

درجه آزادی: تعداد متغیرهای مستقل (مختصات مستقل) که برای بیان حرکت کامل سیستم مورد نیاز است. سیستم‌های دینامیکی معمولاً دارای درجه آزادی زیادی هستند که برای سادگی تحلیل، در درجات آزادی پایین‌تر مدل‌سازی می‌شوند. در این فصل به بررسی رفتار دینامیکی سیستم یک درجه آزادی خطی پرداخته می‌شود.

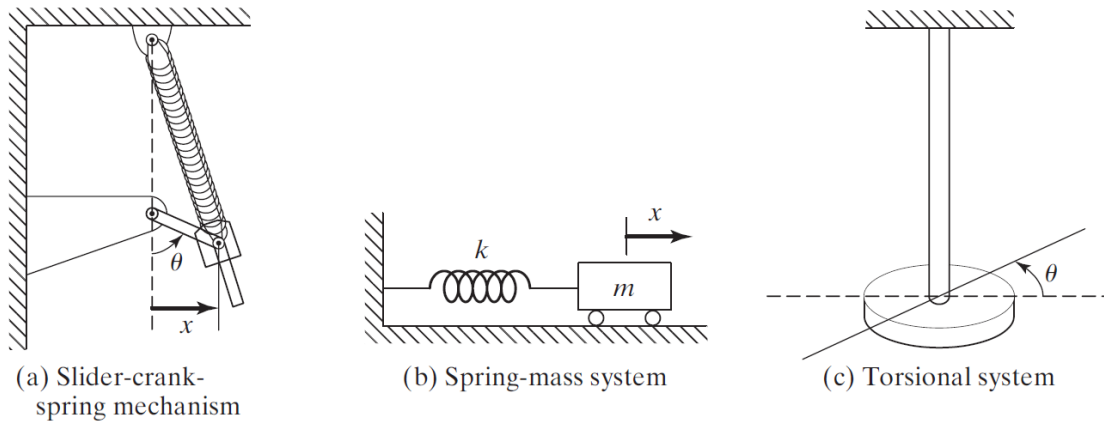


FIGURE 1.11 Single-degree-of-freedom systems.

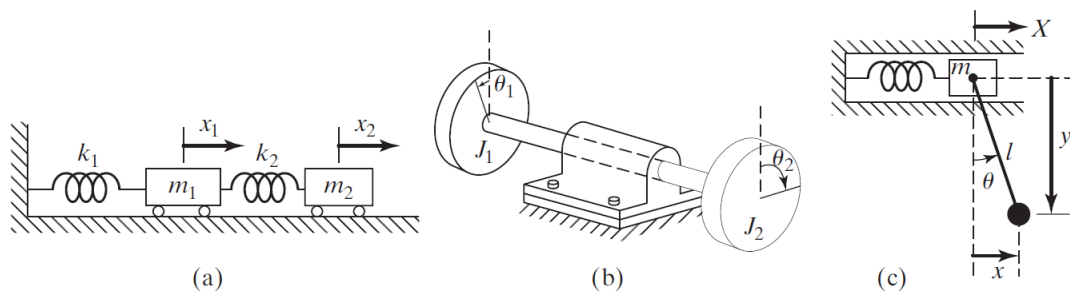


FIGURE 1.12 Two-degree-of-freedom systems.

