

۶- معادله‌ی حالت گاز ایده‌آل (Equation of state)

• مقدمه

• در بخش گذشته در خصوص جداول ترمودینامیکی و اطلاعات ارائه شده در آنها مطالبی بیان شد.

• ارائه‌ی تمام خواص یک ماده با استفاده از جداول ترمودینامیکی بسیار حجیم و غیرقابل استفاده است.

• بنابراین در حالتی که امکان‌پذیر باشد، از روابط ساده برای تعیین خواص بهره گرفته می‌شود.

• معادله‌ای که فشار، دما و حجم مخصوص ماده‌ای را به هم ارتباط دهد، معادله‌ی حالت نام دارد.

• مشهورترین این معادلات، معادله‌ی حالت گاز ایده‌آل است.

• این معادله رفتار $P-v-T$ گازها را در یک ناحیه‌ی انتخابی پیش‌بینی می‌کند.

• در اینجا باید بین گاز و بخار تفاوت قائل شد.

• بخار ماده‌ای را که در دمای بالاتر از دمای بحرانی است، گاز می‌گویند.

$$Pv = RT$$

معادله‌ی حالت گاز ایده‌آل

ثابت گازها

۶- معادله‌ی حالت گاز ایده‌آل (Equation of state)

•مقدمه (۱۵امه)

ثابت عمومی گازها

• ثابت گازها (R) برای هر گاز متفاوت بوده و توسط رابطه‌ی زیر تعیین می‌گردد.

$$R = \frac{R_u}{M} \quad (\text{kJ/kg}\cdot\text{K or kPa}\cdot\text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{K})$$

جرم مولکولی

• ثابت گاز برای چند گاز مختلف:

Substance	R, kJ/kg·K
Air	0.2870
Helium	2.0769
Argon	0.2081
Nitrogen	0.2968

۱۰ اگر معادله‌ی حالت برای یک جرم ثابت نوشته شود:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

TABLE A.5

Properties of Various Ideal Gases at 25°C, 100 kPa (SI Units)

Gas	Chemical Formula	Molecular Mass (kg/kmol)	R (kJ/kg·K)	ρ (kg/m ³)	C_{p0} (kJ/kg·K)	C_{v0} (kJ/kg·K)	$k = \frac{C_p}{C_v}$
Steam	H ₂ O	18.015	0.4615	0.0231	1.872	1.410	1.327
Acetylene	C ₂ H ₂	26.038	0.3193	1.05	1.699	1.380	1.231
Air	—	28.97	0.287	1.169	1.004	0.717	1.400
Ammonia	NH ₃	17.031	0.4882	0.694	2.130	1.642	1.297
Argon	Ar	39.948	0.2081	1.613	0.520	0.312	1.667
Butane	C ₄ H ₁₀	58.124	0.1430	2.407	1.716	1.573	1.091
Carbon dioxide	CO ₂	44.01	0.1889	1.775	0.842	0.653	1.289
Carbon monoxide	CO	28.01	0.2968	1.13	1.041	0.744	1.399
Ethane	C ₂ H ₆	30.07	0.2765	1.222	1.766	1.490	1.186
Ethanol	C ₂ H ₅ OH	46.069	0.1805	1.883	1.427	1.246	1.145
Ethylene	C ₂ H ₄	28.054	0.2964	1.138	1.548	1.252	1.237
Helium	He	4.003	2.0771	0.1615	5.193	3.116	1.667
Hydrogen	H ₂	2.016	4.1243	0.0813	14.209	10.085	1.409
Methane	CH ₄	16.043	0.5183	0.648	2.254	1.736	1.299
Methanol	CH ₃ OH	32.042	0.2595	1.31	1.405	1.146	1.227
Neon	Ne	20.183	0.4120	0.814	1.03	0.618	1.667
Nitric oxide	NO	30.006	0.2771	1.21	0.993	0.716	1.387
Nitrogen	N ₂	28.013	0.2968	1.13	1.042	0.745	1.400
Nitrous oxide	N ₂ O	44.013	0.1889	1.775	0.879	0.690	1.274
<i>n</i> -Octane	C ₈ H ₁₈	114.23	0.07279	0.092	1.711	1.638	1.044
Oxygen	O ₂	31.999	0.2598	1.292	0.922	0.662	1.393
Propane	C ₃ H ₈	44.094	0.1886	1.808	1.679	1.490	1.126
R-12	CCl ₂ F ₂	120.914	0.06876	4.98	0.616	0.547	1.126
R-22	CHClF ₂	86.469	0.09616	3.54	0.658	0.562	1.171
R-32	CF ₂ H ₂	52.024	0.1598	2.125	0.822	0.662	1.242
R-125	CHF ₂ CF ₃	120.022	0.06927	4.918	0.791	0.722	1.097
R-134a	CF ₃ CH ₂ F	102.03	0.08149	4.20	0.852	0.771	1.106
Sulfur dioxide	SO ₂	64.059	0.1298	2.618	0.624	0.494	1.263
Sulfur trioxide	SO ₃	80.053	0.10386	3.272	0.635	0.531	1.196

* Or saturation pressure if it is less than 100 kPa.

• مثال (تغییر دما در هوای درون یک تایر)

• فشار هوای درون تایر یک خودرو قبل از سفر برابر ۲۱۰ کیلوپاسکال و بعد از آن ۲۲۰ کیلوپاسکال ثبت گردیده است. در حالی که فشار هوا در هر دو حالت ۹۵ کیلوپاسکال می باشد. اگر دمای هوای داخل تایر قبل از سفر ۲۵ درجه ی سانتی گراد باشد، این دما بعد از سفر چقدر است. (در حالی که حجم تایر در طول این فرآیند ثابت می باشد).

• حل:

• فشار مطلق هوا قبل و بعد از سفر را بدست آورد.

$$P_1 = P_{\text{gage.1}} + P_{\text{atm}} = 210 + 95 = 305 \text{ kPa}$$

$$P_2 = P_{\text{gage.2}} + P_{\text{atm}} = 220 + 95 = 315 \text{ kPa}$$

• با فرض هوا بعنوان گاز ایده آل و ثابت بودن جرم هوای درون تایر:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \longrightarrow T_2 = \frac{P_2}{P_1} T_1 = \frac{315 \text{ kPa}}{305 \text{ kPa}} (25 + 273 \text{ K}) = 307.8 \text{ K} = \mathbf{34.8^\circ \text{C}}$$

مثال

جرم هوای داخل اتاقی به ابعاد $6\text{m} \times 10\text{m} \times 4\text{m}$ چقدر است؟ فرض کنید فشار هوا 100 کیلوپاسکال و دمای آن 25 درجه سلسیوس .

