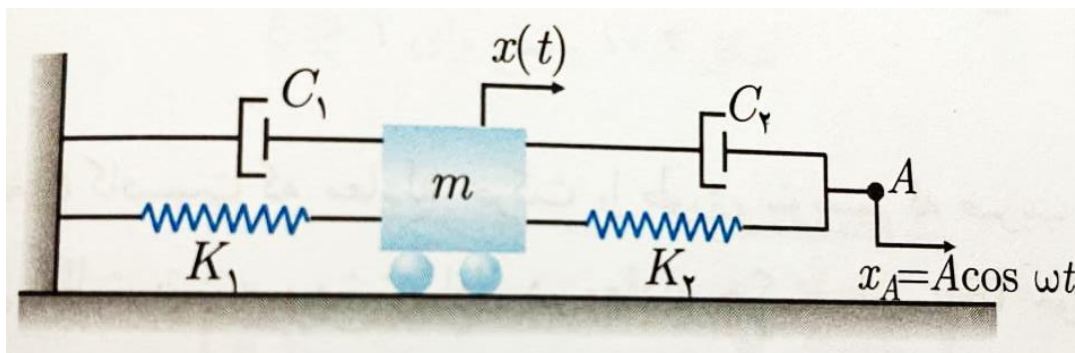
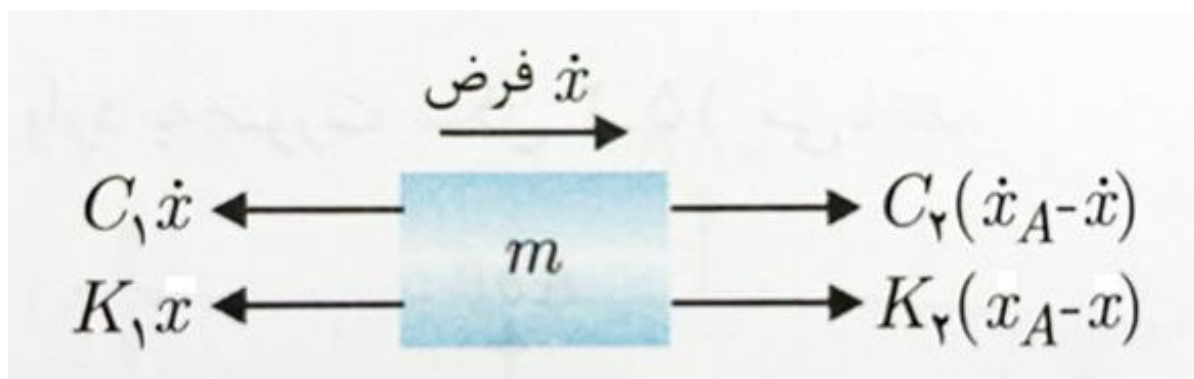


۱- برای سیستم ارتعاشی زیر، معادله حرکت را با استفاده از روش نیوتن به دست آورید و فرکانس طبیعی و نسبت استهلاک چقدر است؟



برای حل به روش نیوتن ابتدا لازم است تا دیاگرام آزاد نیروهای آزاد وارد بر جسم را رسم نماییم.



$$\sum f_x = m\ddot{x} \Rightarrow c_2(\dot{x}_A - \dot{x}) + k_2(x_A - x) - c_1\dot{x} - k_1x = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + (c_1 + c_2)\dot{x} + (K_1 + K_2)x = K_2A \cos \omega t - c_2A\omega \sin \omega t$$