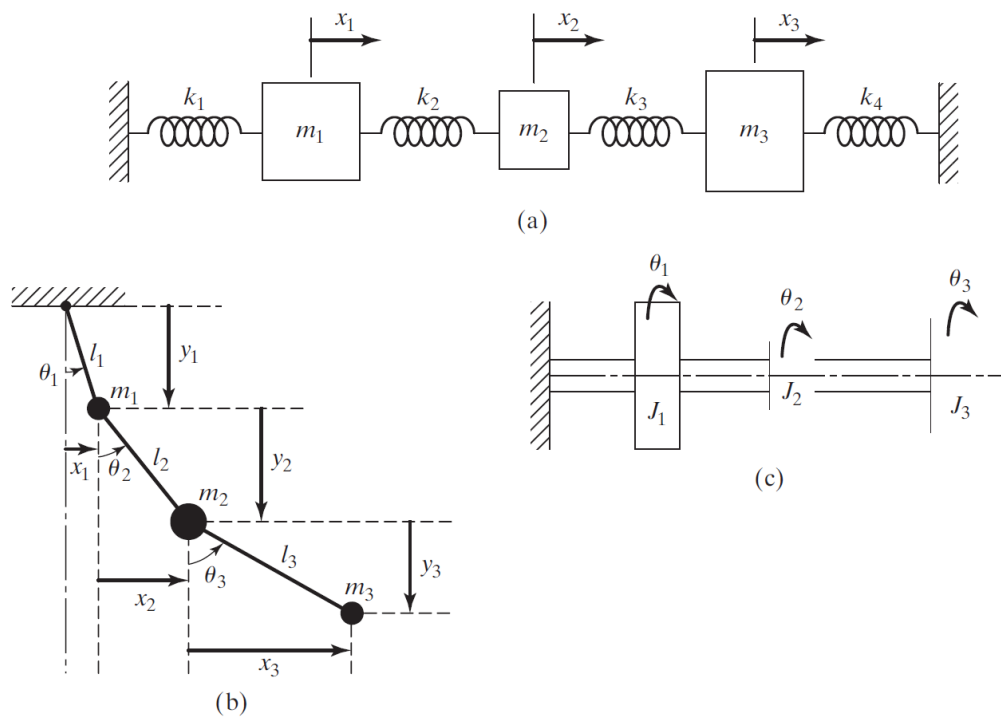


FIGURE 1.13 Three-degree-of-freedom systems.

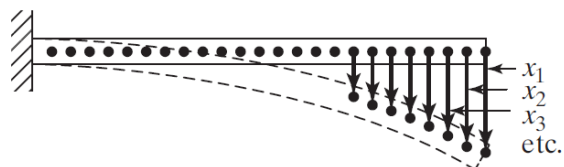


FIGURE 1.14 A cantilever beam
(an infinite-number-of-degrees-of-freedom system).

دسته بندی ارتعاشات: ارتعاشات آزاد - ارتعاشات اجباری - با مستهلک کننده - بدون مستهلک کننده -
خطی - غیر خطی - ارتعاشات خود تحریک - ارتعاشات متناوب

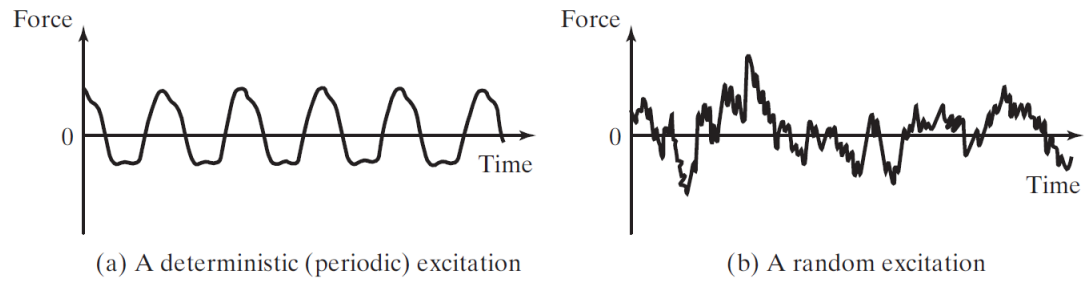


FIGURE 1.15 Deterministic and random excitations.

مدل سازی ریاضی یک موتورسیکلت:

