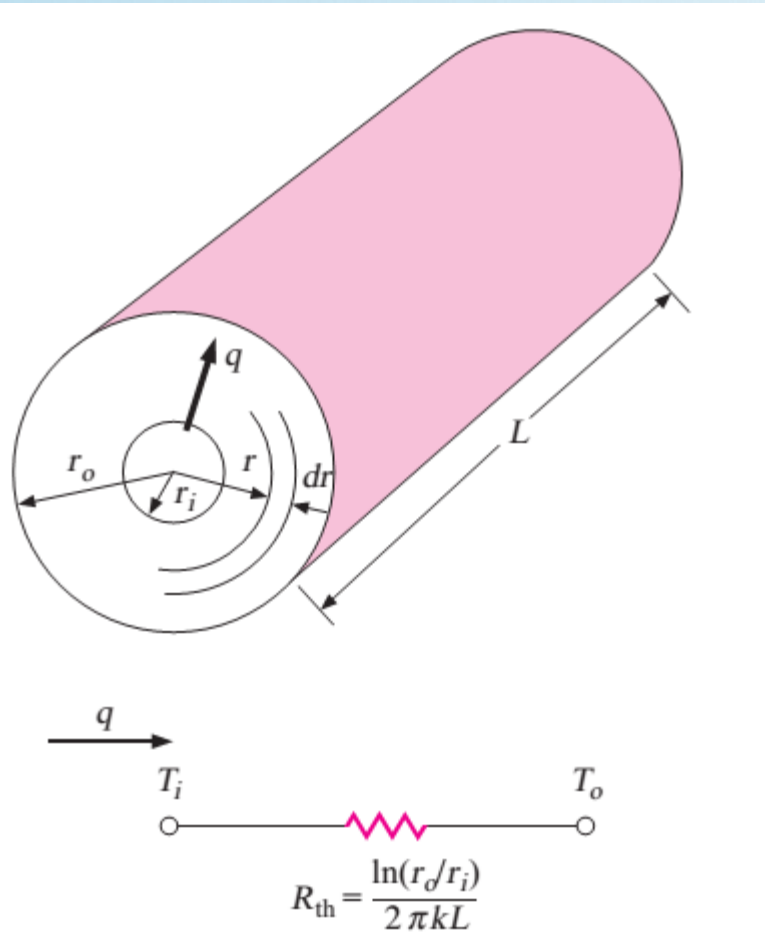
سیستم یک بعدی را در خود لحاظ کرده و از نظر دیمانسیون همانند ضریب انتقال حرارت جابجایی است.

رسانش یک بعدی پایا

✓ دیوارهای شعاعی (استوانه)

دیواره های شعاعی شامل دیواره های استوانه ای و کروی است. در این دیواره ها انتقال حرارت اغلب در جهت شعاع صورت می گیرد بنابراین یک بعدی در نظر گرفته می شود.

وجه تمایز این دیواره ها با دیواره تخت در این است که در راستای بردار انتقال حرارت، مساحت عمود بر بردار انتقال حرارت متغیر است.