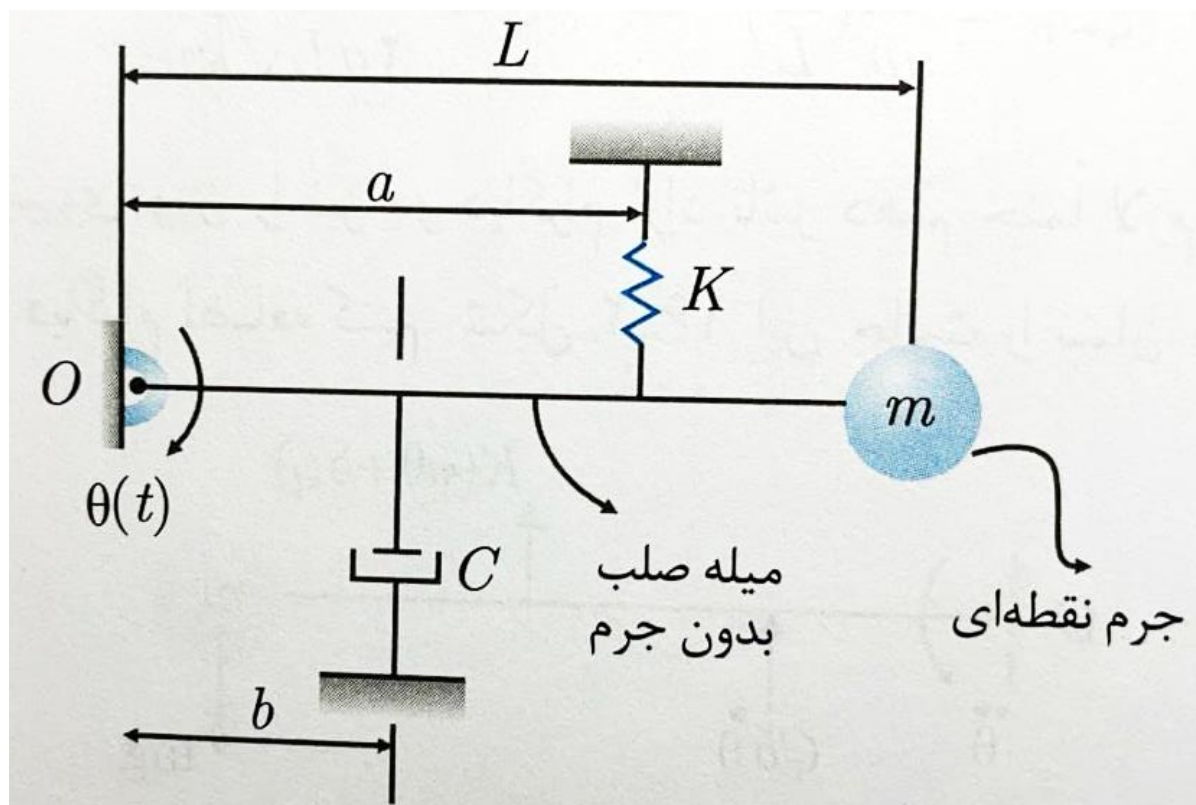
$$\ddot{x} + \frac{c_1 + c_2}{m} \dot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m} x = \frac{k_2}{m} A \cos \omega t - \frac{c_2 A \omega}{m} \sin \omega t$$

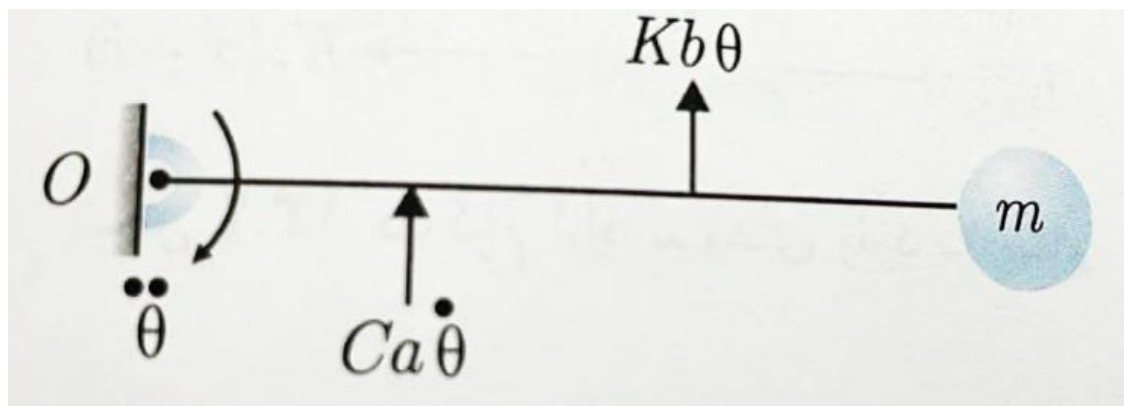
در این حالت با مقایسه این معادله با فرم کلی معادله حرکت به صورت زیر خواهیم داشت

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F}{m}$$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{K_1 + K_2 m} ; 2\xi\omega_n = \frac{C_1 + C_2}{m} \Rightarrow \xi = \frac{C_1 + C_2}{2\sqrt{m(K_1 + K_2)}}$$

۲- معادله حرکت سیستم زیر را به دست آورید.