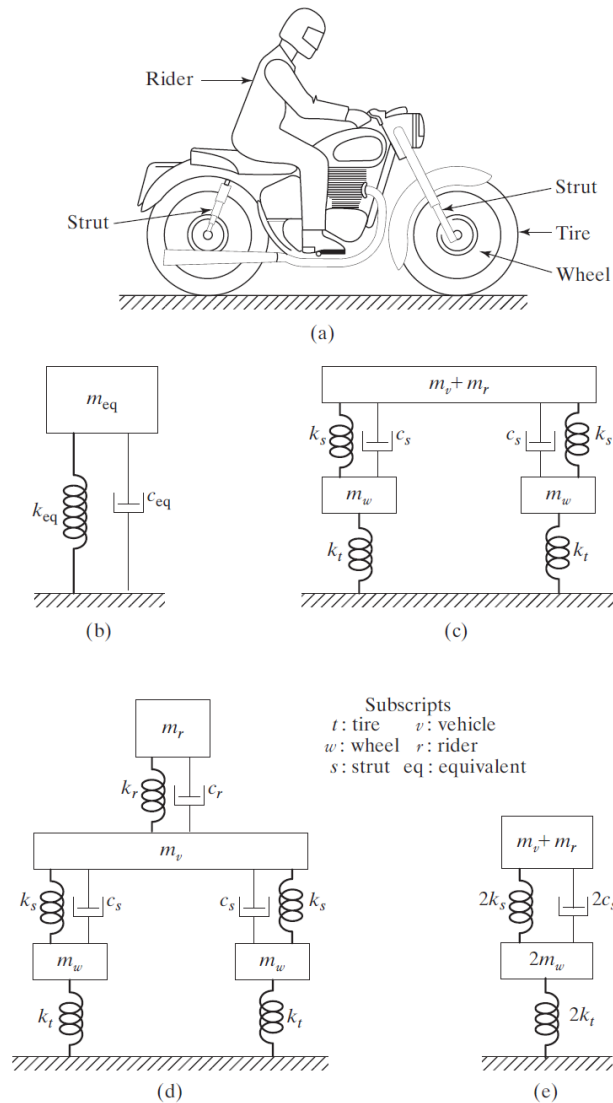
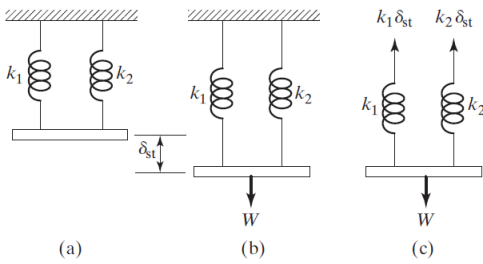


FIGURE 1.17 Motorcycle with a rider—a physical system and mathematical model.

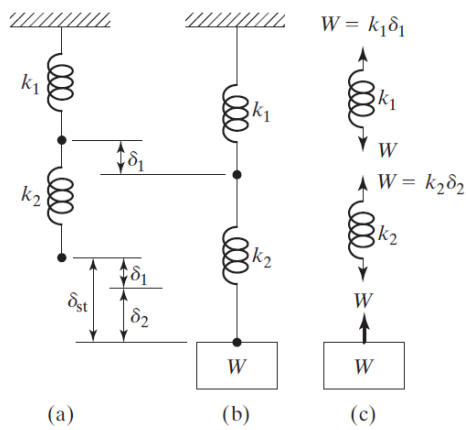
فنرهای موازی:



$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

FIGURE 1.27 Springs in parallel.

فنرهای سری:



$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

FIGURE 1.28 Springs in series.

