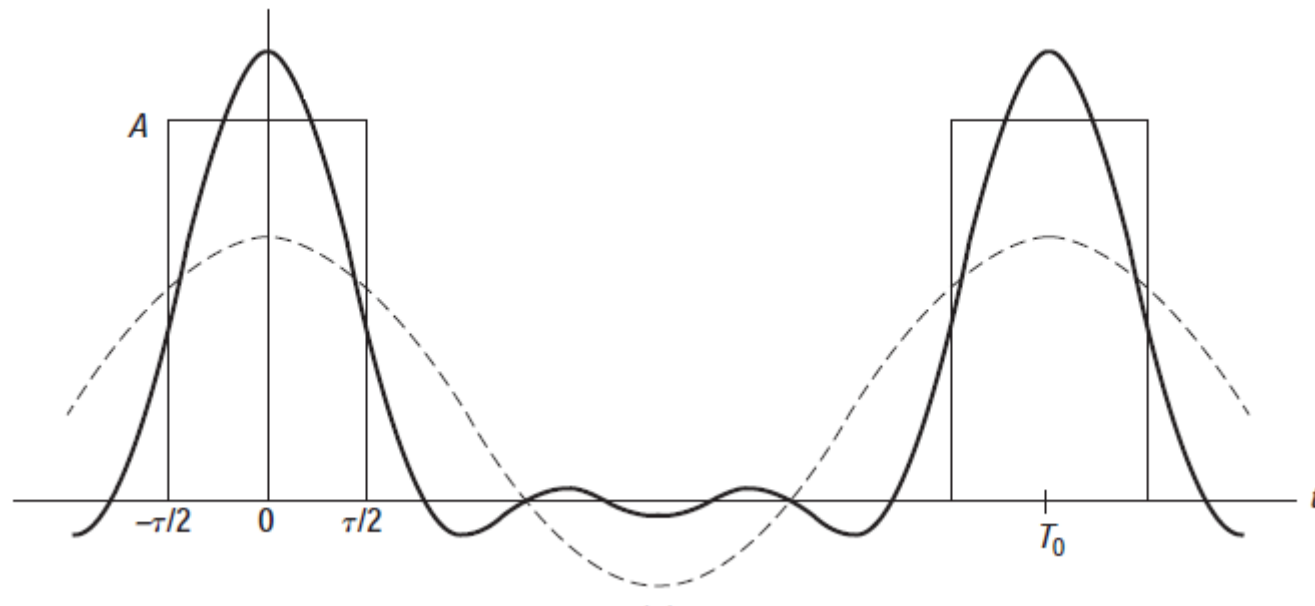


اصول سیستم‌های مخابراتی



فصل ۲ سیگنال و طیف

مدرس: احمد توکلی



ایمیل: atavakoli53@gmail.com

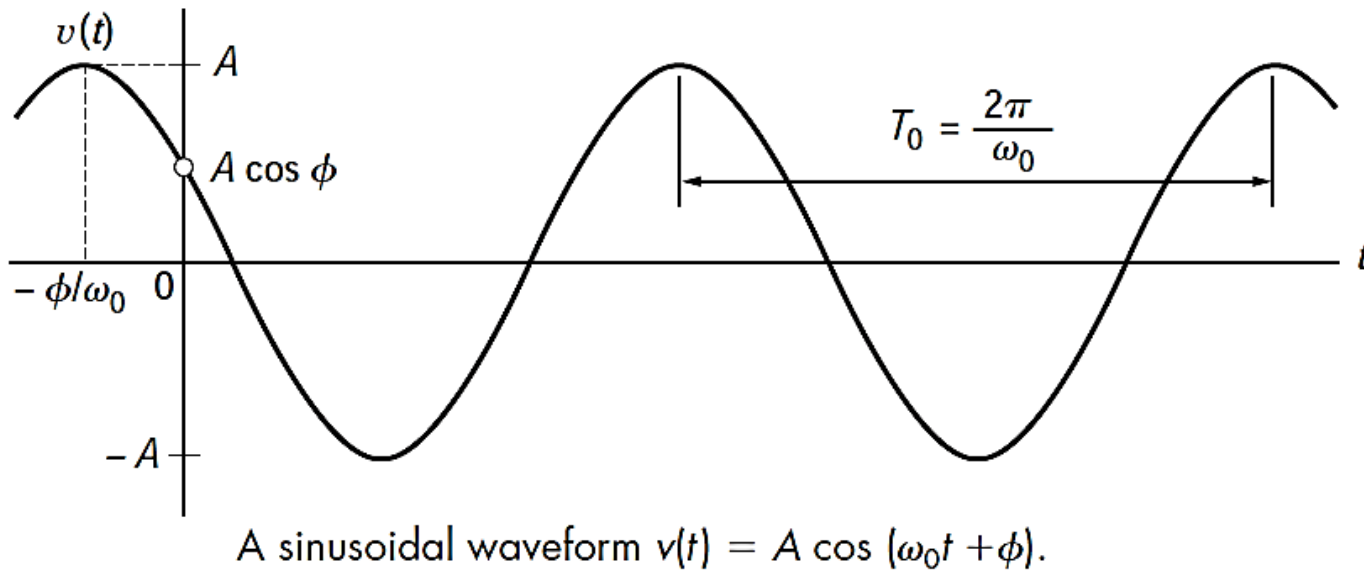
مقدمه

- سیگنال‌های مخابراتی الکتریکی مانند ولتاژ و جریان، سیگنال‌های متغیر با زمان هستند.
- در واقع، سیگنال در حوزه زمان وجود دارد، ولی می‌توان آن را در حوزه فرکانس نیز نمایش داد.
- در نمایش سیگنال در حوزه فرکانس، سیگنال را به صورت مجموعه‌ای از مولفه‌های سینوسی با فرکانس‌های متفاوت در نظر می‌گیرند.
- نمایش سیگنال در حوزه فرکانس را طیف (spectrum) می‌گویند.
- تحلیل طیفی، با استفاده از سری فوریه و تبدیل آن، یکی از روش‌های اساسی در مهندسی مخابرات است.
- تحلیل طیفی این امکان را فراهم می‌کند که دسته‌های کاملی از سیگنال‌ها با خواص مشابه را در حوه فرکانس بررسی کنیم.

طیف خطی

فیزور (Phasors) و طیف خطی (Line Spectra):

■ شکل موج سینوسی با معادله $v(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$ به صورت زیر است:



A : دامنه موج

فرکانس زاویه‌ای^۱ : $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

ϕ : زاویه فاز

^۱ منظور از ω_0 فرکانس خاصی است در مقابل متغیر ω ، مانند t_0 در مقابل متغیر t

طیف خطی

نمودار فیزیکی:

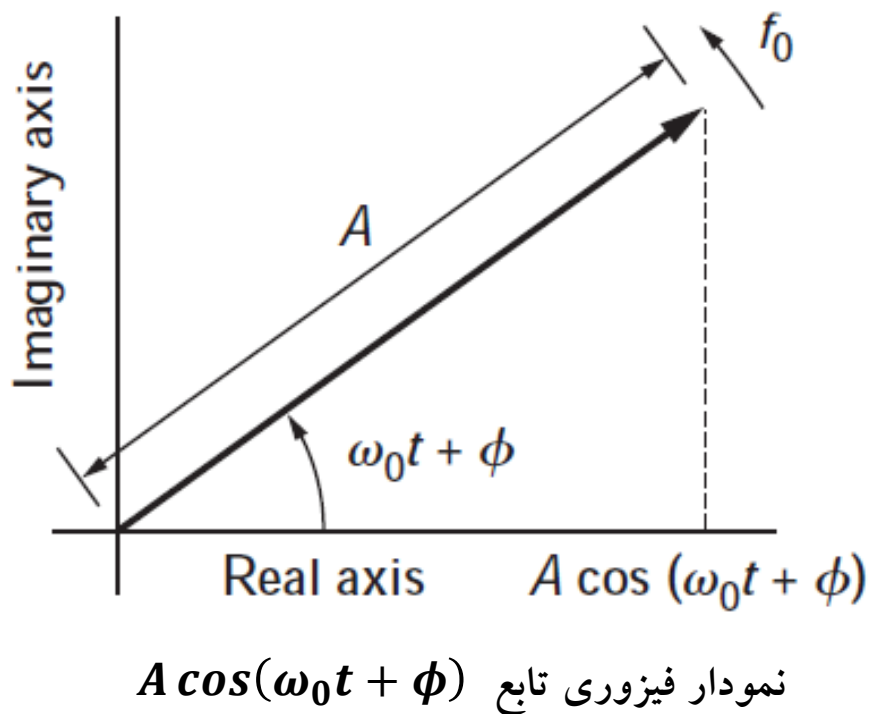
■ نمایش فیزیکی سیگنال سینوسی فوق از قضیه اویلر ($e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta$) به دست می آید.

■ اگر $\theta = \omega_0 t + \phi$ باشد، موج سینوسی فوق را می توان به صورت قسمت حقیقی یک تابع نمایی مختلط نوشت:

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \operatorname{Re}[e^{j(\omega_0 t + \phi)}] = \operatorname{Re}[A e^{j\phi} e^{j\omega_0 t}]$$

■ این جمله، نمایش فیزیکی نامیده می شود. زیرا عبارت داخل کروشه را می توان مطابق شکل مقابل به صورت یک بردار گردان در صفحه مختلط نشان داد.

■ طول بردار برابر A بوده و با فرکانس f_0 در جهت عکس حرکت عقربه های ساعت می چرخد و در لحظه $t = 0$ با محور حقیقی مثبت، زاویه ای برابر با ϕ دارد



طیف خطی

طیف خطی:

- برای نمایش فیزیکی یک سیگنال سینوسی به سه پارامتر دامنه، زاویه فاز و فرکانس نیاز داریم.
- برای نمایش تابع موج سینوسی می‌توان از طیف خطی نیز استفاده کرد.
- طیف خطی یک موج از دو نمودار دامنه و فاز تشکیل می‌شود.
- در رسم طیف خطی یک موج سینوسی باید نکات زیر را در نظر گرفت:

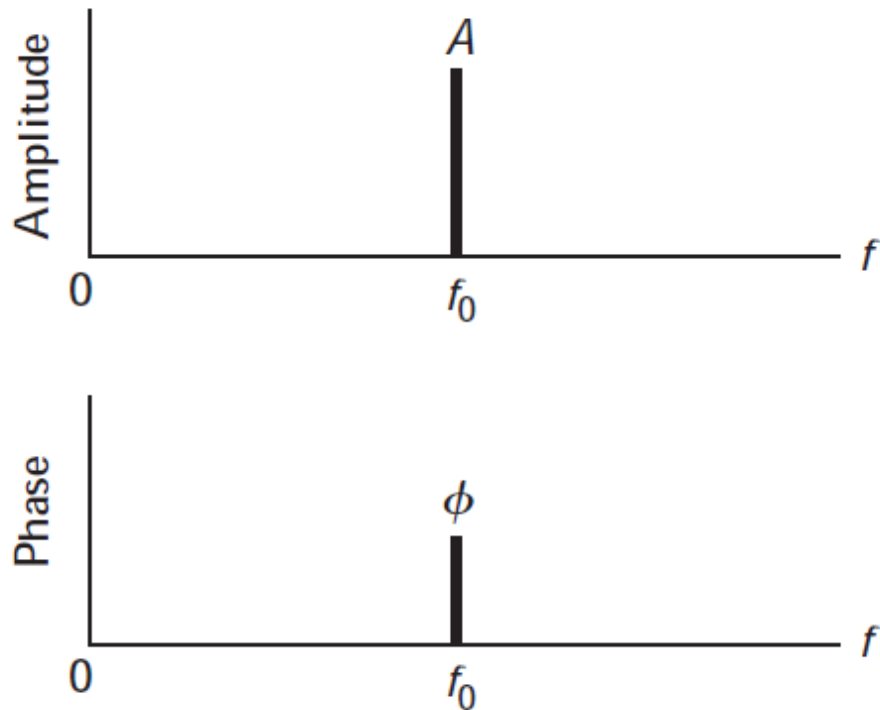
✓ چون قسمت حقیقی تابع نمایی مختلط، یک عبارت کسینوسی است، بنابراین اگر تابعی به صورت سینوسی نوشته شود، باید آن را با استفاده از اتحاد زیر به شکل کسینوسی تبدیل کرد:

$$\sin \omega t = \cos(\omega t - 90^\circ)$$

✓ دامنه همواره باید مثبت باشد، لذا اگر دامنه دارای علامت منفی باشد، علامت منفی را در زاویه فاز تاثیر دهیم:

$$-A \cos \omega t = A \cos(\omega t \pm 180^\circ)$$

البته مهم نیست که زاویه $+180^\circ$ باشد یا -180°



طیف خطی تابع $A \cos(\omega_0 t + \phi)$

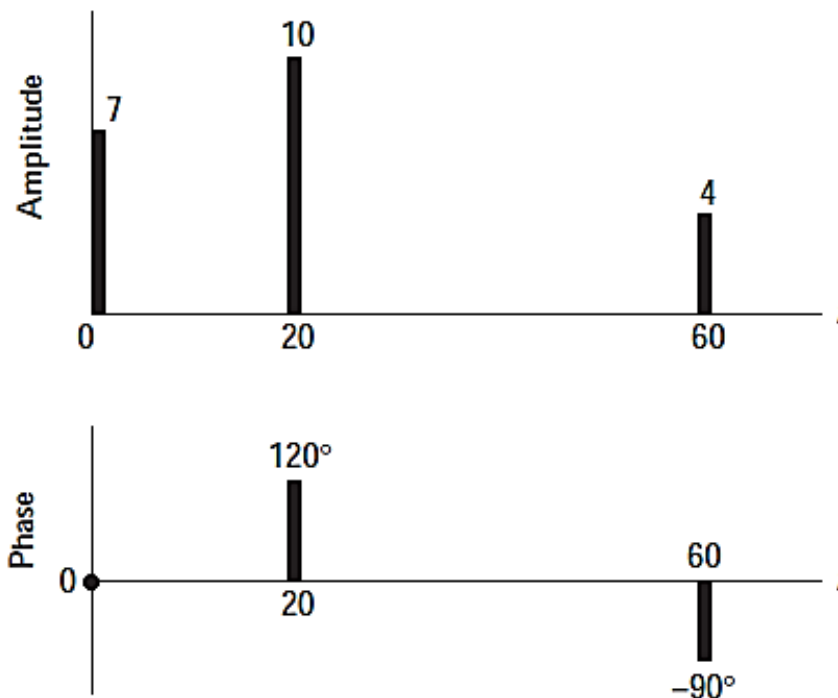
طیف خطی

مثال: طیف خطی سیگنال ولتاژی با معادله $v(t) = 7 - 10 \cos(40\pi t - 60^\circ) + 4 \sin 120\pi t$ را رسم کنید.