EXAMPLE 3.8 What is the mass of air contained in a room $6\text{ m} \times 10\text{ m} \times 4\text{ m}$ if the pressure is 100 kPa and the temperature is 25°C ?

Solution

Assume air to be an ideal gas. By using Eq. 3.5 and the value of R from Table A.5, we have

$$m = \frac{PV}{RT} = \frac{100\text{ kN/m}^2 \times 240\text{ m}^3}{0.287\text{ kN m/kg K} \times 298.2\text{ K}} = 280.5\text{ kg}$$

مثال

- مخزنی با حجم ۰/۵ متر مکعب حاوی ۱۰ کیلوگرم از یک گاز ایده ال با وزن مولکولی ۲۴ می باشد. دمای گاز ۲۵ درجه سلسیوس می باشد. فشار ظرف چقدر است؟.

Solution

The gas constant is determined first:

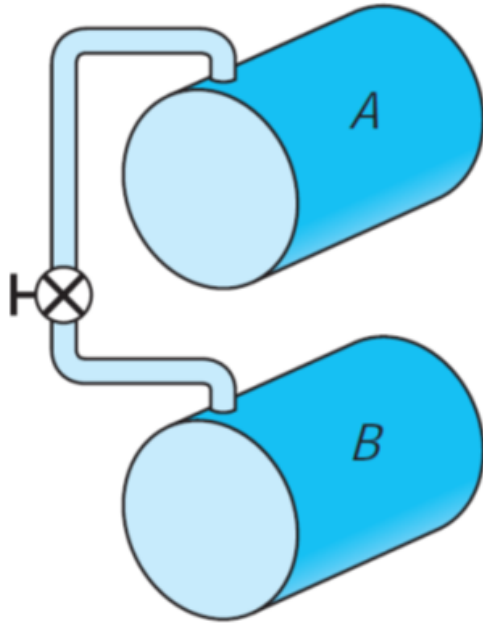
$$R = \frac{\bar{R}}{M} = \frac{8.3145 \text{ kJ/kmol K}}{24 \text{ kg/kmol}} \\ = 0.34644 \text{ kJ/kg K}$$

We now solve for P :

$$P = \frac{mRT}{V} = \frac{10 \text{ kg} \times 0.34644 \text{ kJ/kg K} \times 298.2 \text{ K}}{0.5 \text{ m}^3} \\ = 2066 \text{ kPa}$$

مثال

مخزن A با حجم ۱ متر مکعب حاوی پروپان در فشار ۱۰۰ کیلوپاسکال و دمای ۳۰۰ کلوین بوسیله یک شیر به مخزن B که حاوی ۰/۵ متر مکعب پروپان در فشار ۲۵۰ کیلوپاسکال و دمای ۴۰۰ کلوین است وصل شده است. شیر باز شده و هر دو مخزن به شرایط یکسان در دمای ۳۲۵ کیلوپاسکال خواهند رسید. دمای نهایی چقدر است؟



Solution:

Propane is an ideal gas with $R = 0.1886 \text{ kJ/kgK}$ from Tbl. A.5

$$m_A = \frac{P_A V_A}{RT_A} = \frac{100 \times 1}{0.1886 \times 300} = 1.7674 \text{ kg}$$

$$m_B = \frac{P_B V_B}{RT_B} = \frac{250 \times 0.5}{0.1886 \times 400} = 1.6564 \text{ kg}$$

$$V_2 = V_A + V_B = 1.5 \text{ m}^3$$

$$m_2 = m_A + m_B = 3.4243 \text{ kg}$$

$$P_2 = \frac{m_2 R T_2}{V_2} = \frac{3.4243 \times 0.1886 \times 325}{1.5} = \mathbf{139.9 \text{ kPa}}$$

مثال

3–76 A rigid tank whose volume is unknown is divided into two parts by a partition. One side of the tank contains an ideal gas at 927°C . The other side is evacuated and has a volume twice the size of the part containing the gas. The partition is now removed and the gas expands to fill the entire tank. Heat is now applied to the gas until the pressure equals the initial pressure. Determine the final temperature of the gas. *Answer: 3327°C*

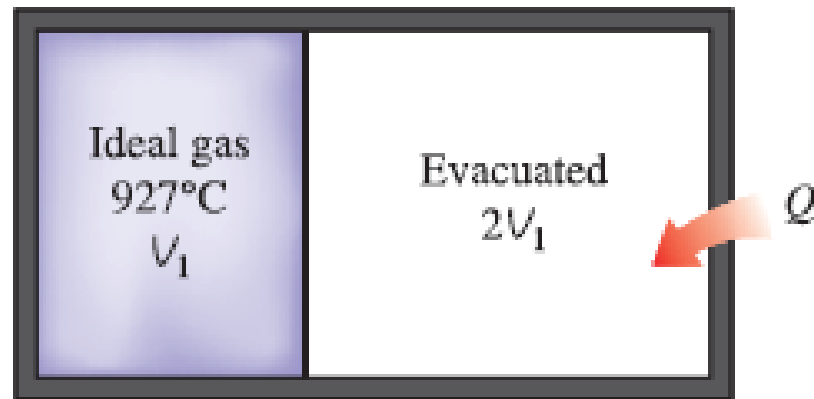


FIGURE P3–76

Assumptions The gas is specified as an ideal gas so that ideal gas relation can be used.

Analysis According to the ideal gas equation of state,

$$P_2 = P_1$$

$$V_2 = V_1 + 2V_1 = 3V_1$$

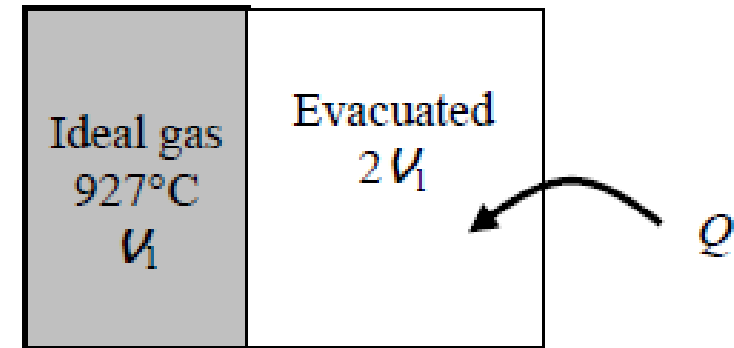
Applying these,

$$m_1 = m_1$$

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

$$T_2 = T_1 \frac{V_2}{V_1} = T_1 \frac{3V_1}{V_1} = 3T_1 = 3[927 + 273) \text{ K}] = 3600 \text{ K} = \mathbf{3327^\circ\text{C}}$$



مثال

3–77 Argon in the amount of 1.5 kg fills a 0.04-m³ piston-cylinder device at 550 kPa. The piston is now moved by changing the weights until the volume is twice its original size. During this process, argon's temperature is maintained constant. Determine the final pressure in the device.