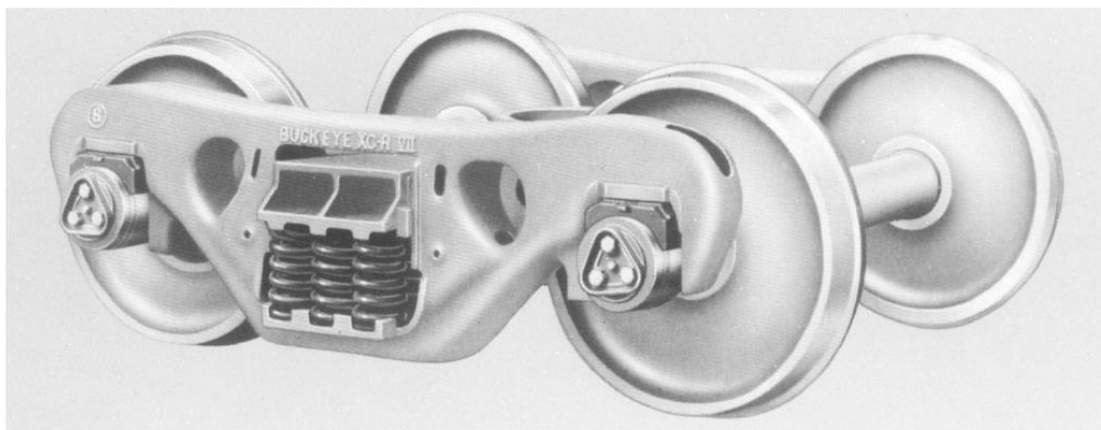


FIGURE 1.29 Parallel arrangement of springs in a freight truck. (Courtesy of Buckeye Steel Castings Company.)

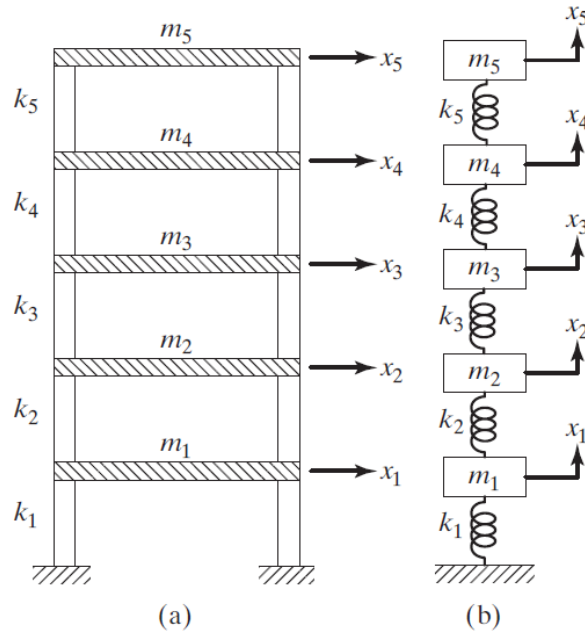


FIGURE 1.35 Idealization of a multistory building as a multi-degree-of-freedom system.

معادلات دیفرانسیل خطی ضرایب ثابت:

ابتدا با جایگذاری r معادله مشخصه به دست خواهد آمد.

نکته: $i^2 = -1$

$$y''' - y' = 0$$

$$r^3 - r = 0 \Rightarrow r(r^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 1 \\ r = -1 \end{cases}$$

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{1x} + c_3 e^{-1x} \\ = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}$$

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$$

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \Rightarrow (r - 1)^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ r = 1 \\ r = 1 \end{cases}$$

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

$$r^2 + 4r + 5 = 0 \Rightarrow (r + 2 - i)(r + 2 + i) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = -2 + i \\ r = -2 - i \end{cases}$$

$$y = c_1 e^{-2x} \cos 1x + c_2 e^{-2x} \sin 1x$$

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0$$

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \Rightarrow (r^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \pm i \\ r = 0 \pm i \end{cases}$$

$$y = c_1 e^{0x} \cos 1x + c_2 e^{0x} x \cos 1x + c_3 e^{0x} \sin 1x + c_4 e^{0x} x \sin 1x \\ = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x$$

ارتعاشات آزاد سیستم یک درجه آزادی:

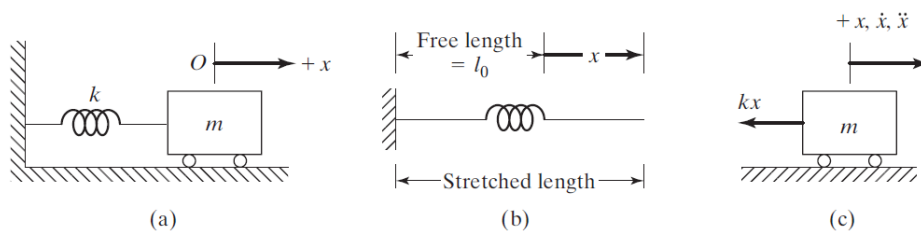


FIGURE 2.1 A spring-mass system in horizontal position.