حل: ابتدا همه عبارت‌ها را به صورت کسینوسی می‌نویسیم:

$$v(t) = 7 \cos 2\pi(0)t + 10 \cos[2\pi(20)t - 60^\circ + 180^\circ] + 4 \cos[2\pi(60)t - 90^\circ]$$

$$v(t) = 7 \cos 2\pi(0)t + 10 \cos[2\pi(20)t + 120^\circ] + 4 \cos[2\pi(60)t - 90^\circ]$$



طیف خطی

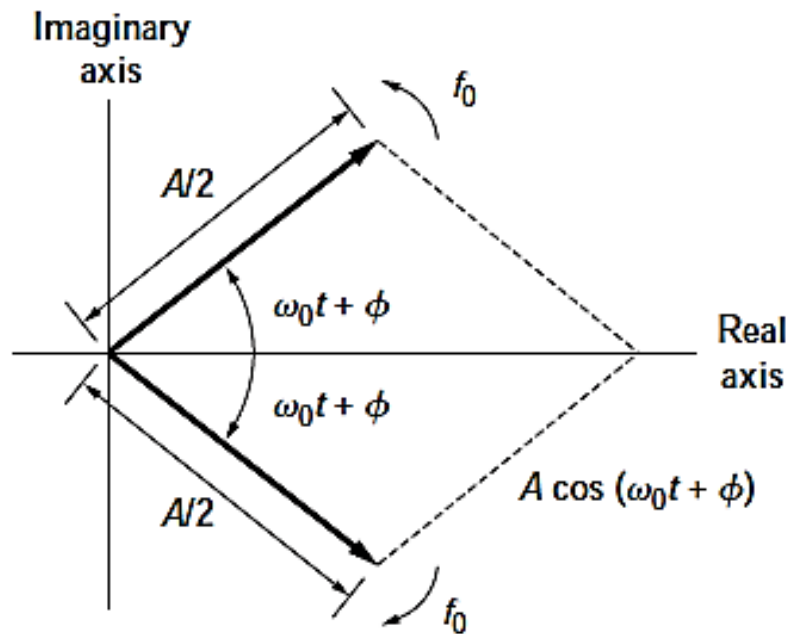
طیف خطی دو طرفه:

- طیف خطی شرح داده شده، طیف خطی «یک طرفه» یا «فرکانس مثبت» نام دارد که برای هر ترکیب خطی از جملات سینوسی می‌توان رسم کرد.
- برای کلیت بخشیدن به مباحث و تحلیل مسائل با توانایی بیشتر، از نمایش طیفی دیگری نیز می‌توان استفاده کرد که طیف خطی «دو طرفه» نام دارد.
- طیف خطی دو طرفه علاوه بر فرکانس‌های مثبت، شامل فرکانس‌های منفی نیز است.
- می‌دانیم اگر Z عدد مختلط و Z^* مزدوج آن باشد، آنگاه:
$$\text{Re}[Z] = \frac{1}{2}(Z + Z^*)$$
- بنابراین اگر $Z = Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 t}$ باشد، آنگاه $Z^* = Ae^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t}$ خواهد شد و در نتیجه می‌توان نوشت:
$$\text{Re}[Z] = A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{2}Ae^{j\phi}e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}Ae^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t}$$
- یعنی یک زوج فیزور مزدوج داریم که دارای فرکانس مثبت و منفی قرینه است.

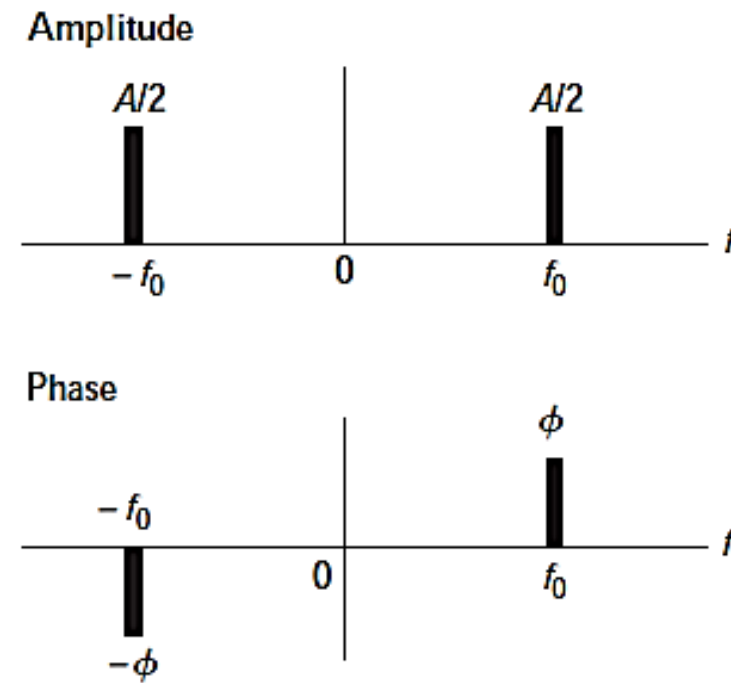
طیف خطی

طیف خطی دو طرفه:

■ طیف خطی دو طرفه و نمودار فیزیوری آن به صورت زیر است:



نمودار فیزیوری مزدوج



طیف خطی دو طرفه

طیف خطی

طیف خطی دو طرفه:

- در طیف خطی دو طرفه، دامنه طیف دارای تقارن زوج و فاز طیف دارای تقارن فرد است.
- در طیف خطی دو طرفه اگر از فاصله فرکانسی f_1 تا f_2 صحبت می‌شود، باید فاصله $-f_1$ تا $-f_2$ را نیز در نظر داشته باشیم. یعنی: $f_1 \leq |f| \leq f_2$
- طیف دامنه دارای اطلاعات بیشتری نسبت به طیف زاویه فاز است.

تمرین: طیف خطی یک طرفه و دو طرفه سیگنال ولتاژی با معادله $v(t) = -3 - 4 \sin 30\pi t$ را رسم کنید.

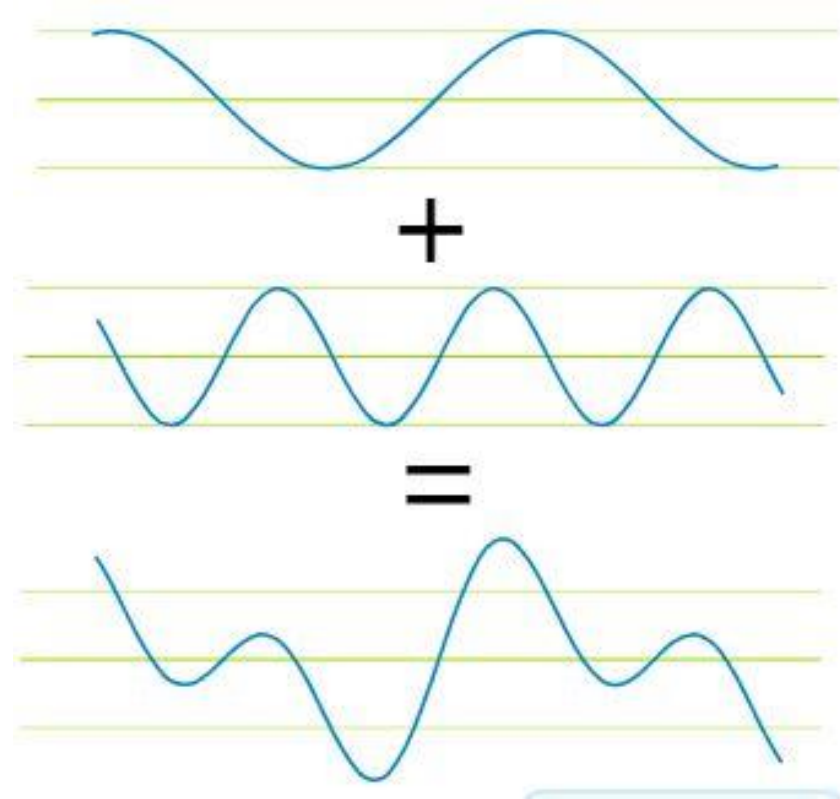
سری فوریه

مقدمه:

- سری فوریه، تبدیل فوریه و انتگرال فوریه به طور گسترده در علوم گوناگون، برای تحلیل فیزیکی پارامترهای ریاضی، ساده سازی مسائل مختلف و حل آنها مورد استفاده قرار می گیرد.
- سری فوریه در ریاضیات، روشی برای بیان یک تابع به صورت مجموع چندین موج سینوسی است.
- در واقع با استفاده از این سری می توان یک تابع متناوب را به صورت حاصل جمع چندین تابع نوسانی بیان کرد.
- این توابع نوسانی، می توانند به فرم سینوسی، کسینوسی و یا به فرم مختلط آنها بیان شوند.