Assumptions At specified conditions, argon behaves as an ideal gas.

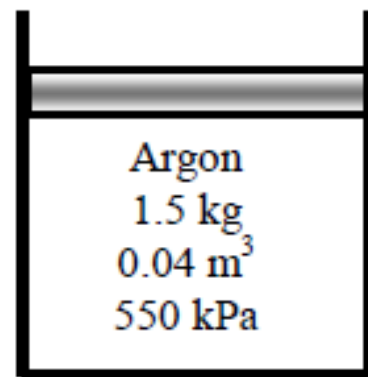
Properties The gas constant of argon is $R = 0.2081 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$ (Table A-1).

Analysis Since the temperature remains constant, the ideal gas equation gives

$$m = \frac{P_1 V_1}{RT} = \frac{P_2 V_2}{RT} \longrightarrow P_1 V_1 = P_2 V_2$$

which when solved for final pressure becomes

$$P_2 = P_1 \frac{V_1}{V_2} = P_1 \frac{V_1}{2V_1} = 0.5P_1 = 0.5(550 \text{ kPa}) = \mathbf{275 \text{ kPa}}$$



تمرین ۱

- در مثال قبل فرض کنید که مخزن A کره ای باشد که فشار داخل آن بصورت خطی با قطر کره تغییر نماید. مسئله را دوباره حل کنید. حجم اولیه کره را ۱ متر مکعب فرض نمایید

تمرین ۲

- یک کره فلزی تو خالی با قطر داخلی ۱۵۰ میلی متر توسط یک ترازوی دقیق هم وقتی خالی است و هم وقتی با گازی ناشناس تا فشار ۸۷۵ کیلوپاسکال پر شده است وزن شده است. تفاوت جرم ثبت شده در دمای ۲۵ درجه سلسیوس ۰/۰۰۲۵ کیلوگرم می باشد. با فرض آنکه گاز ایده ال باشد به کمک جدول A-5 بگویید چه گازی است؟

تمرین ۳

- هوای داخل لاستیک خودرو در ابتدا در دمای (-10) درجه سلسیوس و فشار 190 کیلوپاسکال قرار دارد. بعد از رانندگی خودرو دمايش تا 10 درجه سلسیوس افزایش می یابد. فشار جدید را بیابید. شما باید یک فرض مناسب داشته باشید

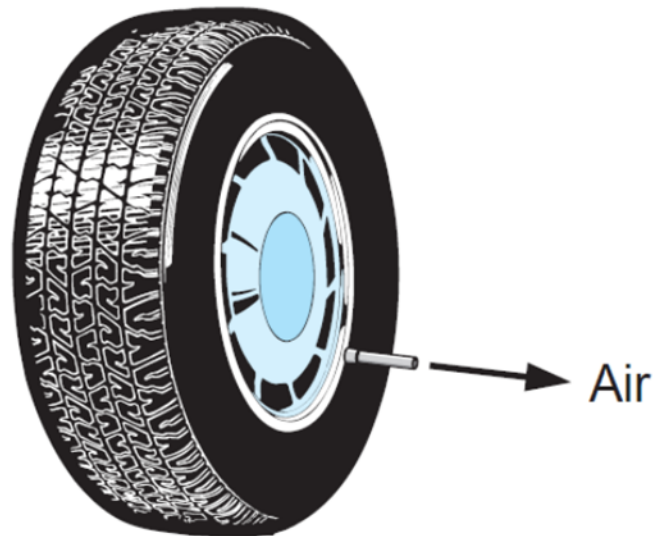


FIGURE P3.75

تحلیل سیستم‌های بسته

• در بخش اول این فصل خواهید آموخت:

✓ بررسی قانون اول ترمودینامیک و اصل پایستاری انرژی

✓ مکانیزم‌های انتقال گرما و انواع مختلف کار

✓ تعریف گرماهای ویژه

✓ ارائه‌ی رابطه‌ی بین انرژی داخلی و آنتالپی گازهای ایده‌آل بر حسب گرماهای

ویژه

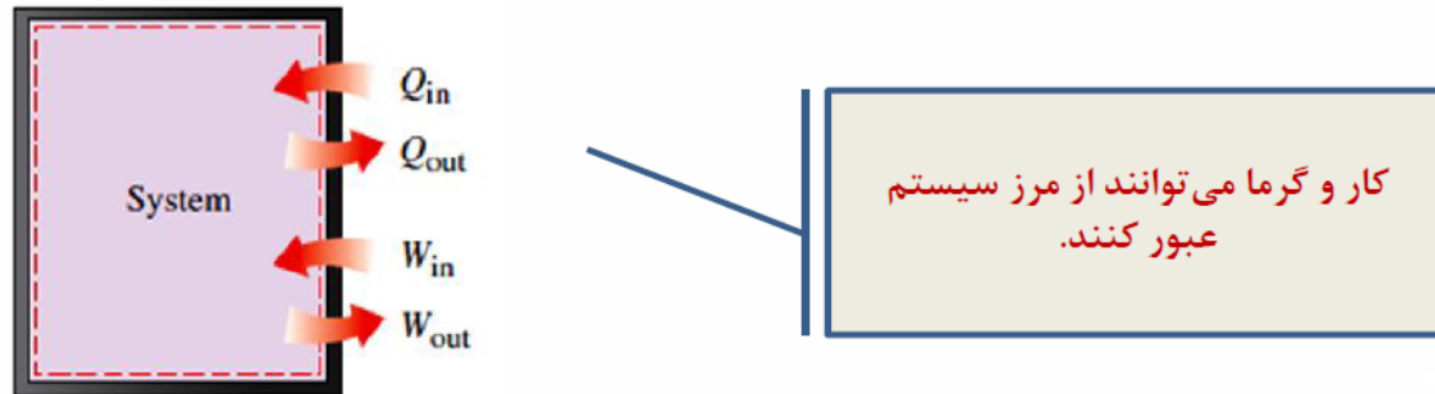
✓ بسط روابط به جامدات و مایعات

تحلیل سیستم‌های بسته

۱- مقدمه

• تعریف قانون اول ترمودینامیک

- انرژی را نمی‌توان خلق یا نابود کرد، فقط می‌توان آن را تغییر شکل داد.
- آن را اصل اول ترمودینامیک یا اصل پایستاری انرژی می‌گویند.
- یعنی در برهم‌کنش بین سیستم و اطرافش، مقدار انرژی که سیستم دریافت می‌کند دقیقاً برابر است با مقدار انرژی که اطراف سیستم از دست می‌دهد.
- همچنین انرژی می‌تواند به دو صورت از مرز سیستم عبور کند: کار و گرما



