

۱- یک پاندول ساده با فرکانس ۰/۵ هرتز در محیط خلاء و با فرکانس ۰/۴۵ هرتز در بستر سیال ویسکوز ارتعاش می‌کند. نسبت استهلاک چقدر است در صورتیکه جرم پاندول ۱ کیلوگرم باشد.

For pendulum, $\omega_n = \sqrt{g/l}$ in vacuum = 0.5 Hz = π rad/sec
 $l = g/\pi^2 = 9.81/\pi^2 = 0.9940$ m
 $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ in viscous medium = 0.45 Hz = 0.9π rad/sec
 $\zeta^2 = \frac{\omega_n^2 - \omega_d^2}{\omega_n^2} = \pi^2 \left(\frac{1 - 0.81}{1} \right) = 1.8752$
 $\zeta = 1.3694$
 $m l^2 \ddot{\theta} + c_t \dot{\theta} + m g l \theta = 0$

۲- در یک سیستم جرم-فنر-دمپر مقدار جرم ۵۰ کیلوگرم و ثابت فنر ۵۰۰۰ نیوتن بر متر است. ثابت بحرانی دمپر، فرکانس دمپ شده وقتی $c = \frac{c_{cr}}{2}$ چقدر است؟

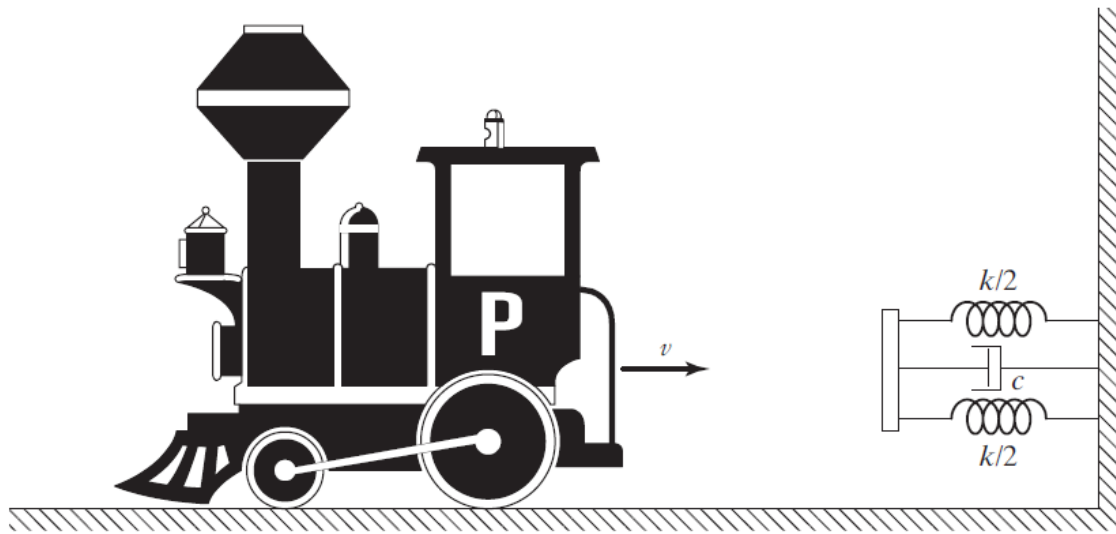
$$c_c = 2 \sqrt{k m} = 2 \sqrt{5000 \times 50} = 1000 \text{ N-s/m}$$

$$c = c_c/2 = 500 \text{ N-s/m}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} = \sqrt{\frac{5000}{50}} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= 8.6603 \text{ rad/sec}$$

۳- یک ترن به جرم ۲۰۰۰ کیلوگرم و سرعت ۱۰ متر بر ثانیه توسط یک سیستم جرم و فنر در انتهای مسیر متوقف می‌شود. اگر سفتی فنر ۴۰ نیوتن بر میلی‌متر باشد و ثابت دمپر ۲۰ نیوتن‌ثانیه بر میلی‌متر باشد حداکثر جابه‌جایی چقدر است؟



$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{40000}{2000}} = 4.4721 \text{ rad/sec}$$

$$c_c = 2\sqrt{km} = 25,298.221 \text{ N-sec/m}$$

$$\zeta = c/c_c = 0.7906$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 4.4721 \sqrt{1 - (0.7906)^2} = 2.7384 \text{ rad/sec}$$

$$\tau_d = 2\pi/\omega_d = 2.2945 \text{ sec}$$

(a) For $x_0 = 0$ and $\dot{x}_0 = 10 \text{ m/sec}$, Eq. (2.72) gives

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \frac{\dot{x}_0}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t$$

At $x_{\max}$, $\omega_n t \simeq \frac{\pi}{2}$ and $\sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \simeq 1$

$$\therefore x_{\max} \simeq e^{-0.7906(\pi/2)} \cdot \left(\frac{10}{2.7384}\right) \cdot (1) = 1.0548 \text{ m}$$

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left\{ x_0 \cos \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t + \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n} \sin \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n t \right\}$$