با فرض کوچک بودن دامنه نوسانات می توان نوشت

$$\sin \theta \simeq \theta$$

با توجه به مطالب ذکر شده، در این مثال اثر نیروی وزن با تغییر مکان استاتیکی فشر حذف می شود و وارد معادله حرکت نمی شود. طبق قانون دوم نیوتون برای سیستم دورانی داریم:

$$\sum M_o = I_o \ddot{\theta}$$

$$-cb\dot{\theta}(b) - Ka\theta(a) = mL^2 \ddot{\theta}$$

با توجه به این که جرم نقطه ای است و میله نیز بدون جرم است ممان اینرسی سیستم برابر است با $I_o = mL^2$

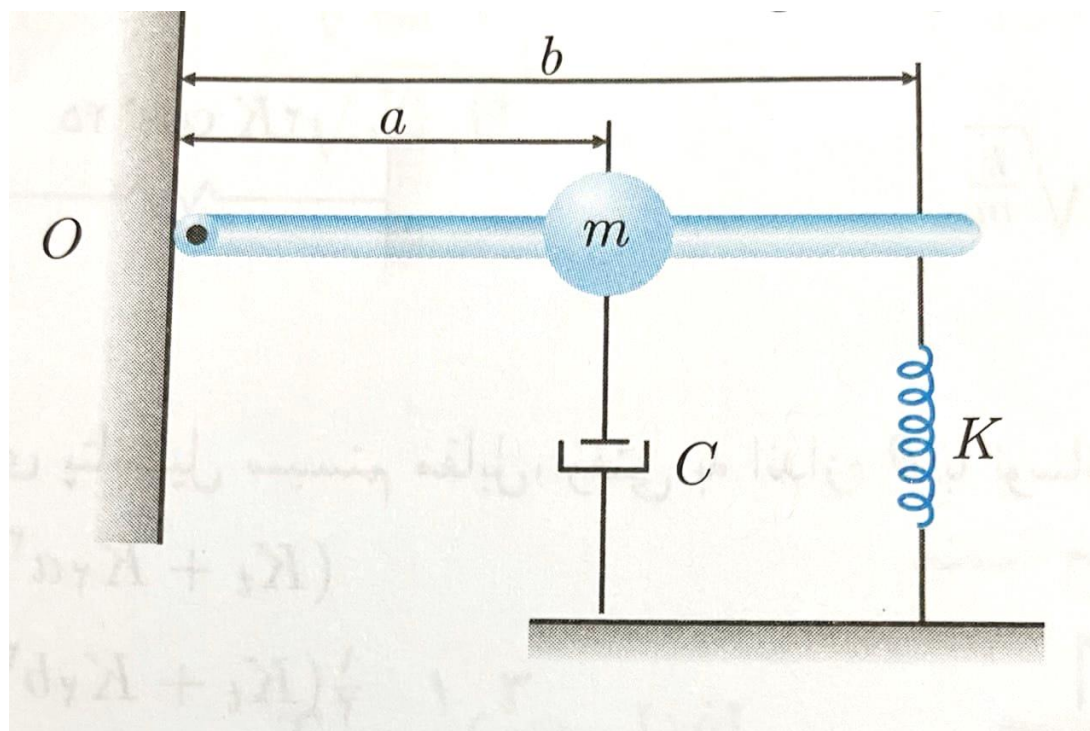
با مرتب نمودن معادله بالا خواهیم داشت (ضریب $\ddot{\theta}$ را برابر یک می نویسیم)

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m} \left(\frac{b}{L} \right)^2 \dot{\theta} + \frac{k}{m} \left(\frac{a}{L} \right)^2 \theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega_n = \frac{a}{L} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$2\xi\omega_n = \frac{c}{m} \left(\frac{b}{L} \right)^2 \Rightarrow \xi = \frac{cb^2}{2aL\sqrt{km}}$$

۳- مطابق شکل زیر ثابت دمپینگ بحرانی چقدر است؟



$$\sum M_o = I_o \alpha \Rightarrow -ca^2 \dot{\theta} - kb^2 \theta = ma^2 \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow ma^2 \ddot{\theta} + ca^2 \dot{\theta} + kb^2 \theta = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{kb^2}{ma^2}} = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow c = 2m\omega_n = 2m \frac{b}{a} \sqrt{\frac{k}{m}} = 2 \frac{b}{a} \sqrt{km}$$

۴- در یک سیستم ارتعاشی، در حالتی که میرایی وجود نداشته باشد، در طی یک دقیقه ۱۲۰ نوسان کامل و در حالتی که میرایی وجود دارد ۹۰ نوسان کامل انجام می‌شود. اگر جرم سیستم $\frac{\pi}{\sqrt{7}}$ باشد ضریب استهلاک چقدر است؟

$$\omega_n = 2\pi f_n = 2\pi \frac{120}{60} = 4\pi$$

$$\omega_d = 2\pi f_d = 2\pi \frac{90}{60} = 3\pi$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \Rightarrow 3\pi = 4\pi \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{16} = 1 - \xi^2 \Rightarrow \xi = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\xi = \frac{C}{2m\omega_n} \Rightarrow \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{C}{2 \frac{\pi}{\sqrt{7}} \times 4\pi} \Rightarrow C = 2\pi^2$$