۲- کار مرز متحرک

Moving boundary work

تعریف

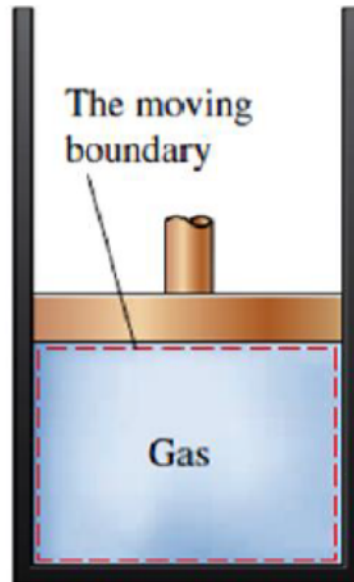
• گاز داخل یک سیلندر که در اثر گرما منبسط می‌شود، باعث جابجائی پیستون می‌گردد.

• این جابجائی مرز باعث انجام کار می‌گردد که به آن کار مرز متحرک می‌گویند.

• خواهیم آموخت که این کار برابر است با: $P dV$

• کار یک تابع دارای مسیر است و بدون دانستن مسیر نمی‌توان کار انجام شده بین دو حالت را مشخص نمود.

• در اینجا فرض می‌شود که فرآیندها شبه تعادلی هستند، که به آنها quasi-static process هم گفته می‌شود.



انتقال گرما به گاز درون سیلندر باعث افزایش دمای آن و بنابراین انبساط گاز می‌گردد.

این انبساط منجر به حرکت مرز و به تبع آن انجام کار خواهد شد.

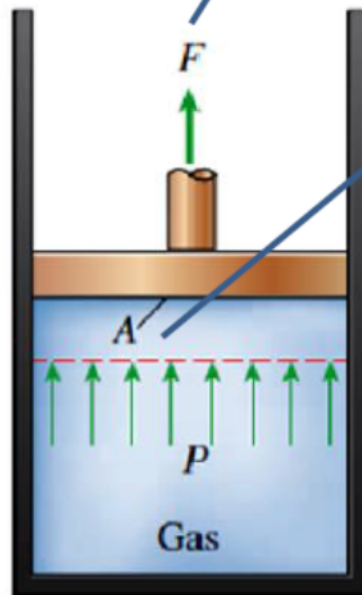


۲- کار مرز متحرک

• تعیین کار مرز متحرک

نیروی اعمال شده

• کار انجام شده همان نیروی اعمال شده در مسافت طی شده می باشد.



مساحت پیستون

مسافت طی شده

$$\delta W_b = F ds = PA ds = PdV$$

تغییرات حجم در
فرایند انبساط
مثبت است.

پس کار مرز در
فرایند انبساط
مثبت می باشد.

۲- کار مرز متحرک

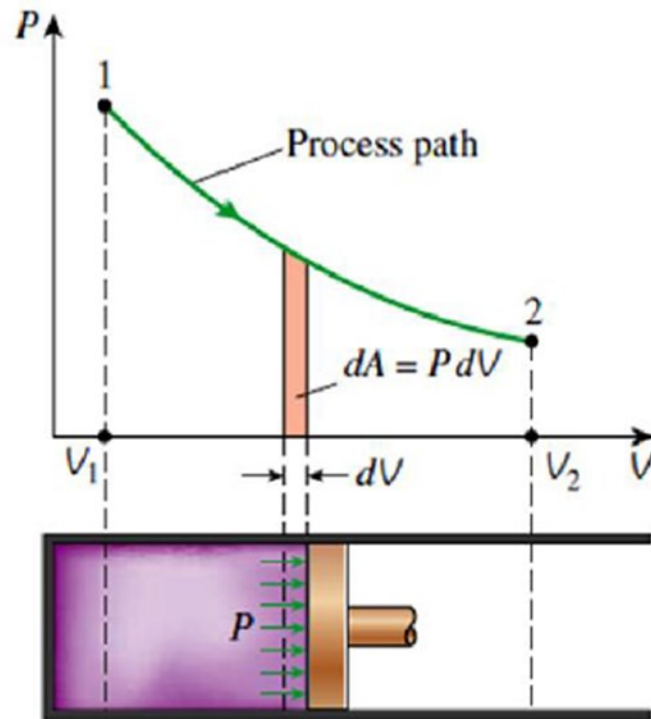
• تعیین کار مرز متحرک (ادامه)

• بنابراین کل کار را می توان با استفاده از انتگرال گیری بین دو حالت یک و دو بدست آورد.

$$W_b = \int_1^2 P dV \quad (\text{kJ})$$

• برای استفاده از این رابطه، باید ارتباط بین فشار و تغییرات حجم معلوم باشد. $P = f(V)$

• با رسم نمودار فشار در برابر تغییرات حجم نیز می توان کار انجام شده را محاسبه نمود.



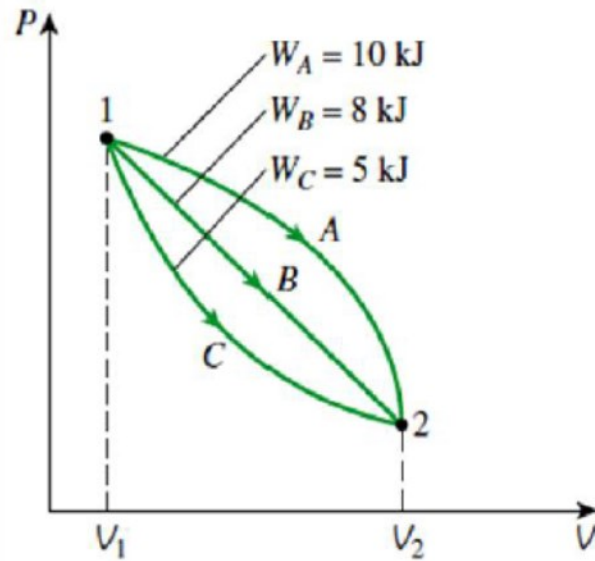
مساحت زیر نمودار PV همان کار انجام شده است.