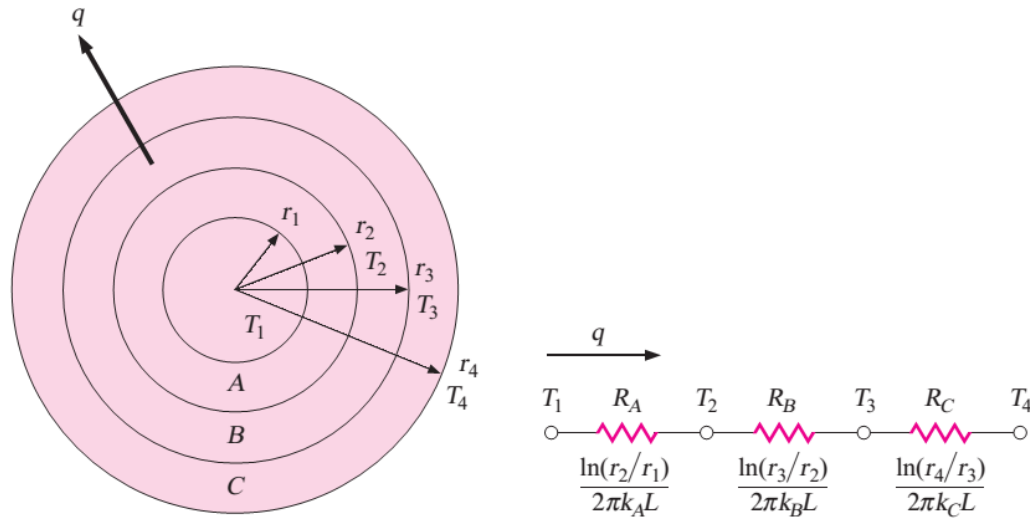


$$q_r = cte, \quad q_r = -kA(r) \frac{dT}{dr}, \quad A(r) = 2\pi rL$$

$$-\frac{q_r}{2\pi kL} \frac{dr}{r} = dT \xrightarrow{\int} \frac{q_r}{2\pi kL} \ln \frac{r_o}{r_i} = T_i - T_o$$

$$q_r = \frac{T_i - T_o}{\ln(r_o/r_i) / 2\pi kL} \rightarrow R_k = \frac{\ln(r_o/r_i)}{2\pi kL}$$

Figure 2-4 | One-dimensional heat flow through multiple cylindrical sections and electrical analog.



with the boundary conditions

$$\begin{aligned} T &= T_i & \text{at } r &= r_i \\ T &= T_o & \text{at } r &= r_o \end{aligned}$$

The solution to Equation (2-7) is

$$q = \frac{2\pi kL (T_i - T_o)}{\ln(r_o/r_i)} \quad [2-8]$$

and the thermal resistance in this case is

$$R_{th} = \frac{\ln(r_o/r_i)}{2\pi kL}$$

The thermal-resistance concept may be used for multiple-layer cylindrical walls just as it was used for plane walls. For the three-layer system shown in Figure 2-4 the solution is

$$q = \frac{2\pi L (T_1 - T_4)}{\ln(r_2/r_1)/k_A + \ln(r_3/r_2)/k_B + \ln(r_4/r_3)/k_C} \quad [2-9]$$

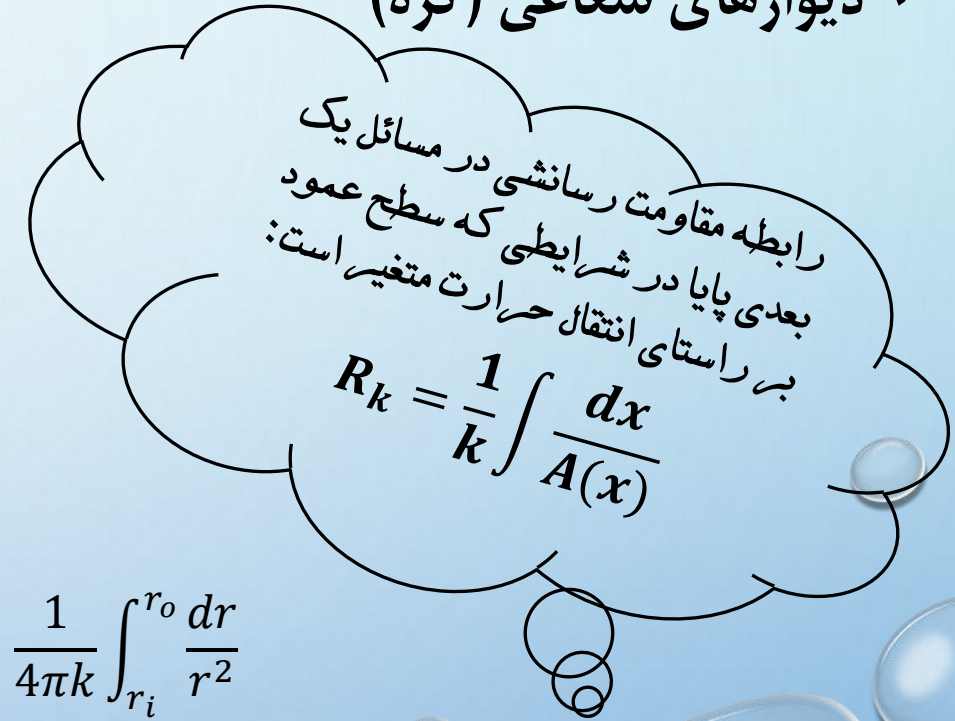
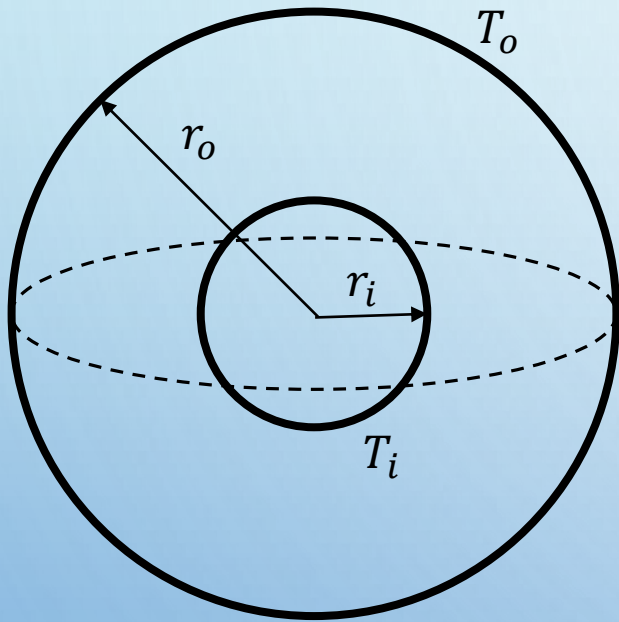
The thermal circuit is also shown in Figure 2-4.

