

به نام خدا

انتقال حرارت ۱

فصل دوم

عنوان: معادله حرارت

مدرس: مجتبیٰ برزویی

معادله حرارت

❖ شار حرارتی (*heat flux*)

$$q'' = \frac{q}{A} ; \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

✓ به نرخ حرارت منتقل شده از واحد سطح، "شار حرارتی" گفته می شود.

✓ شار حرارتی یک کمیت برداری است در حالی که انتقال حرارت یک کمیت اسکالر است.

$$\vec{q''} = q''_x \hat{i} + q''_y \hat{j} + q''_z \hat{k} \rightarrow \begin{cases} q''_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \\ q''_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \\ q''_z = -k \frac{\partial T}{\partial z} \end{cases} ; \quad |\vec{q''}| = \sqrt{q''_x^2 + q''_y^2 + q''_z^2}$$

معادله حرارت

❖ شار حرارتی (*heat flux*)

✓ مثال: تغییرات درجه حرارت در یک بعد در داخل یک دیوار در یک لحظه به صورت $T = 180 - 3x - 0.6x^2$ داده شده است (T بر حسب درجه سانتیگراد و x بر حسب سانتیمتر است). در این لحظه نرخ حرارت ورودی به دیوار در $x = 0$ به ازاء واحد سطح چه مقدار است؟ (ضریب رسانش دیوار $k = 2 \text{ W/m.K}$ است)

$$q''_x \Big|_{x=0} = -k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = -k (-1.2x - 3) \Big|_{x=0} = -2(-3) = 6 \text{ W/m}^2$$

مباحث سینماتیکی

❖ یادآوری ریاضی

✓ عملگر نابلا

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

۱. اگر عملگر نابلا بر روی یک اسکالر (مانند T) عمل کند، حاصل را "گرادیان" می نامند. گرادیان، یک بردار است:

$$\vec{\nabla} T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

۲. اگر عملگر نابلا در یک بردار ضرب داخلی شود، حاصل را "دیورژانس" گویند. دیورژانس، یک اسکالر است:

$$\text{div } \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (u, v, w) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

مباحث سینماتیکی

❖ یادآوری ریاضی

✓ عملگر نابلا

۳. اگر عملگر نابلا در یک بردار ضرب خارجی شود، حاصل را "کرل" گویند. کرل، یک بردار است:

$$\text{curl } \vec{V} = \vec{V} \times \vec{V} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{bmatrix} = \hat{i} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

۴. اگر عملگر نابلا در بردار گرادیان ضرب داخلی شود، حاصل را "لاپلاسین" می نامند. لاپلاسین، یک اسکالر است.

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla T} = \nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

معادله حرارت

❖ معادله حرارت (heat equation)

ضریب نفوذ (پخش) حرارتی

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} = \frac{\text{انتقال حرارت رسانش}}{\text{ذخیره سازی انرژی در جسم}}$$

✓ معادله دیفرانسیل حاکم بر توزیع دما در جسمی که مکانیزم انتقال حرارت در آن رسانش است را "معادله حرارت" می نامیم.

معادله حرارت در حقیقت معادله ای است که از حل آن توزیع دما در جسم به دست می آید.

$$\vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \dot{q}_v = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

✓ معادله حرارت برای جسمی با ضریب رسانش متغیر

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q}_v = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

✓ معادله حرارت برای جسمی با ضریب رسانش ثابت

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}_v}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

معادله حرارت

مثال: معادله حرارت را در شرایط پایا و یک بعدی برای جسمی با ضریب رسانش ثابت در دو حالت زیر به دست آورید:

$$\text{الف) } \dot{q}_v = 0 \quad \text{ب) } \dot{q}_v = ax$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}_v}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \rightarrow \int \frac{dT}{dx} = C_1 \rightarrow T(x) = C_1 x + C_2$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}_v}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{q}_v}{k} = 0 \rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{ax}{k} \rightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{ax^2}{2k} + C_1 \rightarrow T(x) = -\frac{ax^3}{6k} + C_1 x + C_2$$

معادله حرارت

مثال: توزیع دما در یک لحظه به خصوص در داخل یک جسم با رابطه $T(x,y) = 100x^3 - 20y^2x + 3y$ داده شده است. در

داخل جسم حرارت حجمی تولید نمی شود. در صورتی که برای جسم $k = 1 \text{ W/m.K}$ و $\alpha = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{sec}$ باشد، نرخ زمانی