۲- کار مرز متحرک

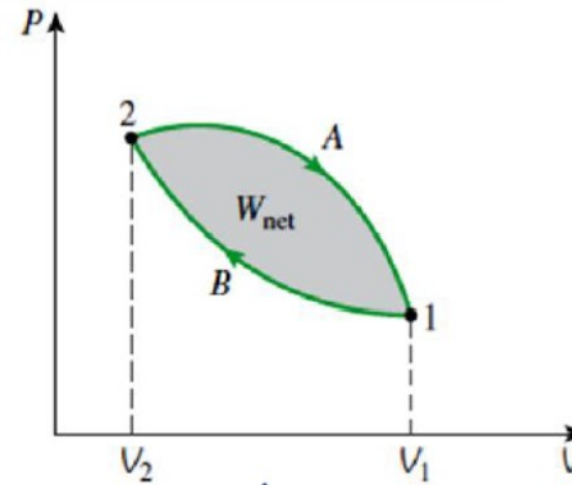
• تعیین کار مرز متحرک (ادامه)

• آموختیم که کار انجام شده به مسیر طی شده بستگی دارد.

• از همین خاصیت می توان برای انجام کار خالص در یک چرخه (سیکل) استفاده نمود.



کار انجام شده در یک فرآیند، علاوه بر نقاط ابتدا و انتها، به مسیر طی شده بستگی دارد.



در یک چرخه، می توان از همین خاصیت برای انجام کار خالص بهره گرفت.

۲- کار مرز متحرک

Polytropic process

فرآیند پلی تروپیک

در واقعیت، فرآیند انبساط و تراکم گازها از این رابطه تبعیت می کند.
به این فرآیندها، فرآیند پلی تروپیک گفته می شود.

بنابراین در یک فرآیند پلی تروپیک می توان نوشت:
بر همین اساس می توان کار مرز متحرک را به این شکل محاسبه نمود.

$$W_b = \int_1^2 P dV = \int_1^2 C V^{-n} dV = C \frac{V_2^{-n+1} - V_1^{-n+1}}{-n+1} = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1-n}$$

در حالی که: $C = P_1 V_1^n = P_2 V_2^n$

برای یک گاز ایده آل داریم: $PV = mRT$

بنابراین:

$$W_b = \frac{mR(T_2 - T_1)}{1-n} \quad n \neq 1 \quad (\text{kJ})$$

برای گاز ایده آل

در موارد خاص که $n=1$ باشد.

$$W_b = \int_1^2 P dV = \int_1^2 C V^{-1} dV = PV \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

که همانند رابطه ی بدست آمده
برای فرآیند ایزوترمال (هم دما)
است.

مقدمه

کار مرز متحرک

سیستم های بسته

گرمای ویژه

گاز ایده آل

مایعات و جامدات

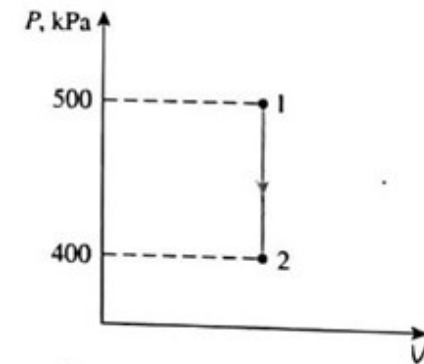
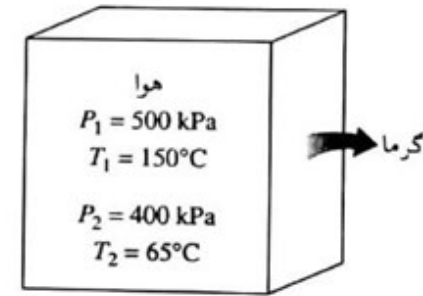
مثال ۱-۴ کار مرز طی فرایند هم حجم

مخزنی صلب حاوی هوا با دمای 150°C و فشار 500 kPa است. با انتقال گرما به پیرامون، دما و فشار درون مخزن به ترتیب تا 65°C و 400 kPa افت می کنند. کار مرز انجام شده طی این فرایند را به دست آورید. حل با سرمایش هوای درون مخزنی صلب، دما و فشار افت می کنند. می خواهیم کار مرز انجام شده را تعیین کنیم.

تحلیل شکل ۶-۴ ترسیم این سیستم و نمودار $P-V$ فرایند آن را نشان می دهد. کار مرز را از معادله ۲-۴ به دست می آوریم.

$$W_b = \int_1^2 P dV = 0$$

بحث این پاسخ دور از انتظار نیست؛ زیرا حجم مخزن صلب ثابت است، بنابراین در معادله فوق $dV = 0$. پس طی این فرایند، کار مرز انجام نمی شود. به بیان دیگر، کار مرز طی فرایند هم حجم همواره برابر با صفر است. با نگاه به نمودار $P-V$ فرایند، این نتیجه بدیهی به نظر می رسد؛ زیرا مساحت زیر منحنی فرایند در این نمودار برابر با صفر است.



شکل ۶-۴ طرحواره و نمودار $P-V$ مثال ۱-۴.

مثال ۲-۴ کار مرز طی فرایند هم فشار

یک دستگاه پیستون-سیلندر بی اصطکاک حاوی ۵ kg بخار آب با دمای 200°C و فشار ۴۰۰ kPa است. به بخار آب گرما منتقل می‌دهیم تا دما به 250°C برسد. فرض کنید این پیستون به شفت متصل نیست و جرم آن ثابت است؛ کار انجام شده توسط بخار آب طی این فرایند را به دست آورید. حل با گرمایش بخار آب درون یک دستگاه پیستون-سیلندر، دما در فشار ثابت افزایش می‌یابد. می‌خواهیم کار مرز انجام شده را تعیین کنیم.

تحلیل شکل ۷-۴ ترسیم این سیستم و نمودار $P-V$ فرایند آن را نشان می‌دهد.

فرض فرایند انبساط شبه تعادلی است.