رسانش یک بعدی پایا

✓ دیوارهای شعاعی (استوانه)

رسانش یک بعدی پایا

✓ دیوارهای شعاعی (کره)



$$R_k = \frac{1}{k} \int \frac{dr}{A(r)} \rightarrow R_k = \frac{1}{k} \int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi k} \int_{r_i}^{r_o} \frac{dr}{r^2}$$



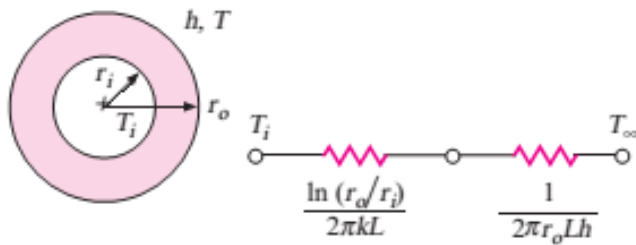
$$R_k = \frac{1}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o} \right)$$

$$q = \frac{4\pi k(T_i - T_o)}{\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_o}}$$

رسانش یک بعدی پایا

✓ شعاع بحرانی عایق

هنگامی که روی جسم محدبی که با محیط اطراف تبادل حرارت می کند به منظور کاهش انتقال حرارت عایق کاری می شود، افزایش ضخامت عایق از یک طرف باعث افزایش مقاومت رسانی بین سطح جسم و محیط اطراف شده و از سوی دیگر به دلیل افزایش سطح بیرونی عایق، مقاومت ناشی از انتقال حرارت جابجایی کاهش می یابد؛ بنابراین این امکان وجود دارد که افزودن عایق سبب افزایش انتقال حرارت شود. این پدیده در سیستم های تخت رخ نمی دهد چرا که با افزودن عایق، مساحت انتقال حرارت افزایش نمی یابد.



surface is exposed to a convection environment at T_∞ . From the thermal network the heat transfer is

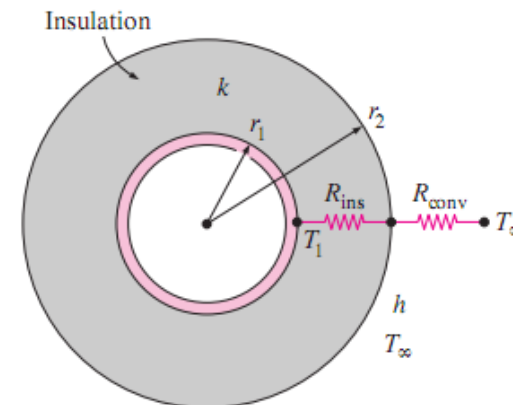
$$q = \frac{2\pi L (T_i - T_\infty)}{\frac{\ln(r_o/r_i)}{k} + \frac{1}{r_o h}} \quad [2-17]$$