سری فوریه

مقدمه:



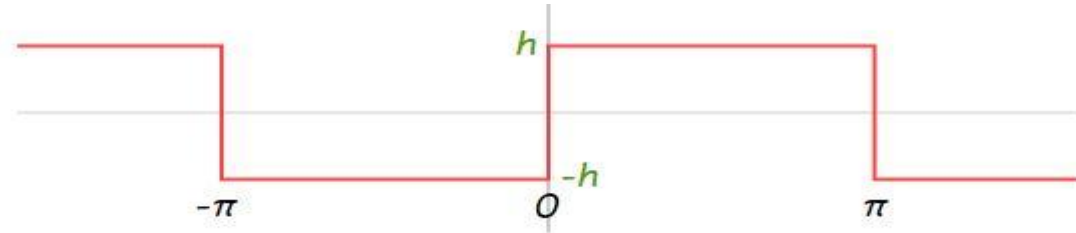
■ مفهوم پایه در پیدایش سری‌های فوریه این است که توابع مختلف را می‌توان به کمک توابع سینوسی و کسینوسی بازنویسی کرد

■ در شکل مقابل دو موج سینوسی مختلف با یکدیگر جمع شده‌اند و موج سوم را تولید کردند.

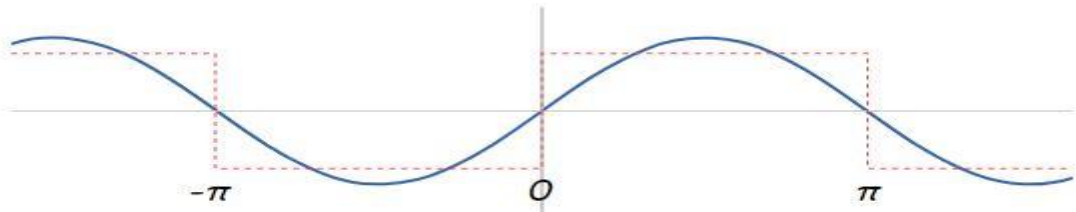
■ موج سینوسی اول، نشان دهنده تابع $\sin x$ بوده و موج دوم تابع $\sin 2x$ را نمایش می‌دهد.

سری فوریه

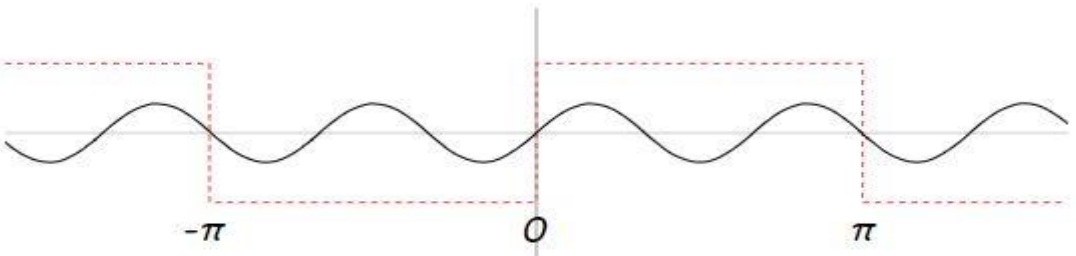
نمایش موج مربعی به کمک موج‌های سینوسی :



■ موج مربعی مقابل را در نظر بگیرید.



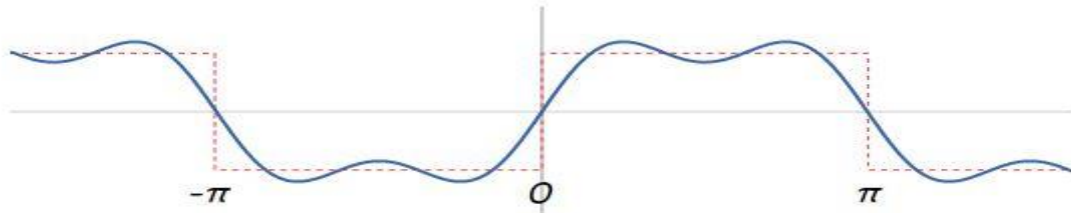
■ برای نمایش این تابع به فرم مجموع چند تابع نوسانی، ابتدا تابع $\sin x$ را نمایش می‌دهیم.



■ سپس برای تولید ناپیوستگی‌های موج مربعی نشان داده شده، تابع سینوسی $\sin(3x)/3$ را نیز رسم می‌کنیم.

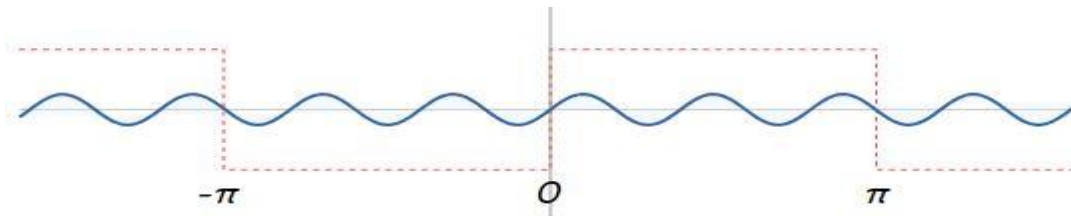
سری فوریه

نمایش موج مربعی به کمک موج‌های سینوسی :

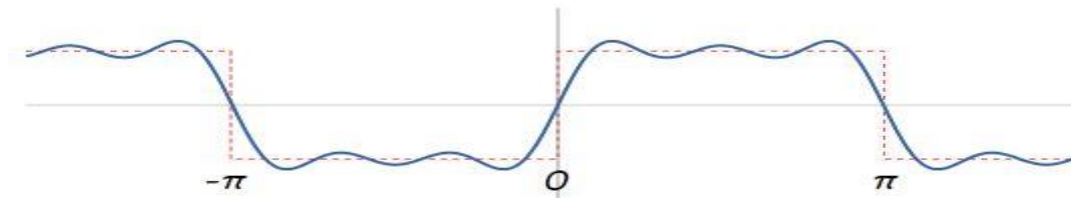


- در ادامه، این دو تابع یعنی $\sin x$ و $\sin(3x)/3$ را با یکدیگر جمع می‌کنیم.

- همانطور که مشاهده می‌شود، مجموع دو موج سینوسی نشان داده شده، تقریباً به فرم موج مربعی مطلوب ما در آمده است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که روند مناسبی برای تولید این موج مربعی بر اساس توابع نوسانی انتخاب شده است.



- برای بهتر شدن نمایش موج مربعی، تابع $\sin(5x)/5$ را نیز با موج‌های قبلی جمع می‌کنیم.
- موج $\sin(5x)/5$ در شکل مقابل رسم شده است.