تحلیل گرچه تصریح نشده است، فشار بخار آب درون سیلندر طی این فرایند ثابت می‌ماند؛ چراکه فشار جو و وزن پیستون ثابت است. پس این فرایند نوعی فرایند هم فشار است و از معادله ۲-۴ به دست می‌آوریم:

$$W_b = \int_1^2 P dV = P_* \int_1^2 dV = P_* (V_2 - V_1) \quad (۶-۴)$$

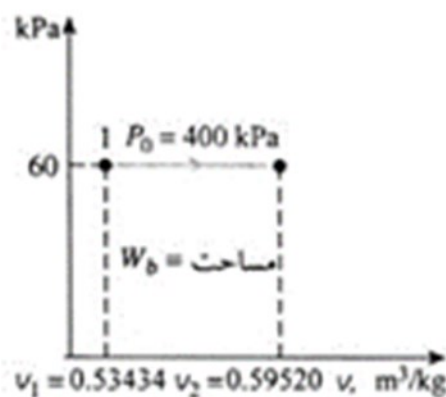
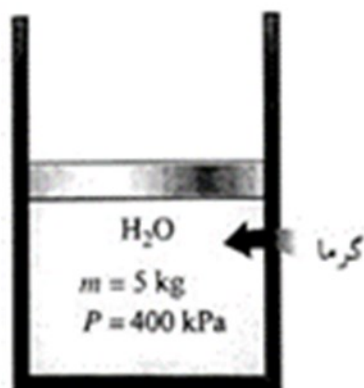
یا (چون $V = m\upsilon$):

$$W_b = mP_* (\upsilon_2 - \upsilon_1)$$

با رجوع به جدول بخار فراگرم (جدول الف - ۶)، برای حجم ویژه در حالت ۱ ($200^\circ\text{C}, 400 \text{ kPa}$) به دست می‌آوریم $\upsilon_1 = 0.53434 \text{ m}^3/\text{kg}$ و برای حالت ۲ ($250^\circ\text{C}, 400 \text{ kPa}$) به دست می‌آوریم $\upsilon_2 = 0.59520 \text{ m}^3/\text{kg}$. پس از جای‌گذاری این مقادیر خواهیم داشت:

$$W_b = (5 \text{ kg})(400 \text{ kPa})[(0.59520 - 0.53434) \text{ m}^3/\text{kg}] \left(\frac{1 \text{ kJ}}{1 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3} \right) = 122 \text{ kJ}$$

بحث علامت مثبت نشان می‌دهد سیستم کار انجام داده است؛ یعنی بخار آب ۱۲۲ kJ از انرژی خود را صرف انجام این کار کرده است. می‌توانیم اندازه این کار را با محاسبه مساحت زیر منحنی فرایند در نمودار $P-V$ نیز به دست آوریم. در این صورت به دست خواهیم آورد: $P_* \Delta V$.



شکل ۷-۴ طرح‌واره و نمودار $P-V$ مثال ۲-۴.

مثال ۳-۴ تراکم همدمای گاز آرمانی

یک دستگاه پیستون-سیلندر ابتدا حاوی 0.4 m^3 هوا با دمای 80°C و فشار 100 kPa است. هوا را تا حجم 0.1 m^3 به گونه‌ای متراکم می‌کنیم که دمای درون سیلندر ثابت بماند. کار انجام شده طی این فرایند را به دست آورید.

حل: هوای درون یک دستگاه پیستون-سیلندر به صورت هم‌دما متراکم می‌شود. می‌خواهیم کار مرز انجام شده را تعیین کنیم.

تحلیل: شکل ۸-۴ ترسیم این سیستم و نمودار $P-V$ فرایند آن را نشان می‌دهد.

فرض‌ها: ۱. فرایند تراکم شبه‌تعادلی است. ۲. هوا در این شرایط گاز آرمانی است؛ زیرا دمای هوا از دمای نقطه بحرانی آن بیش‌تر و فشار هوا از فشار نقطه بحرانی آن کم‌تر است.

تحلیل: برای گاز آرمانی در دمای ثابت T_0 (C ثابت گاز است):

$$PV = mRT_0 = C \quad \text{یا} \quad P = \frac{C}{V}$$

با جایگذاری این رابطه در معادله ۲-۴ به دست می‌آوریم:

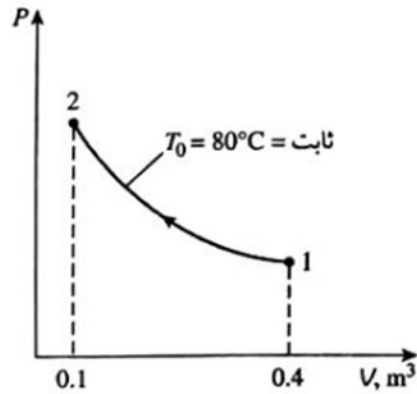
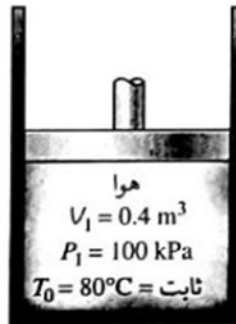
$$W_b = \int_1^2 P dV = \int_1^2 \frac{C}{V} dV = C \int_1^2 \frac{dV}{V} = C \ln \frac{V_2}{V_1} = P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (7-4)$$

در این مورد چون $P_1 V_1 = P_2 V_2$ ، در معادله ۷-۴ می‌توانیم $P_2 V_2$ یا mRT_0 را جایگزین $P_1 V_1$ و V_2/V_1 را جایگزین P_1/P_2 کنیم.

با جای‌گذاری مقادیر عددی در معادله ۷-۴ به دست می‌آوریم:

$$W_b = (100 \text{ kPa})(0.4 \text{ m}^3) \left(\ln \frac{0.1}{0.4} \right) \left(\frac{1 \text{ kJ}}{1 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3} \right) = -55.5 \text{ kJ}$$

بحث: علامت منفی نشان می‌دهد کار روی سیستم انجام شده است (کار ورودی). فرایندهای تراکم همواره این‌گونه‌اند.



شکل ۸-۴ طرح‌واره و نمودار $P-V$ مثال ۳-۴

فرایند پلی تروپیک

طی فرایندهای حقیقی انبساط و تراکم گاز معمولاً رابطه میان فشار و حجم به صورت $PV^n = C$ است (n و C ثابت اند). چنین فرایندی را فرایند پلی تروپیک می نامیم (شکل ۹-۴). در ادامه رابطه ای کلی برای کار انجام شده طی فرایند پلی تروپیک به دست می آوریم. فشار طی فرایند پلی تروپیک برابر است با:

$$P = CV^{-n} \quad (۸-۴)$$

با جای گذاری این رابطه در معادله ۲-۴، به دست می آوریم (چون $C = P_1 V_1^n = P_2 V_2^n$):

$$W_b = \int_1^2 P dV = \int_1^2 CV^{-n} dV = C \frac{V_2^{-n+1} - V_1^{-n+1}}{-n+1} = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1-n} \quad (۹-۴)$$