Now let us manipulate this expression to determine the outer radius of insulation r_o , which will maximize the heat transfer. The maximization condition is

$$\frac{dq}{dr_o} = 0 = \frac{-2\pi L (T_i - T_\infty) \left(\frac{1}{kr_o} - \frac{1}{hr_o^2} \right)}{\left[\frac{\ln(r_o/r_i)}{k} + \frac{1}{r_o h} \right]^2}$$

$$q = \frac{T_i - T_\infty}{R_{eq}} ; R_{eq} = R_k + R_h$$

$$R_{eq} = \frac{\ln \frac{r_o}{r_i}}{2\pi k l} + \frac{1}{h(2\pi r_o l)}$$



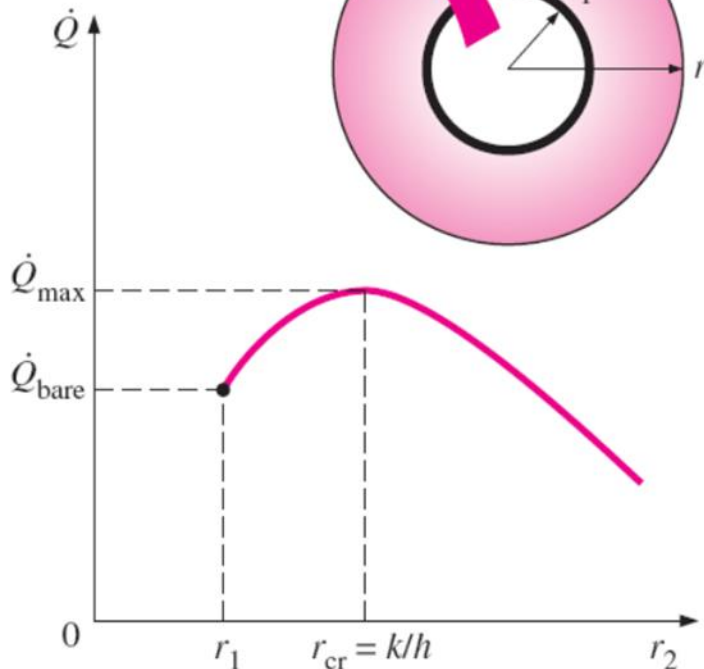
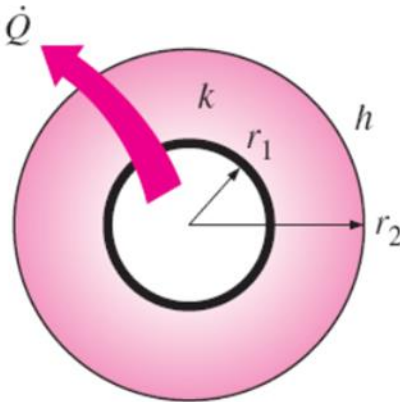
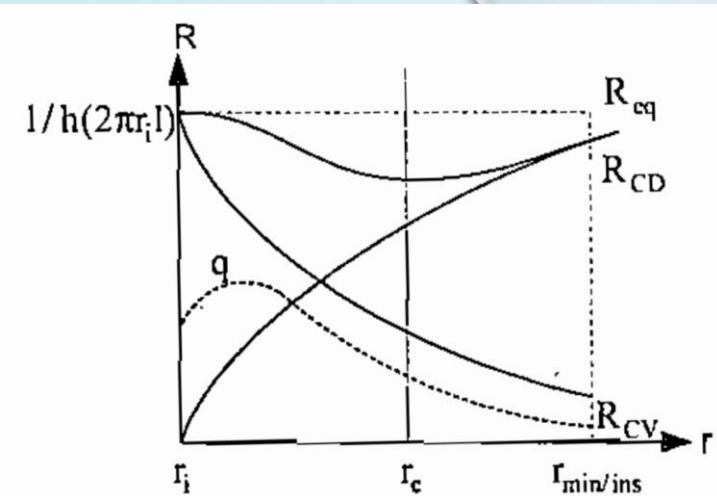
رسانش یک بعدی پایا

✓ شعاع بحرانی عایق

به طور کلی برای عایق ها دو حالت زیر مشاهده می شود:

۱- اگر $r_s < r_c$ ، با افزودن عایق روی لوله، مقاومت کل در ابتدا کم شده و در نتیجه انتقال گرما افزایش می یابد تا جایی که شعاع خارجی عایق به r_c برسد. کاهش انتقال حرارت پس از شعاع عایق $r > r_c$ رخ خواهد داد.