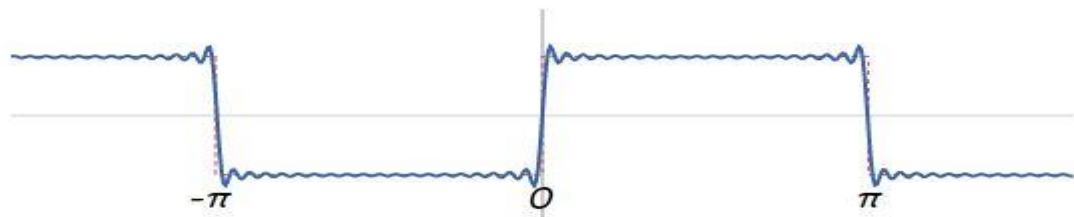


- شکل مقابل مجموع سه موج سینوسی $\sin x$ ، $\sin(3x)/3$ و $\sin(5x)/5$ را نشان می‌دهد.

سری فوریه

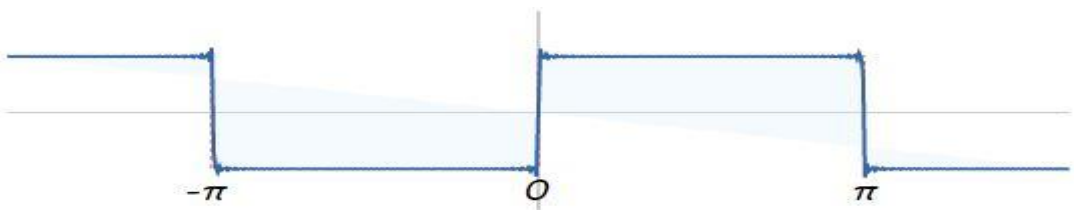
نمایش موج مربعی به کمک موج‌های سینوسی :

- افزایش تعداد توابع سینوسی، فرم نهایی موج تولید شده را به موج مربعی نزدیکتر می‌کند.
- شکل زیر با جمع کردن ۲۰ موج سینوسی (مضارب فرد از ۱ تا ۴۰) به صورت زیر به دست آمده است:



$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin 39x}{39}$$

- شکل زیر با جمع کردن ۱۰۰ موج سینوسی (مضارب فرد از ۱ تا ۲۰۰) به صورت زیر به دست آمده است:



$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots + \frac{\sin 199x}{199}$$

- اگر تعداد نامحدودی از توابع سینوسی را مطابق الگوی فوق با هم جمع کنیم، یک موج مربعی تولید خواهد شد.
- مراحل فوق ایده اصلی ایجاد سری فوریه را نشان می‌دهند. در واقع با استفاده از این روند می‌توان نشان داد که هر نوع تابع را می‌توان به کمک تعداد نامحدودی از توابع سینوسی و یا کسینوسی تولید کرد.

سری فوریه

▪ تابع $x(t)$ را متناوب می گویند اگر به ازای عدد مثبت غیر صفر T_0 داشته باشیم $x(t + T_0) = x(t)$ ، که در آن T_0 دوره تناوب این تابع است.

▪ این تابع را می توان به صورت سری زیر نمایش داد که به آن سری فوریه می گویند:

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \quad ; n = 1, 2, \dots$$

▪ ضرایب a_0 ، a_n و b_n را ضرایب فوریه می نامند و از روابط زیر محاسبه می شوند:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt \quad a_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos n\omega_0 t dt \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin n\omega_0 t dt$$

▪ بسط سری فوریه تابع $x(t)$ به صورت زیر است:

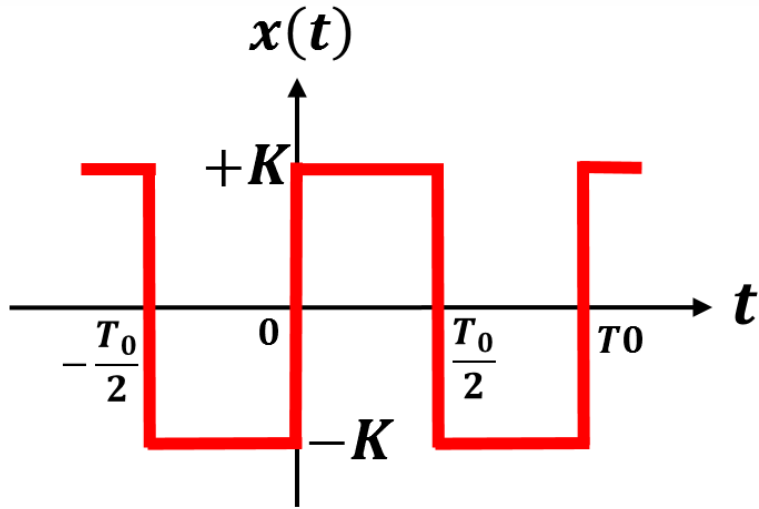
$$x(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots + a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

▪ ضرب a_0 مقدار متوسط تابع می باشد و در سیگنال های الکتریکی مقدار DC سیگنال نام دارد.

سری فوریه

مثال: ضرایب فوریه و بسط سری فوریه تابع موج مربعی متناوب شکل مقابل را به دست آورید.

حل: معادله تابع موج به صورت زیر است:



$$x(t) = \begin{cases} -K & -\frac{T_0}{2} < t < 0 \\ +K & 0 < t < \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

ابتدا ضرایب a_0 ، a_n و b_n را به دست می آوریم:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \left(\int_{-\frac{T_0}{2}}^0 (-K) dt + \int_0^{\frac{T_0}{2}} (+K) dt \right) = \frac{1}{T_0} \left([-Kt]_{-\frac{T_0}{2}}^0 + [+Kt]_0^{\frac{T_0}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{T_0} \left(\left[(-K)(0) - (-K) \left(-\frac{T_0}{2} \right) \right] + \left[(+K) \left(\frac{T_0}{2} \right) - (+K)(0) \right] \right) = \frac{1}{T_0} \left(-K \frac{T_0}{2} + K \frac{T_0}{2} \right) \Rightarrow \mathbf{a_0 = 0}$$

سری فوریه

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cos n\omega_0 t dt = \frac{2}{T_0} \left(\int_{-\frac{T_0}{2}}^0 (-K) \cos n\omega_0 t dt + \int_0^{\frac{T_0}{2}} (+K) \cos n\omega_0 t dt \right)$$

$$= \frac{2}{T_0} \left(\left[-K \frac{\sin n\omega_0 t}{n\omega_0} \right]_{-\frac{T_0}{2}}^0 + \left[+K \frac{\sin n\omega_0 t}{n\omega_0} \right]_0^{\frac{T_0}{2}} \right) \Rightarrow a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \sin n\omega_0 t dt = \frac{2}{T_0} \left(\int_{-\frac{T_0}{2}}^0 (-K) \sin n\omega_0 t dt + \int_0^{\frac{T_0}{2}} (+K) \sin n\omega_0 t dt \right)$$

$$= \frac{2}{T_0} \left(\left[-K \left(-\frac{\cos n\omega_0 t}{n\omega_0} \right) \right]_{-\frac{T_0}{2}}^0 + \left[+K \left(-\frac{\cos n\omega_0 t}{n\omega_0} \right) \right]_0^{\frac{T_0}{2}} \right) = \frac{2}{T_0} \left(\left[\frac{K}{n\omega_0} \cos n\omega_0 t \right]_{-\frac{T_0}{2}}^0 + \left[\frac{-K}{n\omega_0} \cos n\omega_0 t \right]_0^{\frac{T_0}{2}} \right)$$

$$= \frac{2}{T_0} \left(\left[\frac{K}{n\omega_0} \cos n\omega_0(0) - \frac{K}{n\omega_0} \cos n\omega_0 \left(-\frac{T_0}{2} \right) \right] + \left[-\frac{K}{n\omega_0} \cos n\omega_0 \left(\frac{T_0}{2} \right) - \left(\frac{-K}{n\omega_0} \right) \cos n\omega_0(0) \right] \right)$$

$$= \frac{2}{T_0} \left(\left[\frac{K}{n\omega_0} - \frac{K}{n\omega_0} \cos \left(-\frac{n\omega_0 T_0}{2} \right) \right] + \left[-\frac{K}{n\omega_0} \cos \left(\frac{n\omega_0 T_0}{2} \right) + \frac{K}{n\omega_0} \right] \right)$$