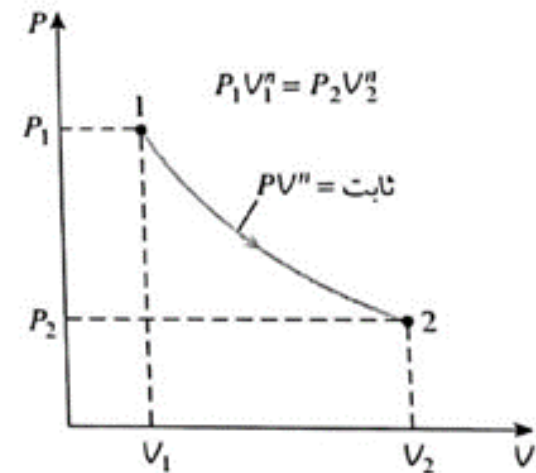
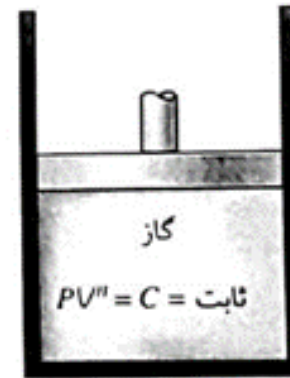
در گاز آرمانی ($PV = mRT$)، این معادله به صورت زیر در می آید:

$$W_b = \frac{mR(T_2 - T_1)}{1-n} \quad n \neq 1 \quad (\text{kJ}) \quad (۱۰-۴)$$

در حالت خاص $n = 1$ ، کار مرز برابر است با:

$$W_b = \int_1^2 P dV = \int_1^2 CV^{-1} dV = PV \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

رابطه فوق مشابه رابطه ای است که برای کار مرز در فرایند تراکم همدمای گاز آرمانی در مثال قبل به دست آوردیم

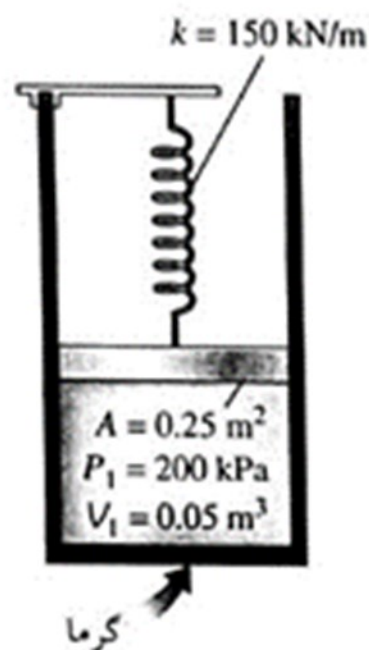


شکل ۹-۴ طرحواره و نمودار $P - V$ فرایند پلی تروپیک.

مثال ۴-۴ انبساط گاز در مقابل فنر

یک دستگاه پیستون-سیلندر حاوی 0.05 m^3 از نوعی گاز با فشار اولیه 200 kPa است. در این حالت، یک فنر خطی با ثابت 150 kN/m با پیستون تماس دارد، اما بر آن نیرو وارد نمی‌کند. اکنون به گاز گرما انتقال می‌دهیم تا پیستون بالا رفته، فنر را فشرده کند. انتقال گرما را تا جایی ادامه می‌دهیم که حجم درون سیلندر دو برابر شود. سطح مقطع عرضی پیستون 0.25 m^2 است. (الف) فشار نهایی درون سیلندر، (ب) کل کار انجام‌شده توسط گاز و (ج) بخشی از این کار را که صرف فشردن فنر می‌شود، محاسبه کنید.

حل گرمایش موجب انبساط نوعی گاز درون دستگاه پیستون-سیلندر مجهز به یک فنر خطی می‌شود. می‌خواهیم فشار نهایی گاز، کل کار انجام‌شده و بخشی از کار را که صرف فشردن فنر می‌شود، تعیین کنیم.



فرض‌ها ۱. فرایند انبساط شبه تعادلی است. ۲. فنر در بازه مورد بررسی خطی است. تحلیل شکل ۴-۱۰ ترسیم این سیستم و نمودار $P-V$ فرایند آن را نشان می‌دهد. (الف) حجم محصور در حالت نهایی برابر است با:

$$V_2 = 2V_1 = (2)(0.05 \text{ m}^3) = 0.1 \text{ m}^3$$

پس جابه‌جایی پیستون (و فنر) برابر است با:

$$x = \frac{\Delta V}{A} = \frac{(0.1 - 0.05) \text{ m}^3}{0.25 \text{ m}^2} = 0.2 \text{ m}$$

نیرویی که فنر خطی در حالت نهایی وارد می‌کند، برابر است با:

$$F = kx = (150 \text{ kN/m})(0.2 \text{ m}) = 30 \text{ kN}$$

فشار اضافی که در این حالت فنر بر گاز وارد می‌کند، برابر است با:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{30 \text{ kN}}{0.25 \text{ m}^2} = 120 \text{ kPa}$$

بدون وجود فنر، هنگام بالارفتن پیستون فشار گاز در ۲۰۰ kPa ثابت می‌ماند. اما با وجود فنر، فشار از مقدار اولیه ۲۰۰ kPa به صورت خطی تغییر می‌کند و در حالت نهایی به این مقدار می‌رسد:

$$200 + 120 = 320 \text{ kPa}$$

(ب) یک روش ساده برای یافتن کار انجام شده، ترسیم فرایند در نمودار $P-V$ و محاسبه مساحت زیر منحنی فشار است. مساحت زیر منحنی فشار (ذوزنقه) در شکل ۱۰-۴ برابر است با:

$$W = \text{مساحت} = \frac{(200 + 320) \text{ kPa}}{2} [(0.1 - 0.05) \text{ m}^3] \left(\frac{1 \text{ kJ}}{1 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3} \right) = 13 \text{ kJ}$$

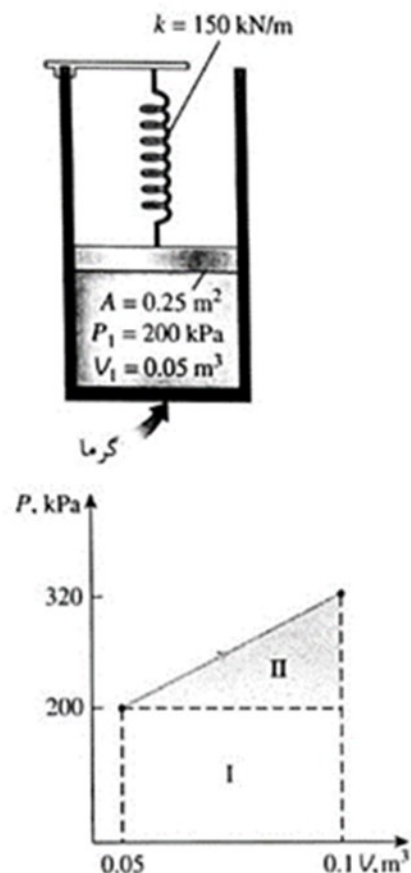
بنابراین سیستم کار انجام می دهد.