۲- اگر $r_s > r_c$ ، با افزودن عایق مقاومت کل از همان ابتدای افزودن عایق افزایش یافته و نرخ انتقال گرما کاهش می یابد.



$$r_c = \begin{cases} \text{cylinder} : \frac{k}{h} \\ \text{sphere} : \frac{2k}{h} \end{cases}$$

رسانش یک بعدی پایا

✓ شعاع بحرانی عایق

مثال: می خواهیم روی لوله ای به شعاع 1 cm را عایق کاری کنیم، به طوری که انتقال حرارت کاهش یابد. ضریب انتقال حرارت جابجایی محیط خارج $h = 5\text{ W/m}^2\text{K}$ و ضریب رسانش عایق $k = 0.3\text{ W/mK}$ است. در این صورت با افزودن عایق:

الف) نرخ انتقال حرارت همواره کاهش می یابد.

ب) نرخ انتقال حرارت همواره افزایش می یابد.

ج) نرخ انتقال حرارت ابتدا کاهش و سپس افزایش می یابد.

د) نرخ انتقال حرارت ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابد.

پاسخ: گزینه **د** درست است (چون $r_s < r_c$ می باشد).

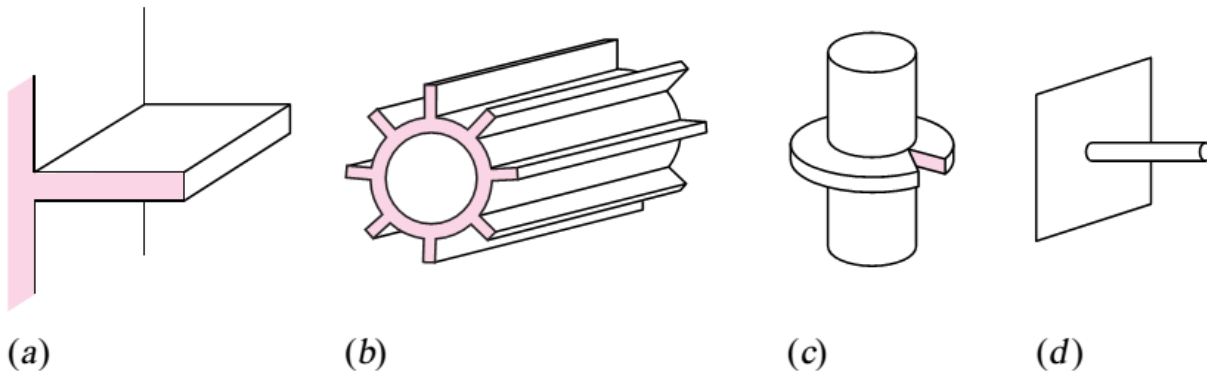
$$r_c = \frac{k}{h} = \frac{0.3}{5} = 0.06\text{ m} \quad \& \quad r_s = 1\text{ cm}$$

رسانش یک بعدی پایا

✓ سطوح گسترش یافته (پره)

واژه سطح گسترش یافته معمولاً به سطوحی اطلاق می شود که انتقال انرژی توسط رسانایی در داخل آن و جابجایی (ویا تابشی) بین مرزهای آن و محیط صورت می گیرد. کاربرد اصلی سطوح گسترش یافته برای افزایش انتقال گرما بین یک جسم جامد و سیال مجاور است که به این سطح گسترش یافته، "پره" نیز می گویند. سطح گسترش یافته با افزایش مساحت موثر، باعث افزایش انتقال حرارت می شود.

Figure 2-10 | Different types of finned surfaces. (a) Straight fin of rectangular profile on plane wall, (b) straight fin of rectangular profile on circular tube, (c) cylindrical tube with radial fin of rectangular profile, (d) cylindrical-spine or circular-rod fin.



رسانش یک بعدی پایا

✓ سطوح گسترش یافته (پره)

کارایی پره: عبارتست از نسبت نرخ انتقال گرما از سطح با وجود پره به نرخ انتقال گرما از سطح در نبود پره.