سری فوریه

با توجه به رابطه $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ می توان نوشت $\omega_0 T_0 = 2\pi$ ، و بنابراین:

$$b_n = \frac{2}{T_0} \left(\left[\frac{K}{n\omega_0} - \frac{K}{n\omega_0} \cos(-n\pi) \right] + \left[-\frac{K}{n\omega_0} \cos(n\pi) + \frac{K}{n\omega_0} \right] \right) = \frac{4K}{n\omega_0 T_0} (1 - \cos n\pi) = \frac{2K}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$$

با توجه به اینکه $\cos n\pi = \begin{cases} -1 & n \text{ فرد} \\ +1 & n \text{ زوج} \end{cases}$ بنابراین:

$$b_n = \begin{cases} \frac{4K}{n\pi} & n \text{ فرد} \\ 0 & n \text{ زوج} \end{cases}$$

$$b_1 = \frac{4K}{\pi}, b_2 = 0, b_3 = \frac{4K}{3\pi}, b_4 = 0, b_5 = \frac{4K}{5\pi}, \dots$$

و در نهایت بسط سری فوریه تابع $x(t)$ به صورت زیر است:

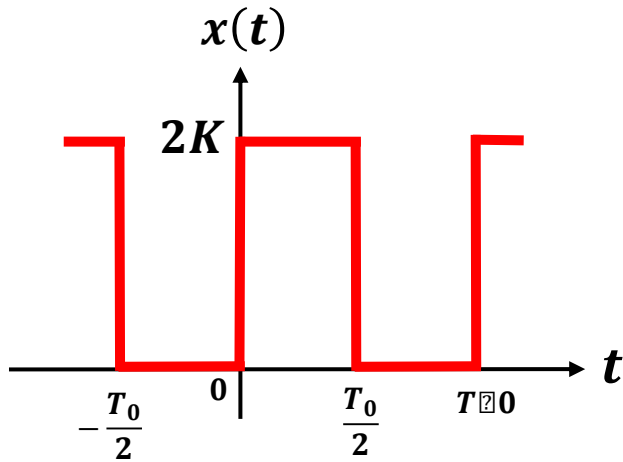
$$x(t) = a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t + a_2 \cos 2\omega_0 t + b_2 \sin 2\omega_0 t + \dots + a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t$$

$$x(t) = \frac{4K}{\pi} \sin \omega_0 t + \frac{4K}{3\pi} \sin 3\omega_0 t + \frac{4K}{5\pi} \sin 5\omega_0 t + \dots$$

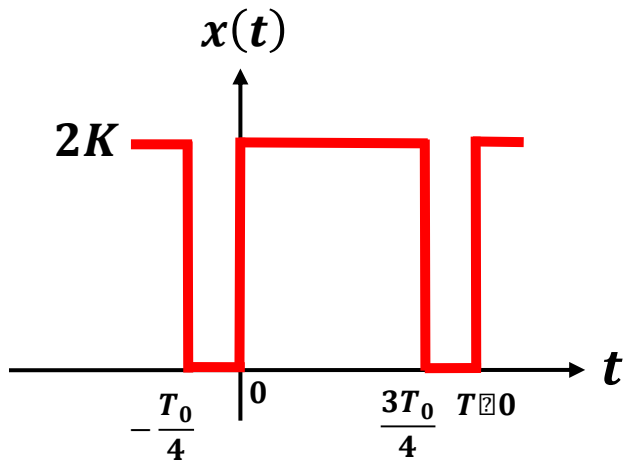
سری فوریه

تمرین: ضرایب فوریه و بسط سری فوریه توابع شکل های زیر را به دست آورید.

(۱)



(۲)



سری فوریه نمایی

- اگر تابع $v(t)$ متناوب باشد، سری فوریه نمایی مختلط برای تابع $v(t)$ به صورت زیر است:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-j2\pi n f_0 t} \quad ; n = 1, 2, \dots \quad (۱)$$

- که ضرایب سری فوریه (C_n) ، از رابطه زیر به دست می آید:

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad (۲)$$

- شکل قطبی c_n برابر است با $c_n = |c_n| e^{j \arg c_n}$ یا $c_n = |c_n| \angle \arg c_n$
- بنابراین هر سیگنال متناوبی را می توان به صورت مجموع بینهایتی از فیزورها بسط داد.

- در رابطه (۱) تابع $v(t)$ از فیزورهایی با دامنه $|c_n|$ و زاویه $\arg c_n$ در فرکانس های $nf_0 = 0, \pm f_0, \pm 2f_0, \dots$ تشکیل می شود.
- یعنی نمودار حوزه فرکانس تابع $v(t)$ ، یک طیف خطی دو طرفه است که به وسیله ضرایب سری فوریه تعریف می شوند. به همین خاطر می توان c_n را به صورت $c(nf_0)$ نوشت $(c(nf_0) \triangleq c_n)$:

$$c(nf_0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt \quad (۳)$$

- به طوری که $|c(nf_0)|$ نماینده طیف دامنه و $\arg c(nf_0)$ نماینده طیف فاز خواهد بود.

سری فوریه نمایی

سه خاصیت طیفی سیگنال‌های توان متناوب:

۱- تمام فرکانس‌ها مضارب صحیح یا هماهنگ‌های فرکانس اصلی f_0 (harmonics of the fundamental frequency) هستند. بنابراین خطوط طیف با فواصل یکنواخت f_0 قرار می‌گیرند.

۲- مولفه DC طیف (c_0) برابر با مقدار میانگین سیگنال است. زیرا با قرار دادن $n = 0$ در معادله (۳) خواهیم داشت:

$$c(0) = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} v(t) dt = \langle v(t) \rangle \quad (4)$$

۳- اگر $v(t)$ تابع زمانی حقیقی (غیر مختلط) باشد، داریم:

$$c_{-n} = c_n^* = |c_n| e^{-j \arg c_n} \quad (5)$$

که این رابطه، خود از رابطه (۳) و با قرار دادن $-n$ به جای n به دست می‌آید. پس خواهیم داشت:

$$|c(-nf_0)| = |c(nf_0)| \quad , \quad \arg c(-nf_0) = -\arg c(nf_0) \quad (6)$$

■ این رابطه به این معنی است که طیف دامنه تقارن زوج و طیف فاز تقارن فرد دارد.

سری فوریه نمایی

- هنگامی که با سیگنال‌های حقیقی سرو کار داریم، با استفاده از ویژگی گفته شده در معادله‌های (۵) یا (۶) می‌توانیم سری نمایی را به شکل زوج‌های مختلط مزدوج دسته بندی کنیم. البته c_0 مستثنی است. بنابراین معادله (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$v(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |2c_n| \cos(2\pi n f_0 t + \arg c_n) \quad (۷)$$

- این معادله، همان سری فوریه مثلثاتی بوده و نماینده طیف یک طرفه است.