(ج) کار متناظر با مساحت مستطیل (ناحیه ۱) در مقابل پیستون و جو انجام می شود. کار متناظر با مساحت مثلث (ناحیه ۲) در مقابل فنر انجام می شود. بنابراین:

$$W_{\text{spring}} = \frac{1}{2} [(320 - 200) \text{ kPa}] (0.05 \text{ m}^3) \left(\frac{1 \text{ kJ}}{1 \text{ kPa} \cdot \text{m}^3} \right) = 3 \text{ kJ}$$

بحث این پاسخ را می توانیم از رابطه زیر نیز به دست آوریم:

$$W_{\text{spring}} = \frac{1}{2} k (x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2} (150 \text{ kN/m}) [(0.2 \text{ m})^2 - 0^2] \left(\frac{1 \text{ kJ}}{1 \text{ kN} \cdot \text{m}} \right) = 3 \text{ kJ}$$



شکل ۱۰-۴ طرح واره و نمودار $P-V$ مثال
۲-۴.

مثال

EXAMPLE 4.1

Consider as a system the gas in the cylinder shown in Fig. 4.7; the cylinder is fitted with a piston on which a number of small weights are placed. The initial pressure is 200 kPa, and the initial volume of the gas is 0.04 m³.

- a. Let a Bunsen burner be placed under the cylinder, and let the volume of the gas increase to 0.1 m³ while the pressure remains constant. Calculate the work done by the system during this process.

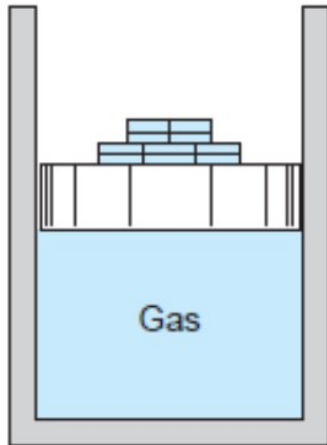


FIGURE 4.7

Sketch for
Example 4.1.

$${}_1W_2 = \int_1^2 P dV$$

Since the pressure is constant, we conclude from Eq. 4.4 that

$${}_1W_2 = P \int_1^2 dV = P(V_2 - V_1)$$

$${}_1W_2 = 200 \text{ kPa} \times (0.1 - 0.04) \text{ m}^3 = 12.0 \text{ kJ}$$

- b.** Consider the same system and initial conditions, but at the same time that the Bunsen burner is under the cylinder and the piston is rising, remove weights from the piston at such a rate that, during the process, the temperature of the gas remains constant.

If we assume that the ideal-gas model is valid, then, from Eq. 3.5,

$$PV = mRT$$

We note that this is a polytropic process with exponent $n = 1$. From our analysis, we conclude that the work is given by Eq. 4.4 and that the integral in this equation is given by Eq. 4.6. Therefore,

$$\begin{aligned} {}_1W_2 &= \int_1^2 P dV = P_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1} \\ &= 200 \text{ kPa} \times 0.04 \text{ m}^3 \times \ln \frac{0.10}{0.04} = 7.33 \text{ kJ} \end{aligned}$$

- c. Consider the same system, but during the heat transfer remove the weights at such a rate that the expression $PV^{1.3} = \text{constant}$ describes the relation between pressure and volume during the process. Again, the final volume is 0.1 m^3 . Calculate the work.

This is a polytropic process in which $n = 1.3$. Analyzing the process, we conclude again that the work is given by Eq. 4.4 and that the integral is given by Eq. 4.5. Therefore,

$$P_2 = 200 \left(\frac{0.04}{0.10} \right)^{1.3} = 60.77 \text{ kPa}$$

$$\begin{aligned} {}_1W_2 &= \int_1^2 P dV = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1 - 1.3} = \frac{60.77 \times 0.1 - 200 \times 0.04}{1 - 1.3} \text{ kPa m}^3 \\ &= 6.41 \text{ kJ} \end{aligned}$$

- d. Consider the system and the initial state given in the first three examples, but let the piston be held by a pin so that the volume remains constant. In addition, let heat be transferred from the system until the pressure drops to 100 kPa. Calculate the work.

Since $\delta W = P dV$ for a quasi-equilibrium process, the work is zero, because there is no change in volume.

The process for each of the four examples is shown on the P - V diagram of Fig. 4.8. Process 1-2a is a constant-pressure process, and area 1-2a-f-e-1 represents the work. Similarly, line 1-2b represents the process in which $PV = \text{constant}$, line 1-2c the process in which $PV^{1.3} = \text{constant}$, and line 1-2d the constant-volume process. The student should compare the relative areas under each curve with the numerical results obtained for the amounts of work done.

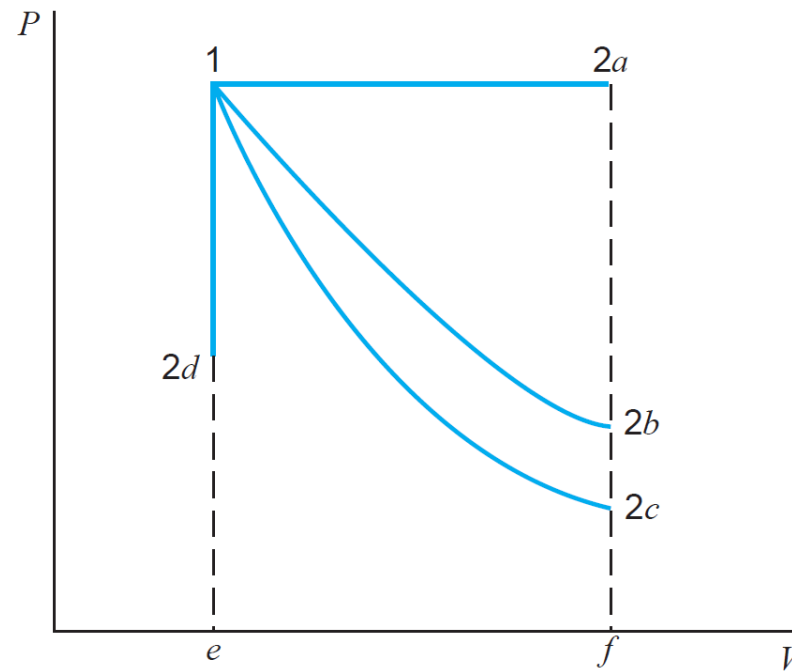


FIGURE 4.8 P - V diagram showing work done in the various processes of Example 4.1.