نکته: در مهندسی حرارت، هنگامی استفاده از پره مقرون به صرفه است که حداقل $\epsilon_f \geq 2$ باشد.

$$\epsilon_f = \frac{q_f}{q_{w.o.f}}$$

$$q_{w.o.f} = hA_b(T_b - T_\infty)$$

$$\epsilon_f = \frac{q_f}{hA_b(T_b - T_\infty)}$$

رسانش یک بعدی پایا

✓ معادله پره

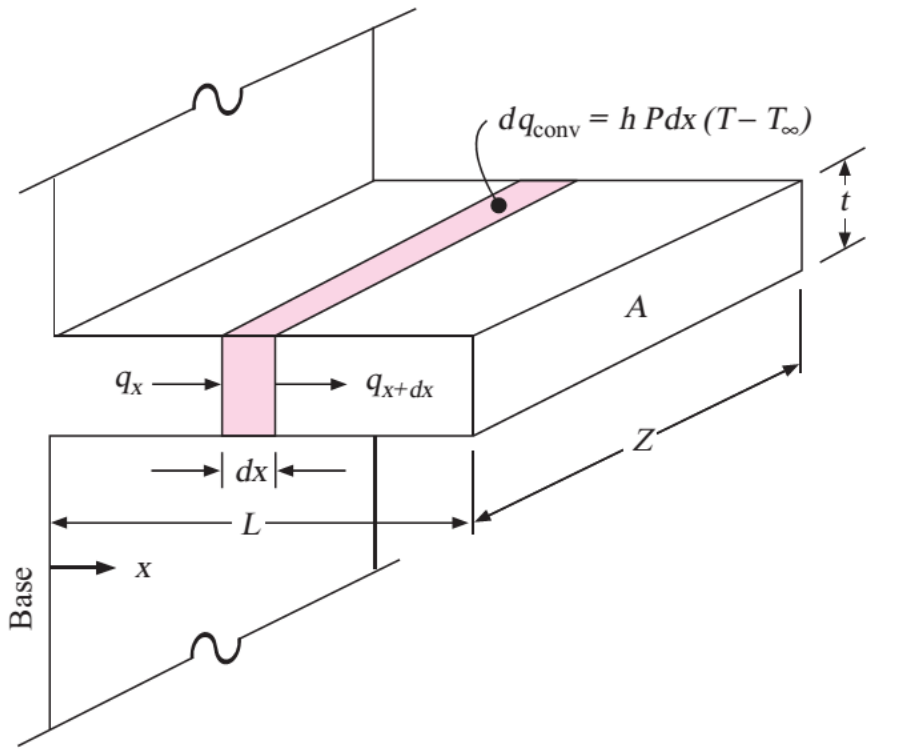
$$\left(\begin{array}{c} \text{آهنگ رسانش گرما} \\ \text{از المان در } x + \Delta x \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{آهنگ رسانش گرما} \\ \text{از المان در } x \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{آهنگ جابجایی گرما} \\ \text{از المان} \end{array} \right)$$

$$q_x = q_{x+dx} + dq_{conv} \rightarrow q_{x+dx} - q_x + dq_{conv} = 0$$

$$\div dx \frac{q_{x+dx} - q_x}{dx} + hp(T - T_{\infty}) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(kA_c \frac{dT}{dx} \right) - hP(T - T_{\infty})$$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hP}{kA} (T - T_{\infty}) = 0 \xrightarrow[\substack{\theta = (T - T_{\infty}) \\ m = \sqrt{\frac{hP}{kA}}}]{} \boxed{\frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \theta = 0}$$



رسانش یک بعدی پایا

✓ حل معادله پره

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - m^2\theta = 0 \longrightarrow \theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx}$$

$$\text{Boundary Conditions : } \left\{ \begin{array}{l} @x = 0 ; T = T_b \\ @x = L \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{پره طویل : } if L \rightarrow \infty ; T = T_{\infty} \\ \text{پره با نوک آدیاباتیک : } \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0 \\ \text{پره با دمای نوک معلوم : } T = cte \\ \text{پره با نوک جابجایی : } -k \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = h(T - T_{\infty}) \Big|_{x=L} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