نکته: در انتگرال گیری برای محاسبه c_n اغلب به عبارتی به شکل زیر برخورد می‌کنیم:

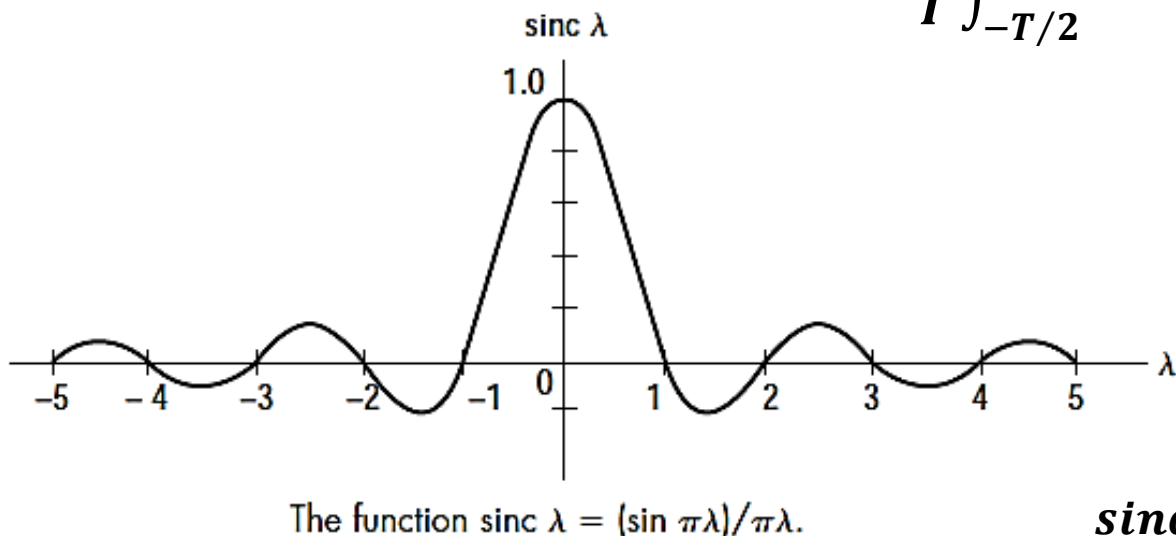
$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{j2\pi f t} dt = \frac{1}{j2\pi f T} (e^{j\pi f T} - e^{-j\pi f T}) = \frac{1}{\pi f T} \sin \pi f T \quad (۸)$$

- بنابراین تابع سینک (sinc) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{sinc} \lambda = \frac{\sin \pi \lambda}{\pi \lambda} \quad (۹)$$

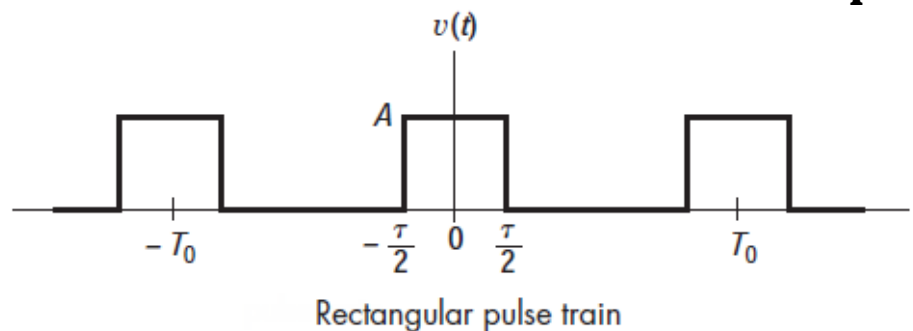
- در شکل مقابل می‌بینیم که $\text{sinc} \lambda$ تابعی زوج از λ است و ماکزیمم آن در $\lambda = 0$ قرار دارد. همچنین نقاط گذر تابع سینک از صفر، در مقادیر صحیح λ می‌باشد، یعنی:

$$\text{sinc} \lambda = \begin{cases} 1 & \lambda = 0 \\ 0 & \lambda = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$



سری فوریه نمایی

مثال: ضرایب فوریه و بسط سری فوریه تابع قطار پالس مربعی مقابل را برای حالتی که $\tau = \frac{T_0}{4}$ باشد به دست آورید. لبه پالس ها دارای ناپیوستگی بوده و تابع $v(t)$ در این نقاط تعریف نشده است.



حل: هر پالس این تابع دارای ارتفاع A و پهنای τ است. معادله تابع به صورت مقابل است:

$$v(t) = \begin{cases} A & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0 & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

ضرایب سری فوریه تابع به صورت زیر محاسبه می شود:

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} v(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi n f_0 t} dt = \frac{A}{-j2\pi n f_0 T_0} (e^{-j\pi n f_0 \tau} - e^{+j\pi n f_0 \tau}) = \frac{A \sin \pi n f_0 \tau}{T_0 \pi n f_0}$$

$$c_n = \frac{A\tau}{T_0} \text{sinc } n f_0 \tau = A f_0 \tau \text{sinc } n f_0 \tau \quad (10)$$

که از معادله ۹ و با جایگزین کردن $\lambda = n f_0 \tau$ به دست آمده است.

طیف دامنه $v(t)$ با توجه به معادله (۱۰) برابر است با: $|c(n f_0)| = |c_n| = A f_0 \tau |\text{sinc } n f_0 \tau|$

همچنین طیف فاز $v(t)$ برابر است با: $\arg c(n f_0) = \arg \text{sinc } n f_0 \tau$

نکته: با توجه به قضیه اوایلر ($e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta$) می توان نوشت:

$$e^{-j\pi n f_0 \tau} - e^{+j\pi n f_0 \tau} = \cos \pi n f_0 \tau - j \sin \pi n f_0 \tau - (\cos \pi n f_0 \tau - j \sin \pi n f_0 \tau) = -j2 \sin \pi n f_0 \tau$$

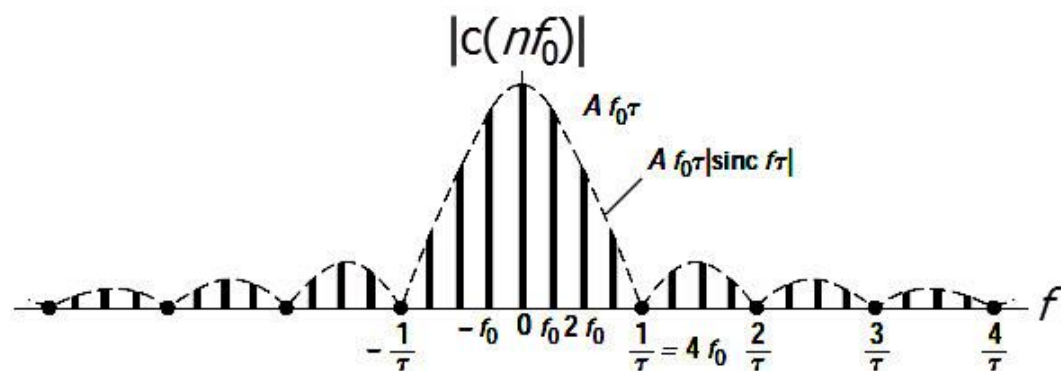
سری فوریه نمایی

- برای حالتی که $\tau/T_0 = \tau f_0 = 1/4$ باشد، (یعنی $\lambda = n/4$)؛ طیف دامنه برابر است با: $|c(nf_0)| = |c_n| = \frac{A}{4} \left| \text{sinc} \frac{n}{4} \right|$
- طیف دامنه را می توان با رسم تابع $Af_0\tau |\text{sinc} f\tau|$ که منحنی پوش خطوط طیف است (خطوط خط چین) ترسیم نمود. (شکل زیر)