تغییر دما در نقطه $(x,y) = (1,1)$ چقدر است؟

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

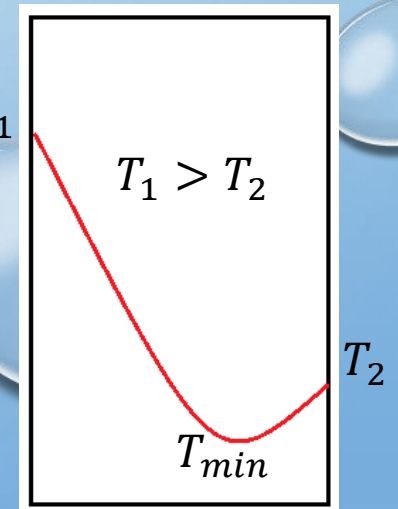
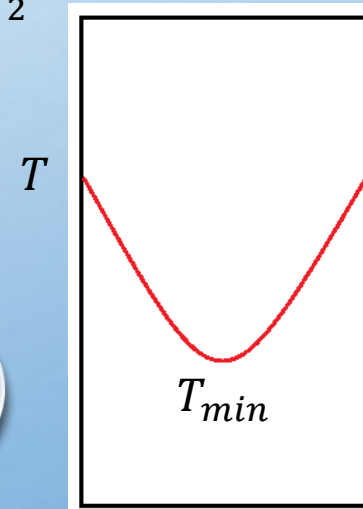
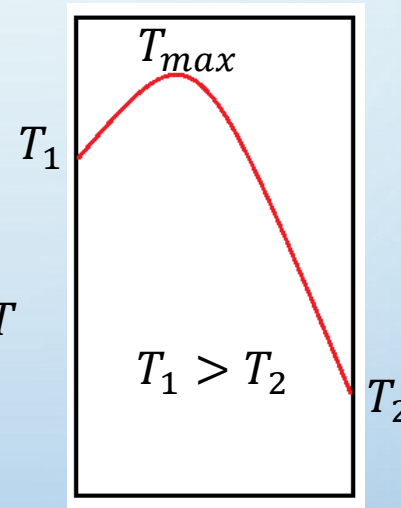
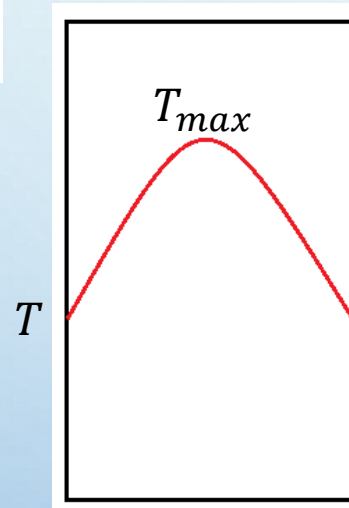
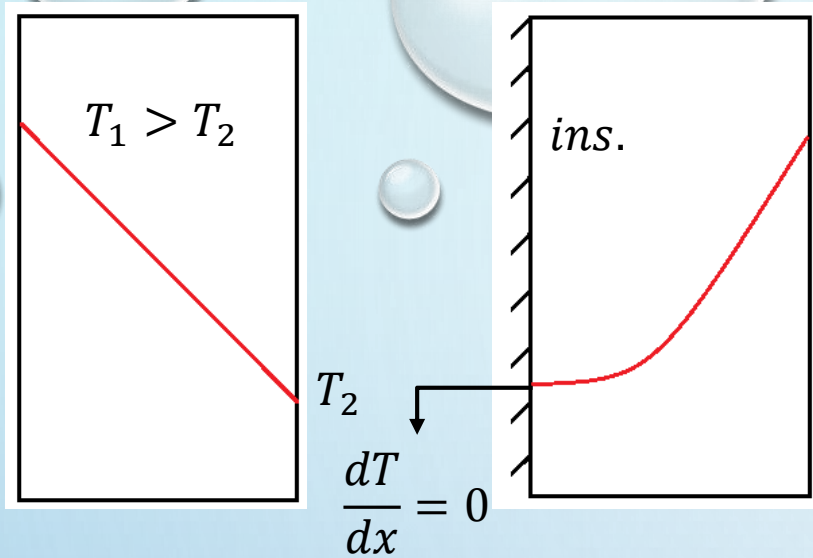
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 600x \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -40x$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 300x^2 - 20y^2 \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = -40yx$$

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{(1,1)} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{(1,1)} = 560 \rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{(1,1)} = 0.056 \frac{^\circ\text{C}}{\text{sec}}$$

معادله حرارت

❖ حالت های مختلف توزیع دما در دیواره تخت



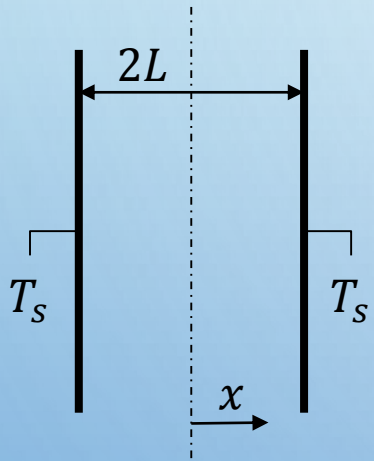
نکته: اگر شیب خط مماس بر توزیع دما در نقطه ای صفر باشد، انتقال حرارت در آن نقطه از جسم صفر است.

معادله حرارت

مثال: در داخل دیواره ای به ضخامت $2L$ که دو سمت آن در دمای T_s و ضریب رسانش حرارتی آن k است حرارت حجمی $\dot{q}_v \left(\frac{W}{m^3}\right)$ تولید می شود. رابطه ای برای دمای ماکزیمم دیوار در شرایط پایا برحسب پارامترهای داده شده بدست

آورید.

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}_v}{k} = 0 \rightarrow \frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}_v}{k} \xrightarrow{\int} \frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}_v}{k}x + C_1 \xrightarrow{\int} T(x) = -\frac{\dot{q}_v}{2k}x^2 + C_1x + C_2$$



$$\text{Boundary conditions: } \begin{cases} \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ T|_{x=L} = T_s \Rightarrow T_s = -\frac{\dot{q}_v L^2}{2k} + C_2 \Rightarrow C_2 = T_s + \frac{\dot{q}_v L^2}{2k} \end{cases}$$

$$T(x) = -\frac{\dot{q}_v}{2k}x^2 + \frac{\dot{q}_v L^2}{2k} + T_s \Rightarrow T_{max} = T(0) = \frac{\dot{q}_v L^2}{2k} + T_s$$

پایان فصل دوم

خسته نباشد.