رسانش یک بعدی پایا

✓ پره طویل

$$\text{Boundary Conditions : } \begin{cases} @x = 0 ; T = T_b \\ @x = L ; \text{ if } L \rightarrow \infty ; T = T_{\infty} \end{cases}$$

$$\theta(x) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \rightarrow \theta(x) = C_2 e^{-mx} \xrightarrow{@ x=0 ; \theta=\theta_b} \theta(x) = \theta_b e^{-mx}$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{T - T_{\infty}}{T_b - T_{\infty}} = e^{-mx} ; \quad m = \sqrt{\frac{hP}{kA}}$$

$$q_f = -kA_b \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \sqrt{hPkA}(T_b - T_{\infty})$$

$$\varepsilon_f = \frac{q_f}{q_{w.o.f}} = \frac{\sqrt{hPkA_c}(T_b - T_{\infty})}{hA_b(T_b - T_{\infty})} = \sqrt{\frac{kP}{hA_c}}$$

رسانش یک بعدی پایا

✓ پره طویل

مثال: یک طرف دیواره مسطح فلزی آب سرد و طرف دیگر آن گاز داغ در جریان است. در صورتی که از پره با هندسه یکسان استفاده شود، برای افزایش نرخ انتقال حرارت، کدامیک از روش های زیر موثر است؟

$$\varepsilon_f = \sqrt{\frac{kP}{hA_c}}$$

الف) استفاده از پره های آهنی در طرف گاز

ب) استفاده از پره های آلومینیومی در طرف گاز

ج) استفاده از پره های آهنی در طرف آب

د) استفاده از پره های آلومینیومی در طرف آب

رسانش یک بعدی پایا

✓ پره طویل

مثال: دو پره بلند با مقطع یکسان از منبعی به دمای T_0 گرما را گرفته و به محیطی به دمای T_∞ می دهند. دمای پره اول در فاصله $x_1 = 40cm$ برابر T_1 و دمای پره دوم در فاصله $x_2 = 20cm$ برابر T_2 است. می دانیم تغییرات دما در طول پره های بلند با رابطه $\theta = \theta_0 e^{-mx}$ داده می شود ($\theta = T - T_\infty$). اگر بخواهیم $T_1 = T_2$ باشد، نسبت ضریب هدایت حرارتی پره دوم به اول

$$\frac{\theta}{\theta_0} = e^{-mx} \quad ; \quad \theta_1 = \theta_2 \rightarrow e^{-m_1 x_1} = e^{-m_2 x_2} \rightarrow m_1 x_1 = m_2 x_2$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{hP}{k_1 A}} \cdot x_1 = \sqrt{\frac{hP}{k_2 A}} \cdot x_2 \rightarrow \frac{x_2}{x_1} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} \Rightarrow \frac{k_2}{k_1} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{k_2}{k_1} = \frac{1}{4}$$

چقدر باید باشد؟

رسانش یک بعدی پایا

✓ پره با نوک آدیاباتیک

Boundary Conditions :
$$\begin{cases} @x = 0 ; \theta = \theta_b \rightarrow \theta(0) = \theta_b = C_1 + C_2 \\ @x = L ; \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0 \rightarrow mC_1 e^{mL} - mC_2 e^{-mL} = 0 \end{cases}$$

$$C_1 = \theta_b / (1 + e^{2mL}) \quad C_2 = \theta_b / (1 + e^{-2mL})$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{e^{-mx}}{1 + e^{-2mL}} + \frac{e^{mx}}{1 + e^{2mL}}$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{T(x) - T_{\infty}}{T_b - T_{\infty}} = \frac{\cosh m(L - x)}{\cosh mL}$$

$$q_f = M \tanh(mL) \quad ; \quad M = \sqrt{hPkA_c} (T_b - T_{\infty})$$

رسانش یک بعدی پایا

✓ پره با دمای مشخص

$$\text{Boundary Conditions: } \begin{cases} @x = 0 ; \theta(0) = \theta_b \\ @x = L ; \theta(L) = \theta_L = T_L - T_\infty \end{cases}$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\left[\frac{(T_L - T_\infty)}{(T_b - T_\infty)} \right] \sinh mx + \sinh m(L - x)}{\sinh mL}$$

$$q_f = M \frac{\cosh mL - \left[\frac{(T_L - T_\infty)}{(T_b - T_\infty)} \right]}{\sinh mL} ; \quad M = \sqrt{hPkA_c} (T_b - T_\infty)$$