■ چون وقتی $\lambda = 0$ است، $\text{sinc} \lambda = 1$ می باشد، بنابراین مولفه DC تابع برابر است با:

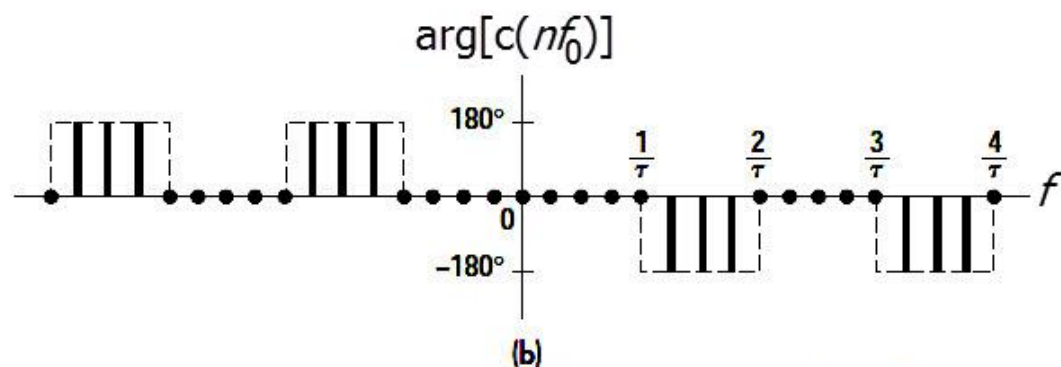
$$c_0 = Af_0\tau = \frac{A}{4}$$

■ با بررسی شکل موج تابع می توان نتیجه گرفت c_0 همان مقدار میانگین $v(t)$ است.



■ در نقاط $\pm 4f_0$ ، $\pm 8f_0$ و ... که دقیقاً مضارب صحیح $1/\tau$ هستند و مترادف با $\lambda = \pm 1, \pm 2, \dots$ می باشند، دامنه منحنی پوش برابر صفر است و خطوط طیف وجود ندارد.

■ برای حالتی که $\tau/T_0 = \tau f_0 = 1/4$ باشد، (یعنی $\lambda = n/4$)؛ طیف فاز برابر است با:



$$\arg c(nf_0) = \arg \text{sinc} nf_0\tau = \arg \text{sinc} \frac{n}{4}$$

■ مقدار زاویه فاز طیف این تابع با توجه به علامت $\text{sinc} nf_0\tau$ مقادیر صفر درجه و $\pm 180^\circ$ را خواهد داشت.

Spectrum of rectangular pulse train with $f_c\tau = 1/4$. (a) Amplitude; (b) phase.

سری فوریه نمایی

■ حال که قطار پالس را به مولفه‌های فرکانسی آن تجزیه کردیم، دوباره آن را به صورت اول می‌سازیم.

■ با توجه به اینکه در حالت $\tau/T_0 = \tau f_0 = 1/4$ مقدار دامنه طیف برابر $|c(nf_0)| = |c_n| = \frac{A}{4} \left| \text{sinc} \frac{n}{4} \right|$ است، بنابراین:

$$|2c_n| = \frac{2A}{4} \left| \text{sinc} \frac{n}{4} \right| = \frac{2A}{\pi n} \left| \sin \frac{\pi n}{4} \right|$$

■ در نتیجه رابطه (۷) به صورت زیر در می‌آید:

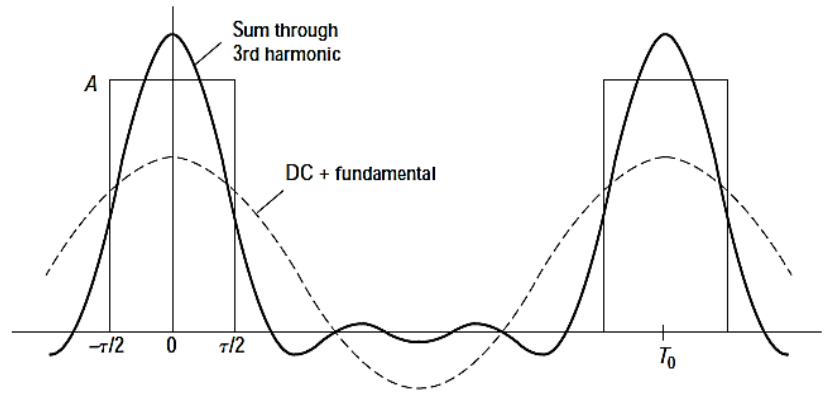
$$v(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |2c_n| \cos(n\omega_0 t + \arg c_n)$$

$$v(t) = \frac{A}{4} + \frac{\sqrt{2}A}{\pi} \cos \omega_0 t + \frac{A}{\pi} \cos 2\omega_0 t + \frac{\sqrt{2}A}{3\pi} \cos 3\omega_0 t + \dots$$

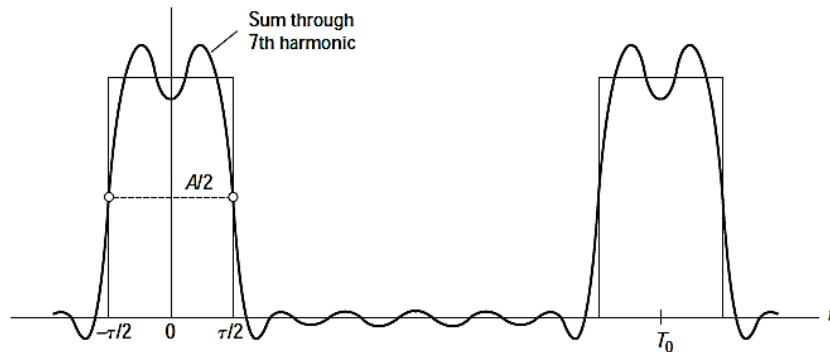
سری فوریه نمایی

بازسازی قطار پالس مربعی به کمک سری فوریه:

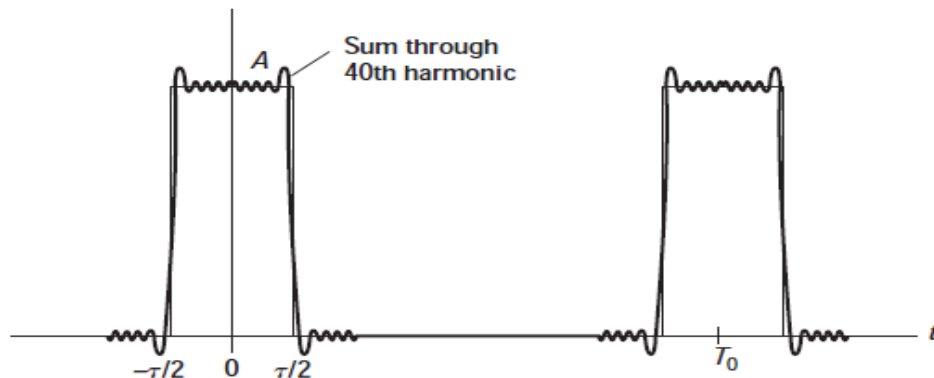
مجموع هارمونیک‌ها تا هارمونیک سوم:



مجموع هارمونیک‌ها تا هارمونیک هفتم:



مجموع هارمونیک‌ها تا هارمونیک ۴۰:



سری فوریه

تمرین: طیف دامنه قطار پالس مربعی را در هر یک از حالت‌های زیر رسم کنید:

$$\tau = T_0/5 \text{ (الف)}$$

$$\tau = T_0/2 \text{ (ب)}$$

$$\tau = T_0 \text{ (پ)}$$