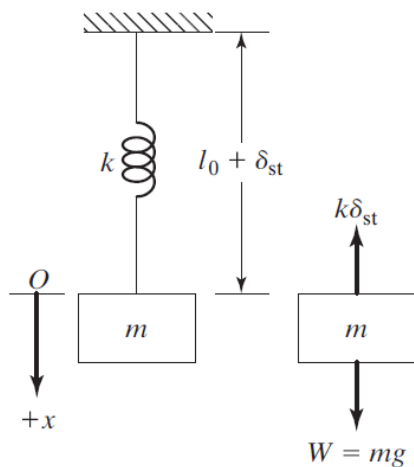
قانون دوم نیوتن:

۱- ابتدا دیاگرام آزاد سیستم را رسم کنید.

۲- اگر سیستم حرکت انتقالی داشت از قانون دوم نیوتن و اگر حرکت دورانی داشت از معادله اوایلر استفاده می‌شود.

۳- در نهایت معادله دیفرانسیل به کمک شرایط اولیه حل شده و معادله حرکت و فرکانس طبیعی سیستم حاصل می‌شود.

مثال) فرکانس طبیعی سیستم ارتعاشی زیر را به دست آورید.



$$W = mg = k\delta_{st}$$

$$m\ddot{x} = -k(x + \delta_{st}) + W$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow r = 0 \pm \sqrt{\frac{k}{m}}i$$

$$x = c_1 \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t + c_2 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

روش انرژی:

اصل انرژی بیان می کند که مجموع انرژی جنبشی T و انرژی پتانسیل U ثابت است.

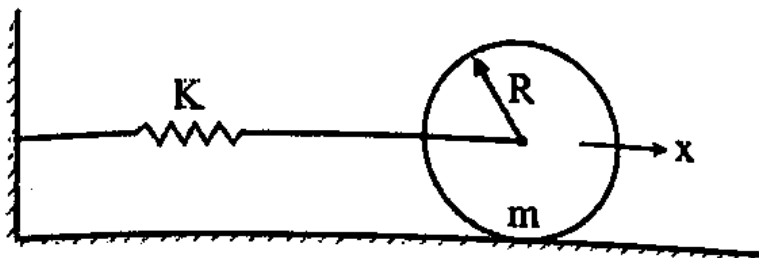
$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0$$

حل مسئله قبل به کمک روش انرژی:

$$\left. \begin{array}{l} T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ U = \frac{1}{2}kx^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0 \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

مثال) در شکل زیر استوانه همگنی می تواند بدون لغزیدن روی سطح افقی حرکن توسانی

انجام دهد. فرکانس طبیعی سیستم کدام است؟

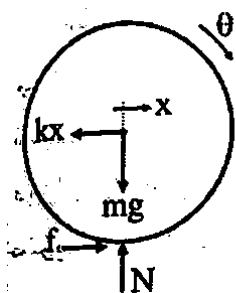


نکته بسیار مهم:

۱- ممان اینرسی استوانه حول مرکز آن برابر است با: $I_0 = \frac{1}{2}mR^2$

۲- ممان اینرسی استوانه حول محل تماس با زمین برابر است با: $I_0 = \frac{1}{2}mR^2 + mD^2$

* اگر حول مرکز تماس با زمین گشتاور بگیریم:



$$\sum T_A = I_A \alpha \Rightarrow -kxR = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} ; x = R\theta$$

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} + kR^2\theta = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}m\ddot{\theta} + k\theta = 0 \Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

* اگر حول مرکز استوانه گشتاور بگیریم:

$$\sum F = ma \Rightarrow f - kx = m\ddot{x} \Rightarrow f = kx + m\ddot{x}$$

$$\sum T_o = I_o \alpha \Rightarrow -f \times R = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta} \Rightarrow -(kx + m\ddot{x}) \times R = \frac{1}{2}mR^2\ddot{\theta}$$

$$m\ddot{x} + kx + \frac{1}{2}mR = 0 \Rightarrow mR(\ddot{\theta}) + kR\theta + \frac{1}{2}mR\ddot{\theta} = 0$$

$$m\ddot{\theta} + k\theta + \frac{1}{2}m\ddot{\theta} = \frac{3}{2}m\ddot{\theta} + k\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2k}{3m}\theta = 0$$