رسانش یک بعدی پایا

✓ جابجایی در نوک پره

$$\text{Boundary Conditions: } \begin{cases} @x = 0 ; \theta(0) = \theta_b \\ @x = L ; -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=L} = h(T - T_\infty) \Big|_{x=L} \end{cases}$$

$$\frac{\theta}{\theta_b} = \frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh mL - \cosh m(L-x) + \left(\frac{h}{mk}\right) \sinh mL - \left(\frac{h}{mk}\right) \sinh m(L-x)}{\cosh mL + \left(\frac{h}{mk}\right) \sinh mL}$$

$$q_f = M \frac{\sinh mL + \left(\frac{h}{mk}\right) \cosh mL}{\cosh mL + \left(\frac{h}{mk}\right) \sinh mL} ; \quad M = \sqrt{hPkA_c} (T_b - T_\infty)$$

رسانش یک بعدی پایا

✓ جابجایی از نوک پره

با یک تحلیل ذهنی نشان داده می شود که می توان به جای رابطه نسبتاً مفصل انتقال گرما از پره مستطیلی با نوک آزاد از نتایج پره با نوک آدیاباتیک ولی با طول بلندتر استفاده کرد. با تعریف پارامتری تحت عنوان "طول اصلاح شده (L_c)" از رابطه بالا می توان استفاده کرد. در این تحلیل حرارت دفع شده از نوک پره روی سطوح جانبی به حساب آورده شده و بنابراین نوک پره عایق در نظر گرفته می شود. با توجه به شکل طول اصلاح شده برای پره مستطیلی و سوزنی از روابط زیر به دست می آیند:

$$\begin{cases} L_c = L + t/2 & \text{پره مستطیلی:} \\ L_c = L + D/4 & \text{پره سوزنی:} \end{cases}$$

البته تحلیل فوق زمانی قابل قبول است که گرادیان دما در راستای y قابل صرف نظر کردن باشد که این شرط با فرمول های زیر قابل بیان است:

$$\begin{cases} \frac{h \cdot t}{k} < 0.0625 & \text{پره مستطیلی:} \\ \frac{h \cdot D}{2k} < 0.0625 & \text{پره سوزنی:} \end{cases}$$

رسانش یک بعدی پایا

✓ راندمان پره

پره ایده آل پره ای است با هندسه مشابه پره موردنظر که حداکثر نرخ انتقال گرما را داشته باشد و برای این منظور باید تمام

$$\eta_f = \frac{q_f}{q_{ideal\ fin}} \quad ; \quad q_{ideal\ fin} = hA_f(T_b - T_{\infty})$$

سطح پره دردمای پای پره (T_b) باشد.

شرایط پره ایده آل در سه صورت ممکن است اتفاق بیفتد:

۱. طول پره ناچیز باشد.
۲. پره دارای ضریب رسانش خیلی بزرگی باشد.
۳. ضریب جابجایی محیط نزدیک به صفر باشد.

رسانش یک بعدی پایا

✓ راندمان پره

مثال: یک پره حلقوی با شعاع داخلی 2 cm خارجی 4 cm و $t = 1\text{ mm}$ را در نظر بگیرید. $T_b = 125^\circ\text{C}$ و $T_\infty = 25^\circ\text{C}$ است.

اگر $h = 10\text{ W/m}^2\text{K}$ و $\eta = 90\%$ باشد، نرخ انتقال حرارت از پره به محیط چقدر است؟

$$q_f = \eta_f q_{ideal\ fin}$$

$$q_{ideal\ fin} = hA_f(T_b - T_\infty) \quad ; \quad A_f = 2\pi(r_o^2 - r_i^2) + 2\pi r_o t$$

$$q_f = 8.51\text{ W}$$

رسانش یک بعدی پایا

✓ تشابه الکتریکی در پره ها

هرگاه پره جزئی از یک سیستم انتقال حرارت پیچیده باشد در شرایط پایا می توان آن را با یک مقاومت معادل جایگزین کرد.

$$q_f = \frac{T_b - T_\infty}{R_{fin}} \rightarrow R_{fin} = \frac{T_b - T_\infty}{q_f}$$

$$R_{fin} = \frac{T_b - T_\infty}{\sqrt{hPkA_c}(T_b - T_\infty)} = \frac{1}{\sqrt{hPkA_c}}$$

برای مثال، برای یک پره طویل:

پایان فصل سوم

خسته نباشد